

自适应有限元极限分析及岩土工程中的应用

李大钟¹, 郑榕明¹, 王金安², 杨毅¹, 李娜¹

(1. 香港理工大学土木与结构工程系, 香港; 2. 北京科技大学土木与环境工程系, 北京 100083)

摘要: 为了探讨有限元法极限分析的网格自适应以及锥优化算法在 Mohr-Coulomb 材料极限分析中的应用, 以屈服准则残余和变形为依据提出针对 Mohr-Coulomb 材料极限分析的有限元自适应策略。对局部网格自适应结合非结构三角形网格在数值极限分析中的表现进行了探讨。通过基于有限元的极限分析方法结合网络自适应寻找潜在滑移面, 从而极大地提高了数值计算精度。数值算例证明了所提出极限分析网格自适应准则的有效性以及在岩土极限分析中的应用前景。

关键词: 极限分析; 有限元; 自适应; Mohr-Coulomb

中图分类号: TU457

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2013)05 - 0922 - 08

作者简介: 李大钟(1984 -), 男, 山西朔州人, 博士研究生, 主要从事岩土工程极限分析及计算力学方面研究。E-mail: ambellstone@gmail.com。

Application of finite-element-based limit analysis with mesh adaptation in geotechnical engineering

LI Da-zhong¹, CHENG Yung-ming¹, WANG Jin-an², YANG Yi¹, LI Na¹

(1. Department of Civil and Structural Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China; 2. School of Civil and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Refinement strategy based on the yield function slack and deformation is proposed for the finite-element-based limit analysis (FELA) of Mohr-Coulomb materials. Performance of the local mesh adaptation for the unstructured mesh is examined. The potential slip surface is traced by the adaptive procedure incorporated in the FELA such that the accuracy of the obtained bound solution is dramatically improved. The efficiency and the validity of the proposed strategy are well backed up by results of applications in two classical stability problems in geomechanics, namely, the determination of the bearing capacity of strip footing on weightless soil mass and the critical height of a critical cut. The time required in the computation is provided as well which suggests that the numerical limit analysis is both practical and necessary with the newly developed local mesh adaptation and the second-order cone programming. The obtained results reflect the promising future of the FELA as an alternative to the conventional approaches in the stability analysis in geotechnical engineering.

Key words: limit analysis; finite element method; mesh adaptation; Mohr-Coulomb

0 引 言

极限分析是岩土工程中稳定性计算的一个重要分支, 同滑移线法和极限平衡分析相比有严密的理论基础, 同时不需要像有限元或有限差分等方法采用增量法求解极限荷载, 而对极限荷载的直接求解。传统极限分析方法没有得到广泛推广的主要原因在于手动建立速度场或者应力场相对复杂。同时由于屈服条件, 非线性在问题建立之初已经引入, 最终转化为求解大规模非线性规划。随着凸集优化算法以及计算机能力的不断提高, 这一问题得到一定程度的解决。数值极限分析获得了学术界广泛讨论, 其中基于有限元极限

分析已经应用于岩土工程稳定性问题^[1-5]。然而在极限分析中, 由于塑性变形区通常集中在局部, 基于有限元极限分析数值解的精度在很大程度上依赖网格布局。针对这一问题, Lyamin 等^[6]根据滑移线理论, 专门研究了通过生成扇形网格来解决荷载奇异点对极限解的影响。Makrodimopoulos 等^[7]以及 Hjiatj 等^[8]采用类似的扇形网格分析地基承载力问题并得到了一系列精度很高的极限值。

基金项目: 香港理工大学博士基金项目 (RPT 3 Ph.D. Program of PolyU); 香港理工大学资助项目 (G-U947)

收稿日期: 2011 - 11 - 18

对于复杂问题, 滑移面位置很难有先验知识。很多学者都在基于有限元的极限分析中, 网格自适应进行了探讨。Christiansen 等^[9]分析 von Mises 材料的极限分析网格自适应问题。他们采用屈服准则残余同变形来作为网格自适应判断条件, 对不可压缩性材料中极限分析网格自动剖分进行了研究。Borges 等^[10]采用基于恢复 Hessian 各向异性的误差估计方法, 对混合极限分析 (mixed limit analysis) 网格进行剖分和拉伸。采用类似的方法 Lyamin 等^[11]将该误差估计引入到极限分析的下限分析中。该类方法是对有限元法中误差估计在有限元法极限分析的简单延伸。然而, 恢复 Hessian 的理论基础 - 超收敛现象在极限分析并不存在, 至少目前还没有严格的数学论述。Ciria 等^[12-13]提出基于单元对上下限极限值误差差的贡献来判断局部误差。Munoz 等^[14]对该方法进行了进一步探讨, 引入了边界对误差的贡献。基于单元差值贡献的误差估计, 理论上较严格, 然而必须要求上下限问题共同求解来达到误差估计的目的。这对于相对简单的理想刚塑性模型的极限分析来讲, 似乎复杂了些。

近年来, 由于数值上处理相对困难的 Mohr-Coulomb 屈服准则可以被很方便地写成锥约束的形式, 锥优化 (conic programming) 在极限分析中得到了广泛的讨论^[15-17]。通过原 - 对偶 (primal-dual) 内点法非常有效率地进行求解, 这使得有限元极限分析中, 网格自适应变得实际而且必要。

本文讨论平面应变条件下, Mohr-Coulomb 材料的极限分析问题, 将屈服准则转化为二阶锥约束, 通过衡量屈服准则残余以及等效变形对网格进行剖分并将该方法应用于地基承载力以及垂直切坡极限高度问题。

1 极限分析

极限分析是一种直接求解极限荷载的方法, 其对材料的基本假设有: ①理想刚塑性材料; ②关联流动法则。

文献[18]中对以上假设在岩土工程稳定性分析中应用的合理性进行了详细论述。本文对此不作赘述。

泛函形式的边值问题可以定义为

$$a(\hat{\sigma}, u) = F(u) \quad (1)$$

其中

$$a(\hat{\sigma}, u) = \int_{\Omega} \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\sigma} : u \nabla d\Omega \quad (2)$$

$$F(u) = \int_{\Omega} \gamma \cdot u d\Omega = \int_{\Gamma^N} t \cdot u d\Omega \quad (3)$$

式中 $\hat{\sigma}$ 为应力张量; $\hat{\varepsilon}$ 为应变张量; ∇ 为梯度算子;

γ 和 t 分别为体力和面力; u 为速度向量; $u \Gamma^N$ 为应力边界。

同时, 应力张量必须满足屈服准则, 也就是说, 约束在一个凸集 $B(x)$

$$\hat{\sigma}(x) \in B(x) \quad (4)$$

引入荷载乘子 α , 令 $C = \{u | F(u) = 1\}$, 那么式 (1) 的精确解可以由以下任意一种形式得到。

$$\lambda = \sup \alpha$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \exists \hat{\sigma} \in B \\ a(\hat{\sigma}, u) = \alpha F(u) \end{cases} \quad (5)$$

$$= \sup_{\hat{\sigma} \in B} \inf_{u \in C} a(\hat{\sigma}, u) \quad (6)$$

$$= \inf_{u \in C} \sup_{\hat{\sigma} \in B} a(\hat{\sigma}, u) \quad (7)$$

$$= \inf_{u \in C} D(u) \quad (8)$$

其中, $D(u) = \sup_{\hat{\sigma} \in B} a(\hat{\sigma}, u)$ 为给定速场下总的能量耗散。式 (5) 为下限极限分析 (也称为极限分析的静态原理); 式 (7) 为上线极限分析 (极限分析的机动原理)。式 (6)、(7) 之间的强对偶性在文献[19]中给出了严格的证明, 也就是说, 理论上讲, 上下限问题都可以最终逼近到精确解。

本文主要讨论极限分析的下限问题。因为上限问题可以通过对偶变化, 转化成为等效下限问题来求解^[13, 17, 20]。同时, 如果采用原始 - 对偶内点法来求解最终的锥优化问题, 经验证实往往通过求解上限问题的对偶形式数值上来讲更加稳定, 而且计算时间要少, 尤其当模型比较大的时候。

2 连续问题的离散

采用三节点线性三角形单元剖分研究域, 单元之间存在应力不连续面, 如图 1 所示。这种单元的好处是, 只要节点变量满足屈服准则, 那么单元内部任何一点自动满足屈服准则, 同时应力不连续面可以引入更多自由度来弥补低插值的缺陷。

为了方便标记, 引入如下符号: \mathcal{T}_h 为一个三角剖分, 包含 E 单元, Ω^e 为单元。单元边界为 $\partial\Omega^e$, 剖分边界由 3 部分组成: $\varepsilon = \varepsilon^O \cup \varepsilon^D \cup \varepsilon^N$, $\varepsilon^O = \{\xi_e^e | \xi_e^e = \partial\Omega^e \cap \partial\Omega^e; \forall e, e' \in T_h\}$ (不连续面集合), $\varepsilon^D = \{\xi_e^D | \xi_e^D = \partial\Omega^e \cap \Gamma^D; \forall e \in T_h\}$ (速度边界), $\varepsilon^N = \{\xi_e^N | \xi_e^N = \partial\Omega^e \cap \Gamma^N; \forall e \in T_h\}$ (应力边界)。

单元内的应力可以表达为

$$\hat{\sigma}^e(x) = \sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i^e N_i(x) \quad (9)$$

其中, $N_i(x)$ 为形函数, $\hat{\sigma}_i^e$ 为节点变量。

那么, 下限分析的离散形式可以表达为

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \nabla \cdot \hat{\sigma}_h^e + \gamma^e = 0 & (\text{in } \Omega^e \forall e \in T_h) \\ (\hat{\sigma}_h^e - \hat{\sigma}_h^{e'}) \cdot n^{\xi_{e'}} = 0 & (\forall \xi_{e'} \in \mathcal{E}^O) \\ \hat{\sigma}_h^e \cdot n^{\xi_{e'}} = \alpha t^{\xi_{e'}} & (\forall \xi_{e'} \in \mathcal{E}^N) \\ \hat{\sigma}_h^e \in B_{\delta, h} & (\text{in } \Omega^e \forall e \in T_h) \end{cases}, \quad (10) \end{aligned}$$

其中, n 为单位法向量, 上标 e 代表单元, e' 为与之对应的相邻单元。下标 h 标明对应为 T_h 。

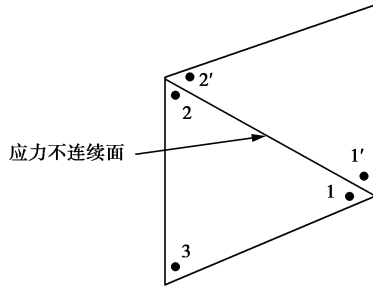


图1 下限分析有限元单元应力不连续面

Fig. 1 Finite elements for lower bound limit analysis and stress discontinuities

3 Mohr-Coulomb 屈服准则

满足屈服准则(下限分析)或者流动法则(上限分析)是在有限元极限分析使用高次单元最主要的障碍, 同时也是极限分析求解相对于线弹性有限元困难的多的主要原因, 因为最终的问题会导致式(10)为非线性优化。由于德鲁克公设^[21](稳定性材料假设), 屈服准则为凸函数, 最终的优化问题在凸集优化范畴, 理论上可以找到全局最优解。然而, Mohr-Coulomb 准则屈服面存在导数奇异点, 通用的非线性规划算法无法直接应用。有限元弹塑性分析中同样面临这样的问题, 一些学者对 Mohr-Coulomb 光滑逼近函数进行了讨论^[22-23]。采用光滑逼近函数结合通用优化算法^[24]来求解非线性优化问题。当然也可以通过线性转化, 将问题转化为线性优化问题^[25-29], 但这样处理会引入大量变量, 使得大规模数值求解困难。近年来的另一种处理办法是将 Mohr-Coulomb 准则转化为锥约束^[7, 15, 30-33]进而通过锥优化算法进行求解。这样可以很好地避免屈服面导数存在奇异点的问题, 而且也不需要屈服准则作近似处理。这里简单讨论平面应变条件下 Mohr-Coulomb 准则转化为二阶锥约束(second order cone)的方法。

首先, 引入新的应力变量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

其中, N 为研究问题的维度, δ_{ij} 为 Kronecker's δ 如果拉应力为正, 那么平面应变 Mohr-Coulomb 屈服准则可以写成如下形式:

$$\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} + (\sin \varphi) \sigma_m \leq c' \cos \varphi, \quad (12)$$

其中, c' 为黏聚力, φ' 为内摩擦角。

通过引入一个中间变量 z , 式(12)可以表达成为一个线性等式约束和一个二阶锥约束:

$$\left. \begin{aligned} z + a\sigma_m &= k \\ \sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} &\leq z \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

其中, $a = \sin \varphi'$, $k = c' \cos \varphi'$ 。

这样将屈服准则式(13)带入式(10), 最终将下限优化问题写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ \text{s.t.} & \begin{cases} A \cdot s = -\gamma \\ B \cdot s = 0 \\ C \cdot s - \alpha t = 0 \\ z_i + a\sigma_{m,i} = k_i & (\forall i \in \{1, 2, \dots, 3E\}) \\ \sqrt{s_{11,i}^2 + s_{12,i}^2} \leq z_i & (\forall i \in \{1, 2, \dots, 3E\}) \end{cases}, \quad (14) \end{aligned}$$

其中, A 为单元内平衡方程导致的线性矩阵, B 为不连续面平衡引起的线性矩阵, C 为应力边界条件线性矩阵。至此上述优化问题可以通过标准二阶锥优化(second order cone programming SOCP)算法进行求解。目前已有有许多商业或非商业的锥优化求解器, 如 MOSEK^[34]、sedumi 等^[35]。

4 网格自适应

4.1 网格标记

在有限元分析中, 网格标记通常是通过计算离散误差来实现的^[36-38]。对于极限分析, 由于理想刚塑性假设, 材料在极限状态下包含两种区域: 塑性流动区和刚体区。因为当单元处于塑性流动时, 应力状态处于屈服面上亦即 $R = 0$, 那么可以通过衡量屈服准则来判断塑性区。在实际应用中, 可以设定 R 的阈值, 一般来讲 $10^{-8} \leq R \leq 10^{-6}$:

$$\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} + a\sigma_m - k = R. \quad (15)$$

采用内点法计算优化问题时, 对偶变量的值同时可以求得。对应于屈服准则的对偶变量可以被解释成为等效应变。那么可以简单引入一个衡量单元变形状态量 E_{dual} , 其定义如下:

$$E_{\text{dual}} = \sqrt{e_m^2 + e_{11}^2 + e_{12}^2}, \quad (16)$$

其中, e_m, e_{11}, e_{12} 分别为对应于 s_m, s_{11}, s_{12} 的对偶变量。那么可以将 E_{dual} 作为误差指标来指导网格剖分。

其实, 只要合理控制阈值, 准则式(15)与式(16)

是等效的。因为只有塑性流动区内，应变不为零。因此在之后的算例中，并没有给出二者的对比结果，算例采用的是式 (16)。

同时，值得注意的是，当研究对象为纯摩擦材料 $c'=0$ ，那么式 (15) 将变成 $(k=c'\cos\varphi')$

$$\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} + a\sigma_m = R \quad (17)$$

这样就可能会在自由边界上过度剖分,因为在自由边界上会出现应力状态 $[\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] = [0 \ 0 \ 0]$ ，那么根据式 (11)， $[\sigma_m \ s_{11} \ s_{12}] = [0 \ 0 \ 0] \Rightarrow f=0$ ，这样自由边界上单元会就可能被错误标记为剖分单元。因此，在分析纯摩擦材料时，应首先判断应力状态，这可以通过计算应力向量的模量来实现。

4.2 网格剖分策略

对于二维三角形单元来说，剖分有两种方式即长边对分法剖分和规则剖分（也称为红-绿剖分），见图 2。本文中，笔者采用规则剖分，也就是将三角形分成 4 个形状类似的小三角形(红剖分)，增加的悬挂节点，可以将相邻三角形对分进行消除。

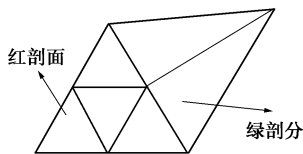


图 2 规则剖分（红-绿剖分）

Fig. 2 Regular refinement (red-green refinement)

5 数值算例

5.1 地基承载力

为了验证所提出网格自适应策略的有效性，选取地基承载力问题作为验证，刚性基础在纯黏性无重土地基上，极限荷载可以写成

$$q_u = c'N_c \quad (18)$$

其中， N_c 的精确解通过 Prandtl 的闭合公式可以得出：

$$N_c = \left[e^{\pi \tan \varphi'} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) - 1 \right] \cdot \cot \varphi' \quad (19)$$

由于对称性，只研究一半模型（见图 3），设基地粗糙，所以对应力不做约束，在自由边界上，应力为零 $\sigma_n=0$ ， $\tau_n=0$ ，对称边界上 $\tau_{xy}=0$ 。因为地基承载力问题研究土体为半无限空间，要保证所建立的应力场可以被拓展到半无限空间同时式 (4) 被处处满足，需要该边界建立延伸单元^[25]（extension elements），这里不做详细讨论。

分别对 $\varphi'=0^\circ$ ， $\varphi'=30^\circ$ 进行计算，计算迭代过程可以参见表 1。由表 1 可以看出，随着迭代增加，

下限值逐渐增加并最终逼近精确解，尤其在初始几步迭代，下限解有显著提高同时计算误差逐渐减小，之后趋于平缓（图 4，5）。

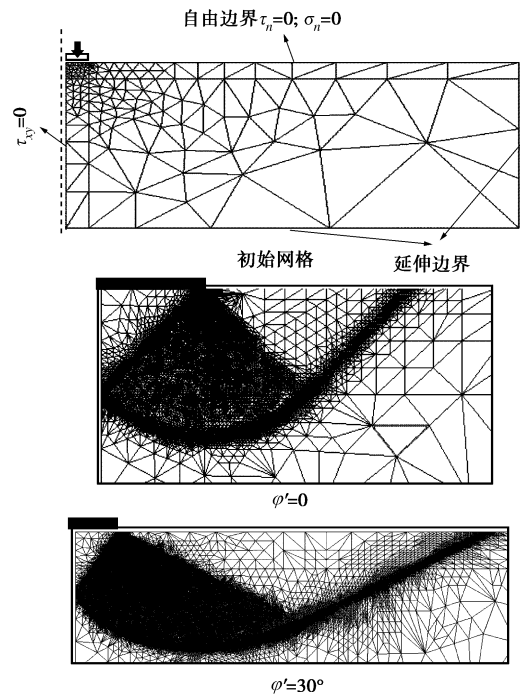


图 3 最终网格及破坏机制

Fig. 3 Eventual mesh and failure mechanism

表 1 $\varphi'=0^\circ$ 和 $\varphi'=30^\circ$ 网格细节

Table 1 Iteration details for $\varphi'=30^\circ$ and $\varphi'=0^\circ$

迭代	$\varphi'=0^\circ$			$\varphi'=30^\circ$		
	单元数	N_c 误差 /%	CPU(秒) (迭代次数)	单元数	N_c 误差 /%	CPU(s) (迭代次数)
1	268	4.94534 (3.787)	0.19 (24)	268	26.3973 (12.418)	0.16 (19)
2	519	5.03321 (1.948)	0.45 (23)	929	28.4838 (5.495)	0.567 (22)
3	1178	5.08078 (0.960)	1.03 (23)	3209	29.3489 (2.625)	2.71 (26)
4	3103	5.10472 (0.461)	3.65 (23)	10257	29.7707 (1.225)	13.95 (33)
5	5543	5.12057 (0.21)	6.49 (24)	29554	29.9667 (0.574)	62.90 (42)
6	11359	5.12983 (0.101)	15.35 (25)	67991	30.0549 (0.282)	167.48 (40)
7	26956	5.13502 (0.0969)	42.53 (22)	92431	30.081 (0.196)	221.99 (38)
8	58349	5.13704 (0.065)	111.24 (22)	244333*	30.120 (0.066)	760.00 (44)

*注：为了表格简洁并不是第 8 次迭代值，而是第 10 次。

其中当 $\varphi'=0^\circ$ ，由式 (19) $N_c=5.14$ ，本算例中 $N_c=5.137$ ，误差为 0.065%。当 $\varphi'=30^\circ$ ， $N_c=30.14$ 误差为 0.066%，可见通过网格自适应，极限分析可以得到精度很高的解。为了更为清晰地说明这一点，将自

适应网格剖分和均匀剖分进行了比较, 见表 2。

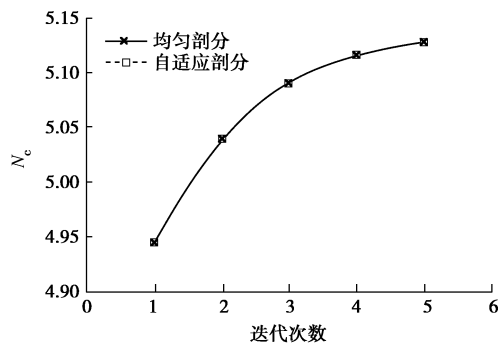


图 4 N_c 随自适应剖分和均匀剖分随迭代次数变化曲线

Fig. 4 N_c vs. iterations for adaptive refinement and uniform refinement

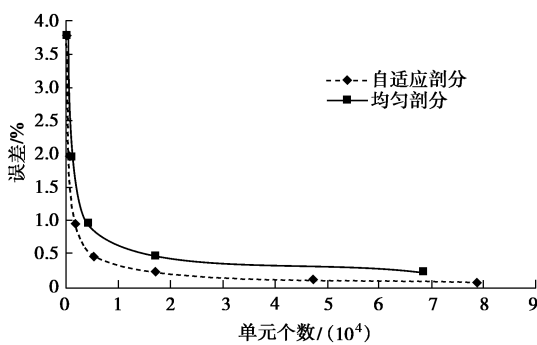


图 5 自适应剖分同均匀剖分误差 - 单元数曲线

Fig. 5 Error vs. elements for adaptive refinement and uniform refinement

表 2 自适应网格剖分同均匀网格剖分比较

Table 2 Comparison of performance between adaptive refinement and uniform refinement

自适应网格剖分		均匀剖分	
单元数	N_c	单元数	N_c
268	4.94534	268	4.94534
621	5.03984	1072	5.03986
1729	5.09062	4288	5.09058
5465	5.11627	17152	5.11628
17562	5.12879	68608	5.12844
47606	5.13476		
78922	5.13724		

由表 2 可以看出, 给定相同的初始网格, 自适应网格剖分和均匀剖分得到的极限荷载几乎相同。然而, 自适应网格要比均匀剖分少很多。说明, 需要被剖分的网格已经被剖分, 对塑性区之外的网格剖分并不会提高最终极限值精度。这从上限分析的角度将不难理解 (同样地, 可以通过对偶变化将下限问题转化为等效上限问题), 因为在上限分析中, 优化问题的目标函数是一个关于内能耗散和外力做功的函数。显然在刚性区, 应变为零, 对目标函数没有任何贡献即剖分对解的精度没有任何影响。

值得指出的是, 该算例中, 最大模型为 244333 个不连续三角形单元, MOSEK^[34]求解大约十几分钟便可以得到最优解, 表明 SOCP 在解决平面应变 Mohr-Coulomb 材料大规模极限分析时非常有效。

从最终所捕捉到的破坏区来看 (见图 3), 当基础底部粗糙, 自适应网格所捕捉到的滑移面同 Prandtl 模式 (见图 6) 一致。其中破坏模式由三部分组成: 直接位于基础下的 Rankine 主动区 ABC , 过渡区 (也称为 Prandtl 区) ACD , 以及 Rankine 被动区 ADE 。

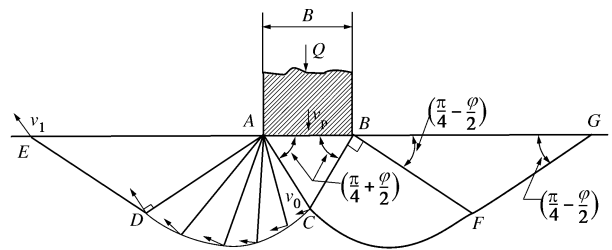


图 6 Prandtl 破坏机制

Fig. 6 Prandtl mechanism

5.2 垂直切坡临界高度

本算例考虑一个垂直切坡临界高度的问题, 同之前的地基承载力问题不同, 其中系统破坏由地基外力引起。在边坡问题中, 极限分析中把重力作为引起破坏的外力, 因此本例中将重力作为优化变量进行求解。

边坡稳定数定义为

$$N_s = \frac{\gamma_{crit} H}{c'} \quad (20)$$

其中, γ_{crit} 为破坏时的临界重度, H 为坡高, c' 为黏聚力。

为了简化起见, 同时方便和文献的计算结果进行比较, 这里只考虑纯黏性土。 N_s 的精确解无法得出, 文献中可以找到的最优解是由 Kammoun 等^[39]和 Pastor 等^[40]得出的, 他们通过求解大规模数值上下限问题优化确定了 N_s 范围:

$$3.77522 \leq N_s \leq 3.77756 \quad (21)$$

该算例不打算通过网格自适应方式来提高式(21)的精度, 而且在实际工程中这种精度提高的意义也不是很大。通过这个算例可以说明简单几步迭代, 尤其是在计算开始几步, 可以很显著地提高计算精度。图 7 (a) 为初始网格, $N_s=3.41$ 误差为 9.6%, 通过 4 次迭代, $N_s=3.767$ 误差为 0.2%, 破坏模式如图 7 (d) 所示。

6 计算时间

为了说明网格自适应的有效性以及 SOCP 在

Mohr-Coulomb 材料平面应变极限分析中计算效率, 这里给出地基承载力问题算例的计算时间。该算例在台式计算机上进行, 配置为操作系统: Windows 7 64 位, 内存 8GB, CPU 为 Intel Core 2 Quad CPU Q9550 2.83 GHz。求解器为 MOSEK 64 位^[34]。

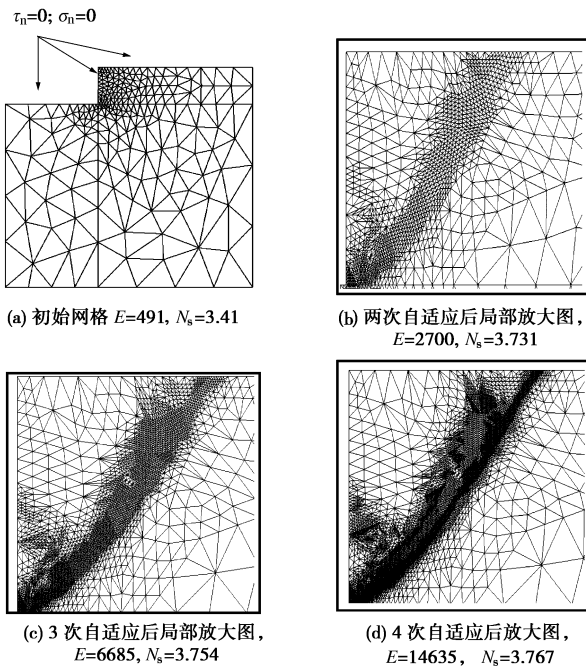


图 7 初始网格及自适应后结果

Fig. 7 Initial mesh and the results of refinements

从表 3 中的计算时间来看, SOCP 在对 Mohr-Coulomb 材料的平面应变问题求解相当高效, 同时本文所提出的误差估计占总计算时间不到 0.5%。自适应极限分析 8 步迭代所消耗十几分钟。

表 3 算例计算时间

Table 3 Computational time spent on previous numerical example

算例	迭代次数	总时间 /s	求解 %	装配 /%	误差估计 /%	单元数
$\varphi' = 0^\circ$	8	601	59.65	12.73	0.46	78922
$\varphi' = 30^\circ$	8	857	62.2	15.38	0.47	92431

7 结 论

本文通过采用屈服准则残余和等效应变为判断准则, 对基于有限元的极限分析网格自适应进行了讨论, 可以得以下 4 点结论。

(1) 基于有限元的极限分析不需要在计算之前假定破坏形式。结合网格自适应, 结构的破坏形式可以通过计算自动寻找出, 这样可以极大程度的提高计算精度。

(2) 由于理想刚塑性假设, 模型由塑性区和刚性区组成, 所求极限荷载的最终误差只来源于塑性区,

这同基于位移的有限元法不同。采用基于屈服残余或者等效变形的自适应网格标记准则, 完全可以满足极限分析网格局部细化的要求。这一点从算例所捕捉到的最终滑移面及所得到的极限荷载得到了很好的证明。

(3) 基于有限元的极限分析所得到的数值解精度和网格剖分有很大的关系, 网格自适应对数值解的精度有很大的提高。

(4) Mohr-Coulomb 是岩土工程中广泛使用的屈服准则, 将其改写成等式约束和一个二阶锥约束可以将问题转化成为锥优化的形式。不仅可以很好避免使用光滑函数逼近所引入的误差, 而且在收敛速度和计算时间上也有效很多。

参考文献:

- [1] BANDINI P. Numerical limit analysis for slope stability and bearing capacity calculations[D]. West Lafayette: Purdue University, 2003.
- [2] MAKRODIMOPOULOS A. Computational formulation of shakedown analysis as a conic quadratic optimization problem[J]. Mechanics Research Communications, 2006, 33(1): 72 - 83.
- [3] KIM J. Limit analysis of soil slope stability using finite elements and linear programming[D]. West Lafayette: Purdue University, 1998.
- [4] KIM J, SALGADO R, LEE J. Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2002, 128(7): 546 - 557.
- [5] YU H S, SALGADO R, SLOAN S W, et al. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 1998, 124(1): 1 - 11.
- [6] LYAMIN A V. Three-dimensional lower bound limit analysis using nonlinear programming[D]. Newcastle: University of Newcastle, 1999.
- [7] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(4): 604 - 634.
- [8] HJIAJ M, LYAMIN A V, SLOAN S W. Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N-gamma [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(5/6): 1681 - 1704.
- [9] CHRISTIANSEN E, EDMUND O S. Automatic mesh refinement in limit analysis[J]. International Journal for

- Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**(6): 1331 - 1346.
- [10] BORGES L, ZOUAIN N, COSTA C, et al. An adaptive approach to limit analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**(10-13): 1707 - 1720.
- [11] LYAMIN A V, SLOAN S W, KRABBENHOFT K, et al. Lower bound limit analysis with adaptive remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **63**(14): 1961 - 1974.
- [12] CIRIA H. Computation of upper and lower bounds in limit analysis using second-order cone programming and mesh adaptivity[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [13] CIRIA H, PERAIRE J, BONET J. Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, **75**(8): 899 - 944.
- [14] MUNOZ J J, BONET J, HUERTA A, et al. Upper and lower bounds in limit analysis: Adaptive meshing strategies and discontinuous loading[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, **77**(4): 471 - 501.
- [15] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, **44**(5): 1533 - 1549.
- [16] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Computational formulation of shakedown analysis as a conic quadratic optimization problem[J]. Mechanics Research Communications, 2006, **33**(1): 72 - 83.
- [17] MAKRODIMOPOULOS A. Remarks on some properties of conic yield restrictions in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2010, **26**(11): 1449 - 1461.
- [18] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [19] CHRISTIANSEN E. Limit analysis of collapse states [M]//CIARLLET P G, LIONS J L. Handbook of Numerical Analysis. North-Holland: Amsterdam, 1996: 193 - 312.
- [20] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, HJIAJ M, et al. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **63**(7): 1069 - 1088.
- [21] DRUCKER D C, PRAGER W, GREENBERG H J. Extended limit design theorems for continuous media[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, **9**(4): 381 - 389.
- [22] ZIENKIEWICZ O C, PANDE G N. Some useful forms of isotropic yield surface for soil and rock mechanics [M]//GUDEHUS G. In Finite Elements in Geomechanics. Chichester: Wiley, 1997: 179 - 190.
- [23] ABBO A J, SLOAN S W. A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion[J]. Computers & Structures, 1995, **54**(3): 427 - 441.
- [24] LYAMIN A V, SLOAN S W. Lower bound limit analysis using non-linear programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, **55**(5): 573 - 611.
- [25] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1988, **12**(1): 61 - 77.
- [26] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, **13**: 263 - 282.
- [27] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity-fields[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, **127**(1/2/3/4): 293 - 314.
- [28] 杨峰, 阳军生, 张学民. 基于线性规划模型的极限分析上限有限元的实现[J]. 岩土力学, 2011, **32**(3): 914 - 921. (YANG Feng, YANG Jun-sheng, ZHANG Xue-min. Implementation of finite element upper bound solution of limit analysis based on linear programming model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, **32**(3): 914 - 921 (in Chinese))
- [29] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite-elements and linear-programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, **13**(3): 263 - 282.
- [30] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming[J]. Communications in Numerical Method in Engineering, 2008, **24**(11): 1107 - 1119
- [31] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, **31**(6): 835 - 865.
- [32] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound

- limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2008, **24**(11): 911 - 927.
- [33] MARTIN C M, MAKRODIMOPOULOS A. Finite-element limit analysis of Mohr-Coulomb materials in 3D using semidefinite programming[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2008, **134**(4): 339 - 347.
- [34] MOSEK A. The MOSEK C API manual. Version 6.0[M]. (Revision 103) User's Manual and Reference. <http://www.mosek.com>. 2010.
- [35] LABIT Y, PEAUCELLE D, HENRION D Sedumi. Interface 1.02 - A tool for solving LMI problems with SEDUMI[C]// IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design Proceedings, 2002: 272 - 277.
- [36] KELLY D W, GAGO J P D R, ZIENKIEWICZ O C, et al. A-posteriori error analysis and adaptive processes in the finite-element method 1 error analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, **19**(11): 1593 - 1619.
- [37] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery and a-posteriori error-estimates 1 the recovery technique[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, **33**(7): 1331 - 1364.
- [38] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery and a-posteriori error-estimates 2 error-estimates and adaptivity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, **33**(7): 1365 - 1382.
- [39] KAMMOUN Z, PASTOR F, SMAOUI H, et al. Large static problem in numerical limit analysis: A decomposition approach[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(18): 1960 - 1980.
- [40] PASTOR F, LOUËTE, E, PASTOR J. Limit analysis and convex programming: A decomposition approach of the kinematic mixed method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, **78**: 254 - 274.

岩土及地下工程教育部重点实验室(同济大学) 2013 年度开放课题申请指南

本重点实验室自 2007 年 2 月由教育部正式批准在同济大学立项建设以来,按照教育部重点实验室的开放要求,自 2008 年起面向国内外征集开放基金项目,连续五年批准了约 30 项国内外访问学者的申请,取得了持续对外开放、合作与交流的良好效果。经研究,本年度继续设立专项开放研究基金,资助国内外学者和科技工作者来实验室开展科研工作。

1 资助范围

本年度开放课题主要资助的研究方向如下:①土体渐进破坏理论与软土工程;②土体宏观理论与环境土工灾变防治;③土体多场耦合理论与灾害控制;④地下工程安全理论与风险控制;⑤城市地下空间与岩体地下工程

2 申请资格

同济大学校外从事与岩土与地下工程有关的国内外高级、中级科技人员、青年科技工作者均可申请本实验室的开放基金。

3 资助金额

申请者必须本着实事求是的原则申请资助金额,开放基金的资助强度一般每项不超过 4 万元。原则上每个方向批准一项,合计共资助 5 项左右。

4 项目执行期限

每个项目实施期限为两年,即 2013 年 9 月 1 日至 2015 年

8 月 31 日。

5 考核标准

每个开放基金资助课题应在国际学术期刊发表 1 篇被 SCI 检索的论文(有正式的检索号),且同济大学合作者需列为论文的共同作者,作者单位之一必须标注为本重点实验室,并注明课题批准号。

6 申报程序

(1) 开放基金申请人应认真阅读有关申请说明,申报课题必须符合本实验室的研究方向,属于 2013 年资助研究内容的范畴,并具有本重点实验室固定研究人员合作。同济大学有关研究人员的介绍,可查阅: <http://geotec.tongji.edu.cn/keylab/>

(2) 本年度开放课题申请截止时间为 2013 年 6 月 10 日(以邮戳日期为准)。申请书须以纸质一式 2 份寄给:上海市四平路 1239 号(邮政编码 200092),同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室,马险峰老师收(电话:021-65984993, E-mail: xf.ma@tongji.edu.cn)。

除纸质申请材料,申请人须提供申请书及附件的电子文件(PDF 格式),并注意纸质申请书与电子版申请书的内容应严格一致。

(3) 最终结果将于 2013 年 9 月前公布。

(岩土及地下工程教育部重点实验室(同济大学) 供稿)