

DOI: 10.11779/CJGE20240837

# 水平动荷载作用下端承型群桩动力相互作用解析解

郑长杰<sup>1,2</sup>, 崔亦秦<sup>1,2</sup>, 丁选明<sup>3</sup>, 栾鲁宝<sup>\*4</sup>

(1. 福建理工大学地下工程福建省高校重点实验室, 福建 福州 350118; 2. 福建理工大学土木工程学院, 福建 福州 350118; 3. 湖南工程学院土木工程智能防灾减灾与生态修复湖南省重点实验室, 湖南 湘潭 411104; 4. 中国海洋大学工程学院, 山东 青岛 266100)

**摘要:** 基于土体平面应变模型, 对小间距、大直径群桩计算理论进行修正, 建立了单相土地基中考虑被动桩散射效应的“桩-土-桩”水平振动响应分析模型。依托该模型, 通过对水平动荷载作用下的土体振动控制方程进行解耦, 得到桩周土位移和水平动力复阻抗的解析表达式, 然后考虑“入射波-被动桩”、“散射波-主动桩”的相互作用, 分别求解外荷载作用下的主动桩位移、入射波作用下的被动桩位移和散射波作用下的主动桩位移, 并定义散射效应因子, 对已有“桩-桩”动力相互作用因子进行修正。基于修正的作用因子, 建立考虑被动桩散射效应的群桩水平刚度计算矩阵, 结合位移叠加原理, 推导考虑散射效应的群桩水平刚度解析表达式。最后通过算例分析表明: 桩间距、桩基直径和桩周土剪切模量是散射效应的主控因素; 散射效应对群桩刚度的作用效果并非一成不变, 将随着振动频率的逐渐增加由承载有利向承载不利过渡; 承载有利与承载不利的转折频率与桩间距、桩基直径、荷载作用方向、桩周土剪切模量等因素有关。

**关键词:** 群桩; 散射效应; 相互作用因子; 动力响应; 解析解

中图分类号: TU473

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2025)11-2316-09

**作者简介:** 郑长杰(1989—), 男, 博士, 教授, 主要从事桩基动力学与岩土地震工程方面的研究工作。E-mail: zcj@fjut.edu.cn。

## Analytical solution for dynamic interaction of end-bearing pile groups subjected to horizontal dynamic loads

ZHENG Changjie<sup>1,2</sup>, CUI Yiqin<sup>1,2</sup>, DING Xuanming<sup>3</sup>, LUAN Lubao<sup>4</sup>

(1. Key Laboratory of Underground Engineering, Fujian Province University, Fujian University of Technology, Fujian 350118, China;

2. School of Civil Engineering, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China; 3. Hunan Provincial Key Laboratory of Intelligent

Disaster Prevention-Mitigation and Ecological Restoration in Civil Engineering, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, China;

4. College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

**Abstract:** An analytical model for the “pile-soil-pile” horizontal interaction in pile groups that accounts for the scattering effect of the receiver pile is presented in this study based on the plane strain model, to modify the calculating theory for closely-spaced and large-diameter pile groups embedded in single-phase soils. The displacement and horizontal dynamic resistance of the surrounding soil are analytically obtained by decoupling the governing equations of the soil. After that, the displacement of the source pile caused by the applied horizontal load, the displacement of the receiver pile caused by the incident wave and the displacement of the source pile caused by the scattering wave are respectively derived by considering the “incident wave-receiver pile interaction” and the “scattering wave-source pile interaction”. Following that, a new-defined scattering factor for horizontally vibrating groups is proposed to modify the reported “pile-pile” interaction factor. Then, this modified interaction factor is used to establish the calculating matrix for the pile groups subjected to horizontal dynamic loads, and to further derive the corresponding dynamic complex impedance accounting for the scattering effect of the receiver pile. It is found through some arithmetical cases that the pile spacing, pile diameter and surrounding soil’s shear modulus dominate the scattering effect; the scattering effect is frequency-dependent, transitioning from a load-bearing favorable case to a load-bearing

**基金项目:** 国家重点研发计划(2023YFB2604200); 国家自然科学基金项目(52178318); 福建省杰出青年科学基金项目(2024J010034) This work was supported by National Key Research and Development Program of China (Grant No.2023YFB2604200), National Natural Science Foundation of China (Grant No.52178318), and Fujian Provincial Natural Science Foundation for Outstanding Young Scientists (Grant No.2024J010034).

**收稿日期(Received):** 2024-08-19 **修回日期(Revised):** 2025-03-03 **接受日期(Accepted):** 2025-03-27 **网络出版日期(Online):** 2025-03-28

**\*通信作者** (E-mail: llb@ouc.edu.cn)

unfavorable case with the increase of the vibration frequency; the critical frequency governing the transition between the favorable and the unfavorable state of the scattering effect is dependent on pile spacing, pile diameter, the direction of the applied load and the shear modulus of the soil.

**Key words:** pile group; scattering effect; interaction factor; dynamic response; analytical solution

## 0 引言

群桩基础因承载力高、沉降小、稳定性好等优点被广泛应用于海洋平台基础、高层建筑基础以及道路交通建设等工程中, 以承担波浪、风、车辆等动荷载作用。动荷载的显著特征是波动效应, 导致“桩-土-桩”耦合作用机理显著区别于静荷载, 因此, 为了服务实际工程, 揭示“桩-土”系统动力耦合作用机理, 提高基础建设的安全性, 进行“桩-土-桩”动力响应分析就显得尤为关键。目前, 动荷载作用下的群桩动力响应分析方法有两种: 以有限元和边界元为基础的数值计算方法<sup>[1-5]</sup>、基于“桩-桩”相互作用因子的叠加法<sup>[6-10]</sup>。其中, 以“桩-桩”相互作用因子为基础的叠加法由于概念清晰、相互作用机制明确、计算效率高等优点, 在群桩动力响应分析中得到广泛应用。

“桩-桩”相互作用因子的概念最早由 Poulos 于 1968 年提出用于群桩静力承载分析, 随后 Kaynia<sup>[11]</sup>将此概念引入群桩动力响应分析中, 研究了半无限介质中的群桩振动特性, 指出群桩力学响应与频率相关。Dobry 等<sup>[12]</sup>基于“桩-土”系统位移协调假定, 提出了“桩-桩”动力相互作用因子的简化计算方法, 该方法在刚性群桩 (桩/土模量比  $E_p/E_s > 500$ ) 的动力学分析中具有较高的计算效率和可靠的计算精度, 并得到广泛应用<sup>[13-14]</sup>, 但其不适用于柔性群桩 (桩/土模量比  $E_p/E_s < 500$ )。为此, Makris 等<sup>[15]</sup>考虑被动桩与桩周土的刚度差异以及被动桩对原有土体位移场的影响, 对 Dobry 和 Gazetas 模型进行修正, 将“桩-桩”相互作用简化为 3 步: ①基于桩基 Winkler 地基梁模型获得动荷载作用下主动桩的桩体位移; ②基于土体平面应变模型, 推导桩周土的位移场、应力场, 定义位移衰减函数; ③基于桩基 Winkler 地基梁模型, 考虑“被动桩-土”相互作用过程中的衍射效应, 推导被动桩位移。Mylonakis 等<sup>[16]</sup>采用相同的方法开展了动荷载作用下有限长群桩的动力响应问题研究, 补充了群桩水平动力响应理论。Winkler 地基梁模型采用串、并联的弹簧和阻尼器模拟“桩-土”相互作用, 具有概念清晰、相互作用机理明确、计算效率高等优势, 被广泛应用于群桩动力响应分析中, 但传统 Winkler 地基梁弹簧刚度和阻尼器系数的物理意义不明确, 且参数标定多依赖于经验<sup>[17-18]</sup>。

上述文献在推导“桩-桩”相互作用因子时, 仅考虑了主动桩振动对被动桩的影响, 而忽略了被动桩振

动对主动桩的反馈作用, 因此仅适用于桩间距较大的群桩基础 (即桩间距/桩径  $S/d > 10$ )。然而, 对于桩间距较小的群桩基础而言 (例如海洋工程中的群桩基础), 不仅存在主动桩对被动桩的振动影响, 同时也存在被动桩对主动桩的振动影响, 即被动桩的散射效应<sup>[19-20]</sup>。传统的 Winkler 地基梁方法没有考虑被动桩的散射效应影响, “桩-土-桩”动力耦合作用机理尚不明确, 导致现有分析理论仍有不足、设计方法存在缺陷, 理论研究严重滞后于工程实践。为此, 本文基于土体平面应变理论, 考虑被动桩的散射效应影响, 建立了水平动荷载作用下刚性群桩的动力响应计算模型, 补充完善现有群桩动力响应分析理论, 并进行小间距群桩参数分析, 为群桩基础设计提供参考。

## 1 考虑散射效应的物理模型

### 1.1 群桩计算模型及基本假定

水平动荷载作用下的群桩计算模型如图 1 所示, 群桩基础包含  $n$  个桩基单元 (即单桩), 并嵌固于刚性基岩中。桩基顶部与刚性承台连接, 承台一侧作用有水平简谐荷载  $Q_0 e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  为激振圆频率,  $i = \sqrt{-1}$ 。桩基长度为  $H$ , 桩间距为  $S$ , 桩基直径为  $d$ , 横截面积为  $A_p$ , 弹性模量为  $E_p$ , 横截面惯性矩为  $I_p$ , 密度为  $\rho_p$ 。桩周土剪切模量为  $G_s$ , 密度为  $\rho_s$ , 阻尼比为  $\beta_s$ 。

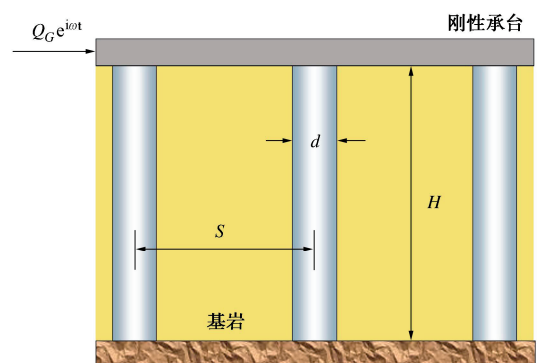


图 1 群桩计算示意图

Fig. 1 Conceptual model of pile group

本文在模型建立过程中引入如下假定: ①忽略桩顶承台质量, 不考虑承台与土的相互作用; ②桩土模量比  $E_p/E_s > 500$ , 忽略土体竖向应力梯度的影响; ③桩周土为各项同性黏弹性介质; ④桩-土系统为小变形, 桩-土位移协调<sup>[8, 18]</sup>。

### 1.2 考虑散射效应的物理模型

基于 Poulos<sup>[6]</sup>的叠加原理以及 Makris 等<sup>[15]</sup>的群桩

动力响应简化计算方法, 本文考虑被动桩散射效应的“桩-土-桩”水平相互作用机理可描述如下:

(1) 主动桩在水平荷载下产生水平位移  $W_{11}$ 。

(2) 主动桩振动在桩周土内产生沿径向传播的入射波, 水平位移  $U_{21}$  可表示为

$$U_{21} = \psi(S, \theta) W_{11} \quad (1)$$

式中:  $\psi(S, \theta)$  为距离主动桩  $S$  位置处的土体位移衰减函数;  $\theta$  为任意方向与水平方向的夹角。

(3) 径向传播的入射波到达被动桩, 引起被动桩水平振动, 产生水平位移  $W_{21}$ , 同时在桩周土内产生沿径向传播的散射波, 其水平位移  $U_{12}$  可表示为

$$U_{12} = \psi(S, \theta) W_{21} \quad (2)$$

(4) 散射波传播至主动桩位置处, 引起主动桩振动, 产生水平位移  $W_{12}$ , 叠加主动桩在水平荷载作用下的位移  $W_{11}$  和在散射波作用下的位移  $W_{12}$ , 即可得到考虑散射效应的群桩位移。

该模型在 Dobry & Gazetas 模型的基础上, 不仅考虑了入射波的散射效应, 同时可以考虑被动桩振动对主动桩的反馈影响, 适用于分析桩间距较小的群桩动力响应问题。

## 2 控制方程及物理模型求解

### 2.1 土体动力阻抗

基于平面应变模型, 土体在水平振动荷载作用下的控制方程可表述为

$$G^* \nabla^2 U_r + (\lambda^* + G^*) \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{G^*}{r^2} \left( 2 \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) = -\rho_s \omega^2 U_r, \quad (3)$$

$$G^* \nabla^2 U_\theta + (\lambda^* + G^*) \frac{\partial e}{r \partial \theta} - \frac{G^*}{r^2} \left( U_\theta - 2 \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) = -\rho_s \omega^2 U_\theta. \quad (4)$$

式中:  $U_r$ ,  $U_\theta$  分别为土体的径向位移和环向位移;  $\lambda^*$ ,  $G^*$  为桩周土的复拉梅常数,  $\lambda^* = \lambda_s (1 + 2i\beta_s)$ ,  $G^* = G_s (1 + 2i\beta_s)$ ;  $e$  为体积应变;  $\nabla^2$  为拉普拉斯算子。

方程 (3), (4) 进行微分变换  $\frac{\partial(3)}{\partial r} + \frac{(3)}{r} + \frac{\partial(4)}{r \partial \theta}$  得

$$(\lambda^* + 2G^*) \nabla^2 e + \rho_s \omega^2 e = 0. \quad (5)$$

式 (5) 为标准 Helmholtz 方程, 容易得到其解为

$$e = [A_1 K_m(q_1 r) + B_1 I_m(q_1 r)] [C_1 \sin(m\theta) + D_1 \cos(m\theta)]. \quad (6)$$

式中:  $q_1^2 = -\frac{\rho_s \omega^2}{\lambda^* + 2G^*}$ ;  $I_m(\cdot)$  和  $K_m(\cdot)$  分别为修正的  $m$  阶第一类和第二类贝塞尔函数;  $A_1 \sim D_1$  为待定系数。

由无穷远处土体位移和桩土连续性条件可解得  $B_1 = 0$ 。由于体应变  $e$  为  $\theta$  的偶函数, 因此  $C_1 = 0$ ,  $m$

= 1。最终可获得体应变  $e$  的表达式为

$$e = A_1 K_1(q_1 r) \cos \theta \quad (7)$$

考虑到  $e = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta}$ ,  $U_r$  和  $U_\theta$  可表示为

$$U_r = u_r(r) \cos \theta, \quad U_\theta = u_\theta(r) \sin \theta \quad (8)$$

将式 (7), (8) 代入式 (3), (4), 并且将所得两式分别相加减可得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{4}{r^2} + \frac{\rho_s \omega^2}{G^*} \right) (u_r + u_\theta) \\ &= \frac{(\lambda^* + G^*)}{G^*} A_1 q_1 K_2(q_1 r), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\rho_s \omega^2}{G^*} \right) (u_r - u_\theta) \\ &= \frac{(\lambda^* + G^*)}{G^*} A_1 q_1 K_0(q_1 r). \end{aligned} \quad (10)$$

容易得到式 (9), (10) 的解为

$$u_r + u_\theta = \gamma A_1 K_2(q_1 r) + A_2 K_2(q_2 r) \quad (11)$$

$$u_r - u_\theta = \gamma A_1 K_0(q_1 r) + A_3 K_0(q_2 r) \quad (12)$$

式中:  $q_2^2 = -\frac{\rho_s \omega^2}{G^*}$ ;  $\gamma = \frac{(\lambda^* + G^*) q_1}{G^* q_1^2 + \rho_s \omega^2}$ ;  $A_2$  和  $A_3$  为待定系数。

联立式 (11), (12) 和  $e$  的表达式可得

$$A_3 = -A_2 \quad (13)$$

结合式 (11), (12) 可得  $u_r$  和  $u_\theta$  为

$$u_r = 0.5 \gamma A_1 [K_2(q_1 r) + K_0(q_1 r)] + 0.5 A_2 [K_2(q_2 r) - K_0(q_2 r)], \quad (14)$$

$$u_\theta = 0.5 \gamma A_1 [K_2(q_1 r) - K_0(q_1 r)] + 0.5 A_2 [K_2(q_2 r) + K_0(q_2 r)]. \quad (15)$$

将式 (14), (15) 带入桩土连续性条件中可得

$$A_1 = \frac{2 K_2(0.5 q_2 d) W}{\gamma K_2(0.5 q_1 d) K_0(0.5 q_2 d) + \gamma K_2(0.5 q_2 d) K_0(0.5 q_1 d)}, \quad (16)$$

$$A_2 = -\frac{\gamma K_2(0.5 q_1 d)}{K_2(0.5 q_2 d)} A_1 \quad (17)$$

因此,  $U_r$  和  $U_\theta$  可表示为

$$U_r = \eta \left[ \gamma \frac{K_2(q_1 r) + K_0(q_1 r)}{2} + \delta \frac{K_2(q_2 r) - K_0(q_2 r)}{2} \right] W \cos \theta, \quad (18)$$

$$U_\theta = \eta \left[ \gamma \frac{K_2(q_1 r) - K_0(q_1 r)}{2} + \delta \frac{K_2(q_2 r) + K_0(q_2 r)}{2} \right] W \sin \theta. \quad (19)$$

式中:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2 K_2(0.5 q_2 d)}{\gamma [K_2(0.5 q_1 d) K_0(0.5 q_2 d) + K_2(0.5 q_2 d) K_0(0.5 q_1 d)]}, \\ \delta &= -\frac{\gamma K_2(0.5 q_1 d)}{K_2(0.5 q_2 d)}. \end{aligned}$$

结合土体应力-应变关系式可得桩周土应力分布, 进一步桩周土体对桩体的水平抗力可以表示为

$$f = -\frac{\pi d \eta}{2} \left[ (\lambda^* + 2G^*) K_1 \left( q_1 \frac{d}{2} \right) + \delta G^* q_2 K_1 \left( q_2 \frac{d}{2} \right) \right] W. \quad (20)$$

由此 Winkler 系数  $k_z$  可表示为

$$k_z = -\frac{\pi d \eta}{2} \left[ (\lambda^* + 2G^*) K_1 \left( q_1 \frac{d}{2} \right) + \delta G^* q_2 K_1 \left( q_2 \frac{d}{2} \right) \right]. \quad (21)$$

## 2.2 外荷载作用下主动桩动力响应

主动桩在外荷载作用下的控制方程为

$$E_p I_p \frac{d^4 W_{11}}{dz^4} - \rho_p A_p \omega^2 W_{11} = -k_z W_{11}. \quad (22)$$

式中:  $E_p$  为桩体弹性模量;  $I_p$  为惯性矩;  $W_{11}$  为主动桩在外荷载作用下的位移。

式 (22) 的通解为

$$W_{11} = e^{(-1+i)gz} A_{11} + e^{(-1-i)gz} B_{11} + e^{(1-i)gz} C_{11} + e^{(1+i)gz} D_{11}. \quad (23)$$

式中:  $g = \left( \frac{k_z - \rho_p A_p \omega^2}{4E_p I_p} \right)^{0.25}$ ;  $A_{11} \sim D_{11}$  为待定系数。

假定桩底为固定边界、群桩刚性承台水平位移为  $W_0$ , 则可求得桩基位移表达式中的待定系数为

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{(1-i)e^{2gH} \left[ -(1-i)e^{2igH} + e^{(2+2i)gH} + i \right] W_0}{2 \left[ e^{2igH} + e^{2gH} - 4e^{(2+2i)gH} + e^{(2+4i)gH} + e^{(4+2i)gH} \right]}, \\ B_{11} &= \frac{(1+i)e^{(2+2i)gH} \left[ -ie^{2igH} + e^{2gH} + (-1+i) \right] W_0}{2 \left[ e^{2igH} + e^{2gH} - 4e^{(2+2i)gH} + e^{(2+4i)gH} + e^{(4+2i)gH} \right]}, \\ C_{11} &= \frac{(1-i)e^{(2+2i)gH} \left[ ie^{2igH} + e^{2gH} + (-1+i) \right] W_0}{2 \left[ e^{2igH} + e^{2gH} - 4e^{(2+2i)gH} + e^{(2+4i)gH} + e^{(4+2i)gH} \right]}, \\ D_{11} &= \frac{(1+i)e^{2gH} \left[ -(1-i)e^{2igH} + e^{(2+2i)gH} - i \right] W_0}{2 \left[ e^{2igH} + e^{2gH} - 4e^{(2+2i)gH} + e^{(2+4i)gH} + e^{(4+2i)gH} \right]}. \end{aligned}$$

## 2.3 由主动桩振动引起的被动桩位移

主动桩的振动引起被动桩处的土体振动, 根据位移衰减函数, 可得被动桩处的土体位移  $U_{21}$  为

$$U_{21}|_{r=S} = \psi|_{r=S} W_{11}. \quad (24)$$

式中:  $\psi = \frac{\Gamma_1|_{r=S} \cos^2 \theta - \Gamma_2|_{r=S} \sin^2 \theta}{\Gamma_1|_{r=\frac{d}{2}} \cos^2 \theta - \Gamma_2|_{r=\frac{d}{2}} \sin^2 \theta}$ ;

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \gamma \frac{K_2(q_1 r) + K_0(q_1 r)}{2} + \delta \frac{K_2(q_2 r) - K_0(q_2 r)}{2}; \\ \Gamma_2 &= \gamma \frac{K_2(q_1 r) - K_0(q_1 r)}{2} + \delta \frac{K_2(q_2 r) + K_0(q_2 r)}{2}. \end{aligned}$$

被动桩的控制方程可表述为

$$E_p I_p \frac{d^4 W_{21}}{dz^4} - \rho_p A_p \omega^2 W_{21} + k_z (W_{21} - U_{21}|_{r=S}) = 0. \quad (25)$$

方程 (25) 的解为

$$W_{21} = e^{(-1+i)gz} A_{21} + e^{(-1-i)gz} B_{21} + e^{(1-i)gz} C_{21} + e^{(1+i)gz} D_{21} + \frac{k_z \psi z}{8g^3 E_p I_p} \left[ \frac{e^{(-1+i)gz} A_{11}}{1+i} + \frac{e^{(-1-i)gz} B_{11}}{1-i} + \frac{e^{(1-i)gz} C_{11}}{-1-i} + \frac{e^{(1+i)gz} D_{11}}{-1+i} \right]. \quad (26)$$

根据叠加原理, 被动桩的边界条件可表述为

$$W_{21}|_{z=H} = 0, \frac{dW_{21}}{dz}|_{z=H} = 0, \frac{d^2 W_{21}}{dz^2}|_{z=0} = 0, \frac{d^3 W_{21}}{dz^3}|_{z=0} = 0. \quad (27)$$

将式 (26) 代入上述边界条件可得

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ B_{21} \\ C_{21} \\ D_{21} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

式中:  $k_1 \sim k_{16}$  为求解微分方程过程中的常量。

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{k_z \psi}{8g^3 E_p I_p} H \left[ \frac{e^{(-1+i)gH}}{1+i} A_{11} + \frac{e^{(-1-i)gH}}{1-i} B_{11} + \frac{e^{(1-i)gH}}{-1-i} C_{11} + \frac{e^{(1+i)gH}}{-1+i} D_{11} \right], \\ N_2 &= \frac{k_z \psi}{16g^3 E_p I_p} \left\{ A_{11} e^{(-1+i)gH} [(1-i) + 2igH] + B_{11} e^{(-1-i)gH} [(1+i) - 2igH] + C_{11} e^{(1-i)gH} [(-1+i) + 2igH] + D_{11} e^{(1+i)gH} [(-1-i) - 2igH] \right\}, \\ N_3 &= \frac{ik_z \psi}{4g^2 E_p I_p} (A_{11} - B_{11} + C_{11} - D_{11}), \\ N_4 &= \frac{(3+3i)k_z \psi}{8g E_p I_p} (-A_{11} + iB_{11} + C_{11} - iD_{11}). \end{aligned}$$

因此有:

$$[A] = -[R]^{-1} [N_1]. \quad (29)$$

$$\text{式中: } [R] = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \end{bmatrix};$$

$[N_1] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]^T$ ;  $[A_1] = [A_{21} \ B_{21} \ C_{21} \ D_{21}]^T$ 。由被动桩散射效应引起的主动桩位移求解过程与之类似, 由于篇幅限制, 在此不再赘述。

## 2.4 考虑散射效应的桩-桩水平动力相互作用因子

根据 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>定义的“桩-桩”水平动力相互作用因子, 本文建立了考虑散射效应的“桩-桩”水平相互作用因子  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{W_{21}(0)}{W_{11}(0) - W_{12}(0)} = \frac{W_{21}(0)}{(1-\eta)W_{11}(0)}. \quad (30)$$



式中:  $W_{11}(0)$  为主动桩在外荷载作用下的桩顶水平位移;  $W_{21}(0)$  为由主动桩振动引起的被动桩位移;  $W_{12}(0)$  为由被动桩振动引起的主动桩位移;  $\eta$  为散射效应因子, 表示被动桩振动引起的主动桩位移与外荷载作用造成的主动桩位移之比, 以描述散射效应的强弱:

$$\eta = \frac{W_{12}(0)}{W_{11}(0)}. \quad (31)$$

当散射因子  $\eta = 0$  时, 散射效应消失, 式 (30) 可退化为传统的桩-桩水平动力相互作用因子。

## 2.5 考虑被动桩散射效应的群桩动阻抗

群桩中的桩基单元在外界动荷载作用下做主动振动, 同时在临近桩基的影响下做受迫振动, 即群桩中的单桩既是主动桩又是被动桩。由叠加原理可知, 群桩中任意单桩位移均由主动桩位移和被动桩位移两部分构成。此时, 考虑散射效应的主动桩位移为

$$w_1 = \left( 1 - \sum_{j=1, j \neq k}^n \eta_{kj} \right) W_k. \quad (32)$$

式中:  $\eta_{kj}$  下标表示桩基  $j$  对桩基  $k$  的散射效应;  $W_k$  为桩基  $k$  在外荷载作用下的水平位移。

作为被动桩, 其水平位移为

$$w_2 = \sum_{j=1, j \neq k}^n \alpha_{kj} W_j. \quad (33)$$

因此, 桩基  $k$  的水平位移  $D_k$  可表示为

$$D_k = \left( 1 - \sum_{j=1, j \neq k}^n \eta_{kj} \right) W_k + \sum_{j=1, j \neq k}^n \alpha_{kj} W_j. \quad (34)$$

对于  $n$  个桩基单元的群桩而言, 式 (34) 可表示为

$$[D] = [A][Q]. \quad (35)$$

式中:  $[D] = [D_1 \ D_2 \ \cdots \ D_n]^T$ ;  $[Q] = [Q_1 \ Q_2 \ \cdots \ Q_n]^T$ ;

$$[A] = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1 - \sum_{j=1, j \neq 1}^n \eta_{1j} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} & 1 - \sum_{j=1, j \neq 2}^n \eta_{2j} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 1 - \sum_{j=1, j \neq n}^n \eta_{nj} \end{bmatrix};$$

$K$  为单桩水平动力复阻抗;  $Q_k$  为桩基  $k$  的桩顶水平荷载。因此, 桩顶水平荷载可表示为

$$[Q] = [A]^{-1}[D]. \quad (36)$$

群桩桩顶水平荷载可表示为

$$Q_G e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^n Q_k. \quad (37)$$

由于桩体顶部由刚性承台连接, 每根桩体的桩顶水平位移相同, 可用  $W_0$  表示为

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_n = W_0. \quad (38)$$

根据式 (36) ~ (38) 可得群桩水平动力阻抗表为

$$K_G = \frac{Q_G e^{i\omega t}}{W_0}. \quad (39)$$

## 3 算例分析

### 3.1 对比分析

为了验证本文解的正确性, 仅考虑主动桩对被动桩的影响, 即忽略被动桩的散射效应 ( $\eta = 0$ ), 将本文退化解与 Mylonakis<sup>[21]</sup>解进行对比, 如图 2 所示。对比算例中的计算参数参照 Mylonakis<sup>[21]</sup>进行取值: 桩-土弹性模量比  $E_p/E_s = 1000$ , 桩基长径比  $H/d = 20$ , 桩身密度与土体密度比  $\rho_p/\rho_s = 1.5$ , 土体泊松比  $\nu_s = 0.4$ , 土体阻尼比  $\beta_s = 0.05$ , 无量纲频率  $a_0 = \omega d/V_s$ , 其中  $V_s = \sqrt{G_s/\rho_s}$ ,  $G_s$  为土体剪切模量。由图 2 可见, 两解吻合很好, 验证了本文解的合理性。

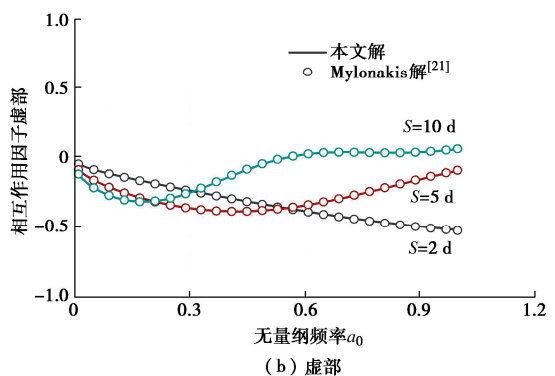
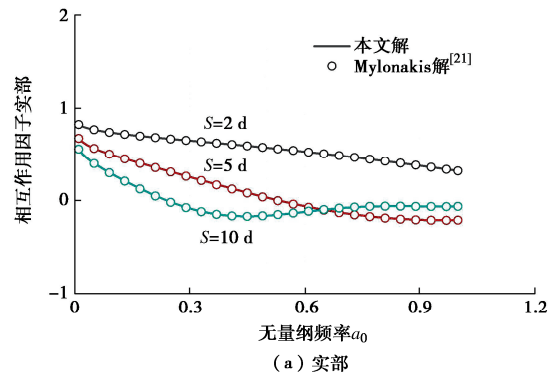


图 2 本文解与 Mylonakis<sup>[21]</sup>解对比

Fig. 2 Comparisons of interaction factors

将本文考虑散射效应的  $2 \times 2$  群桩动力复阻抗与 Mylonakis 和 Gazetas 模型解进行对比, 通过两解之间的差距, 揭示散射效应对群桩水平动力响应的重要影响。若无特殊说明, 算例分析参数如下: 桩长  $H = 20$  m, 桩体弹性模量  $E_p = 25$  GPa, 桩径  $d = 1.0$  m, 桩体质量密度  $\rho_p = 2500$  kg/m<sup>3</sup>, 土体剪切模量  $G_s = 10$  MPa, 土体密度  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>, 阻尼比  $\beta_s = 0.05$ , 泊松比  $\nu = 0.4$ ,  $f = \omega/2\pi$ , 荷载角度  $\theta = 0$ , 土体弹性模量  $E_s = 2G_s (1 + \nu) = 28$  MPa。

图 3 给出了不同桩间距工况下, 本文解与 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>修正解的对比结果。由图可见, 散射效应随桩间距的增大逐渐减弱, 当桩间距  $S=2\text{ m}$  时, 本文群桩刚度在图示频域内始终大于 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>模型解, 说明在该工况下, 被动桩的散射效应会增加群桩刚度。当桩间距增加到 10 倍桩径时, 即  $S=10\text{ m}$ , 散射效应减弱, 本文解与 Mylonakis 等模型解差异减小。

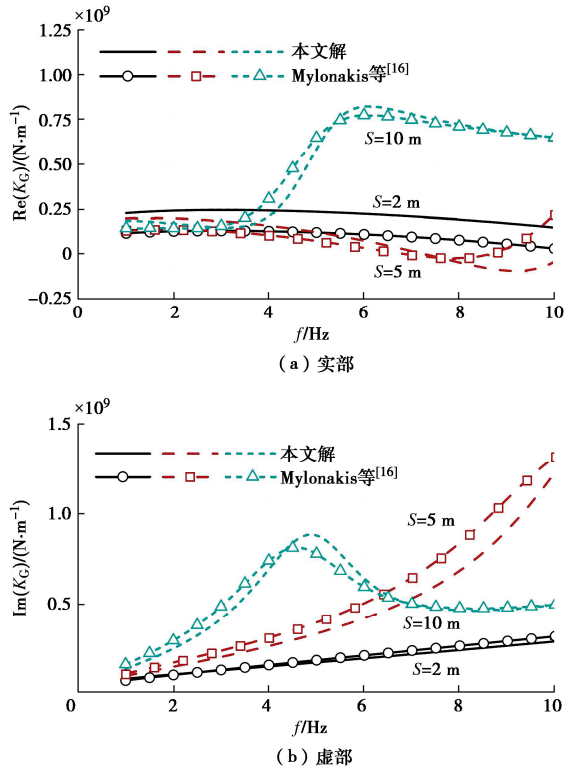


图 3 不同桩间距下本文解与修正后的 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>解得  $2\times 2$  群桩动力复阻抗对比图

Fig. 3 Comparisons of horizontal impedance of  $2\times 2$  pile group

图 4 给出了  $S=2\text{ m}$  时不同桩径工况下, 本文解与 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>的修正解对比。由图可见, 当桩径  $d=0.5\text{ m}$  时, 散射效应较弱, 两解差距较小; 随着桩径的增大, 散射效应逐渐增强, 本文解与 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>修正解的差距逐渐增大, 但两解随频率的变化规律并未改变。群桩动力复阻抗随桩径的变化规律表明: 散射效应对桩径较为敏感, 增加桩径会显著增强群桩的散射效应。

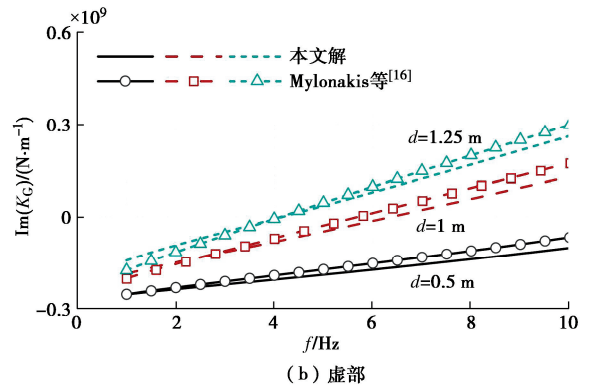
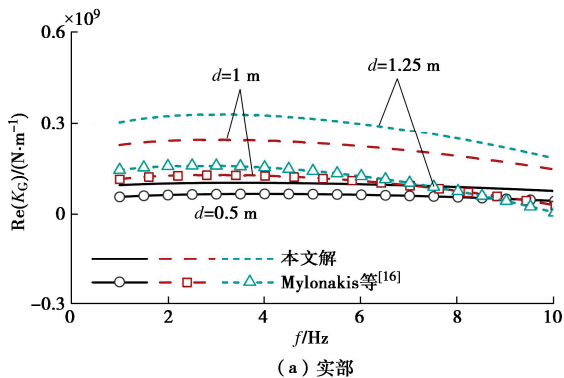


图 4 不同桩径下本文解与修正后的 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>解得  $2\times 2$  群桩动力复阻抗对比图

Fig. 4 Comparisons of horizontal impedance of  $2\times 2$  pile group

图 5 别给出了不同桩基弹性模量工况下, 本文解与 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>修正解的对比结果。由图可见, 在群桩动力响应分析中, 若忽略被动桩的散射效应, 将显著低估群桩动刚度, 高估动阻尼。同时注意到, 两解的差异随桩基弹性模量的变化而产生微小变化, 说明散射效应对桩基弹性模量并不敏感。

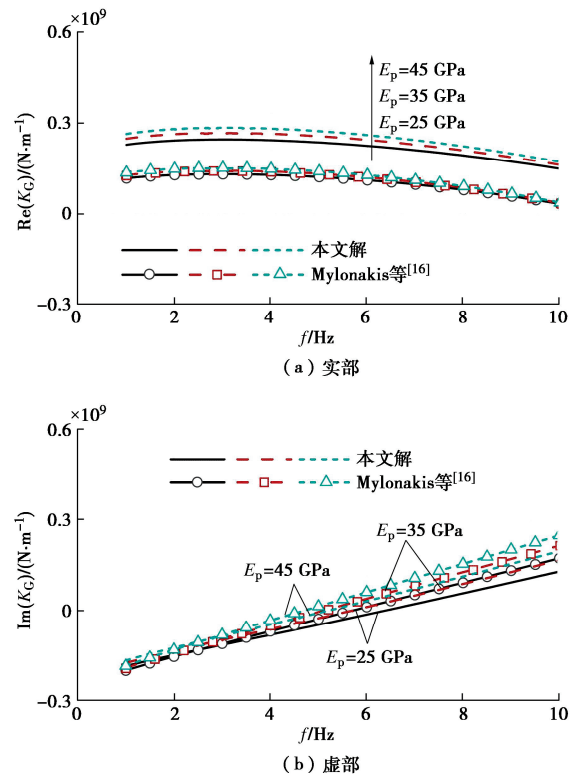


图 5 不同桩体弹性模量下本文解与修正后的 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>解得  $2\times 2$  群桩动力复阻抗对比图

Fig. 5 Comparisons of horizontal impedance of  $2\times 2$  pile group

图 6 给出了不同土体剪切模量工况下, 本文解与 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>修正解的对比结果。由图可见, 增加土体剪切模量, 将显著增加群桩水平动刚度, 但对群桩阻尼影响不大; 同时, 本文解与 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>修正解的差异亦随着桩周土剪切模量的增加而增加, 散射效应愈发明显。

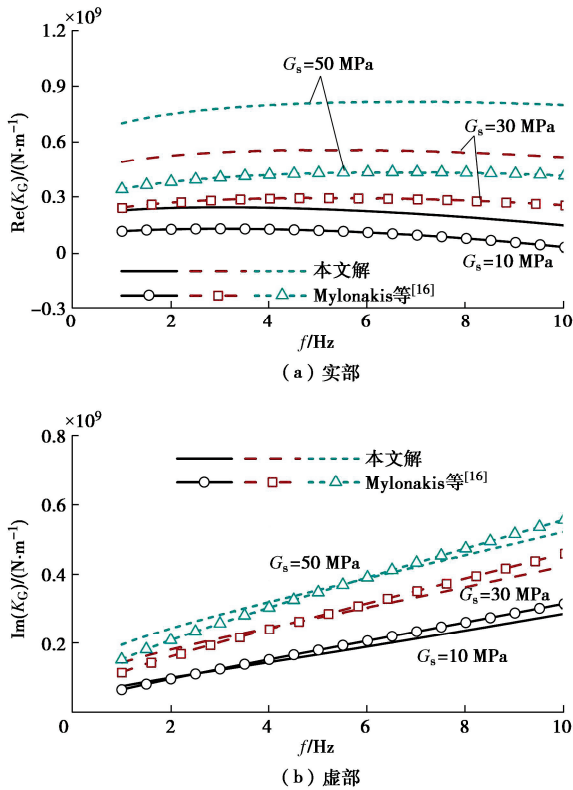


图6 不同土体剪切模量下本文解与修正后的 Mylonakis 等<sup>[16]</sup>解得 2×2 群桩动力复阻抗对比图

Fig. 6 Comparisons of horizontal impedance of 2×2 pile group

### 3.2 参数分析

上节通过群桩水平动力复阻抗性地阐明了散射效应对群桩动力响应的影响规律,为进一步探究散射效应的变化规律,本节给出了不同工况下,水平散射因子  $\eta$  随频率的变化曲线。

图7给出桩间距变化时散射因子随频率的变化规律,其中实部表示被动桩对主动桩的作用强度,虚部表示两桩作用过程中的能量耗散。总体而言,散射因子实部随桩间距增大而逐渐降低,虚部随桩间距增大而增大。当桩间距  $S = 2$  m 时,散射因子实部和虚部有随频率增加而逐渐减小的趋势;散射因子共振频率随桩间距的增加而逐渐降低,实部与虚部在频率范围内呈现一定程度的波动性。同时注意到对于  $S = 10$  m 工况,当频率  $f > 4$  Hz 时,散射因子实部趋近于 0,此时散射效应可忽略不计;通过试算发现,对于  $S = 5$  m 和  $S = 2$  m 工况,当频率超过某一值时,散射因子实部均趋近于 0,这表明高频振动将会削弱散射效应。

图8给出了当荷载角度改变时,散射因子随频率的变化规律,其中荷载角度  $\theta$  为荷载方向与两桩中心连线的夹角。从图中可以看出,当荷载方向与双桩排布方向一致时,散射因子实部在  $f < 9$  Hz 频率范围内为正值,说明此时散射效应限制主动桩的位移,对承载有利;当  $f > 9$  Hz 时,散射效应将放大主动桩的位移,对承载不利。随着荷载角度的增加,散射效应减

弱,且呈现出与  $\theta = 0$  工况相同的变化规律,即散射效应对承载的有利作用随着频率的增加而逐渐降低,并在高频时表现出对承载不利的规律。值得注意的是,随着荷载角度  $\theta$  的逐渐增大,散射效应承载有利与承载不利的转折频率逐渐减小,这表明水平荷载作用时散射效应的作用效果并不单一。

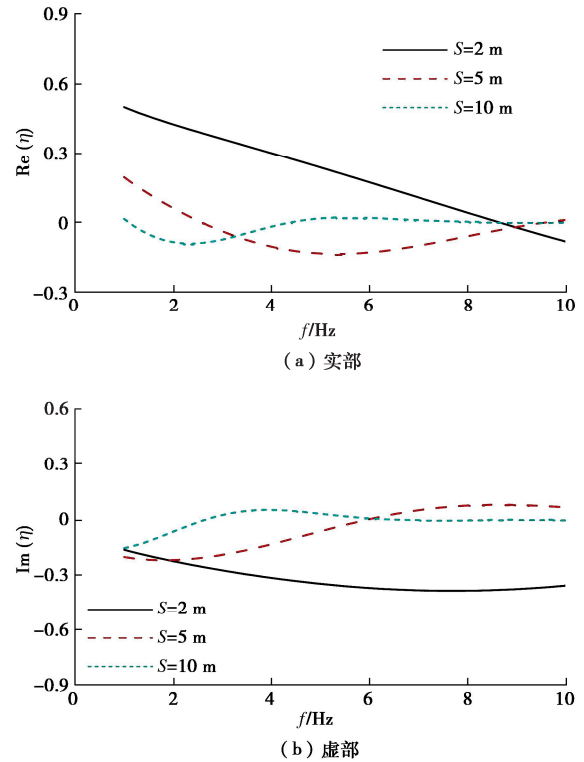


图7 桩间距对散射因子的影响

Fig. 7 Variations of scattering factor with pile spacings

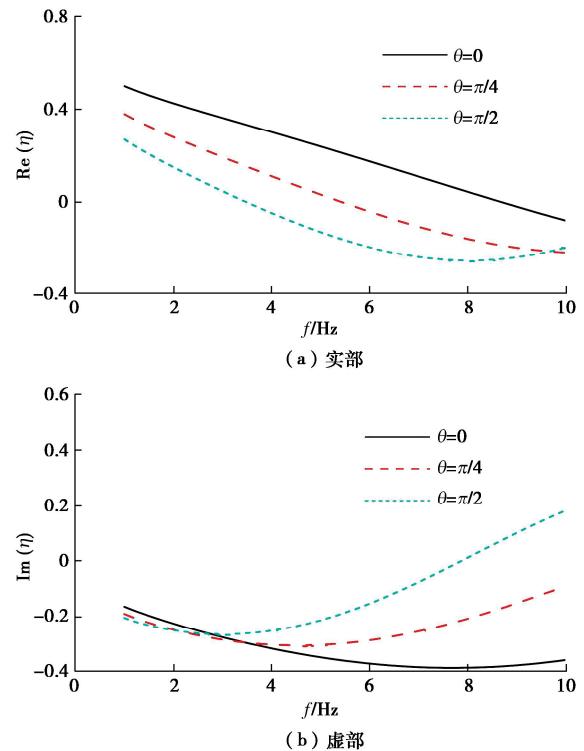


图8 荷载角度对散射因子的影响

Fig. 8 Variations of scattering factor with load angles

图 9 给出了桩径改变时, 水平荷载作用下散射因子随荷载频率的变化曲线。由图可见, 散射效应随着桩基半径的增加而逐渐增强; 随着荷载激振频率的增加, 散射效应呈现出减弱的趋势, 且由承载有利逐渐过渡到对承载不利, 承载有利与承载不利的转折频率随桩基半径的增大而逐渐增大。

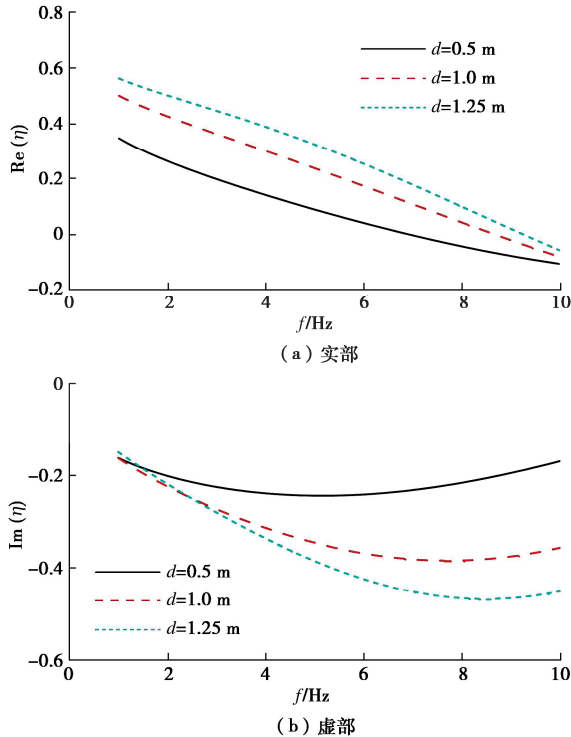


图 9 桩径对散射因子的影响

Fig. 9 Variations of impedance with pile diameters

图 10 给出了土体剪切模量改变时, 散射因子随频率的变化规律。散射效应对土体剪切模量较为敏感, 土体剪切模量的增加将会明显增强散射效应; 散射效应随激振频率的增加而逐渐减弱, 且由承载有利逐渐过渡到对承载不利, 承载有利与承载不利的转折频率随桩周土剪切模量的增大而逐渐增大。

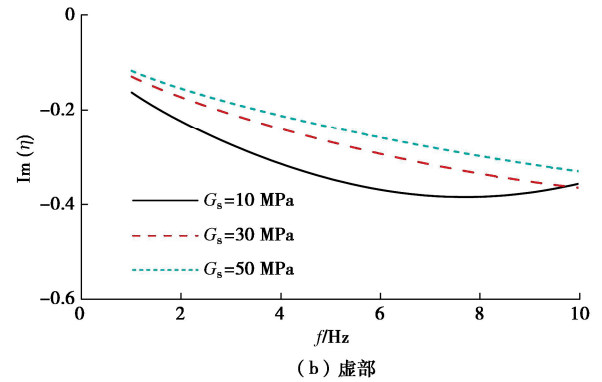
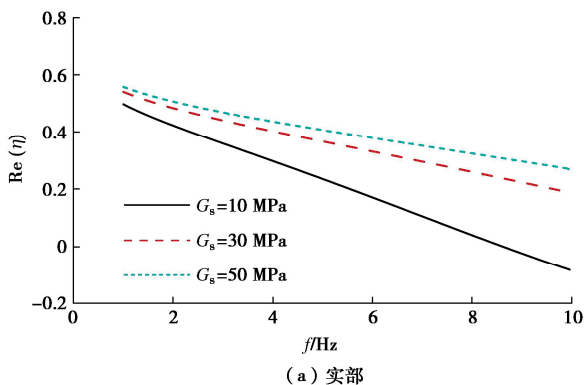


图 10 土体剪切模量对散射因子影响

Fig. 10 Variations of impedance for various shear moduli

## 4 结 论

本文基于平面应变模型, 通过引入散射效应因子对群桩水平动力相互作用因子进行修正, 建立了考虑被动桩散射效应的群桩水平动力响应理论, 补充完善了小间距群桩的理论计算方法。基于所建立的解析模型, 对比分析了散射效应对群桩动力响应的影响规律, 探究了“桩-土”系统关键参数对散射因子的影响, 研究得到 3 点结论。

(1) 在进行小间距或大直径群桩动力响应分析时, 不可忽略被动桩的散射效应, 该效应随着桩间距的增大或桩基直径的减小而逐渐减弱; 散射效应承载有利与承载不利的转折频率随桩间距增大而减小、随桩基半径增大而增大。

(2) 荷载作用角度的变化对散射效应实部影响较小, 而对虚部影响较大; 水平荷载作用时散射效应的作用效果并不单一, 随着荷载角度的增大, 散射效应承载有利与承载不利的转折频率逐渐减小。

(3) 散射效应对桩基模量并不敏感, 而对土模量较为敏感; 承载有利与承载不利的转折频率随桩周土剪切模量的增大而增大。

**利益冲突声明/Conflict of Interests:** 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

**作者贡献/Authors' Contributions:** 郑长杰提出研究理念和设计研究, 分析解释研究数据; 崔亦秦获取研究数据; 丁选明对重要文章内容进行关键性修改; 栾鲁宝撰写文章, 对最终提交版本进行确认。ZHENG Changjie proposed the research concept and design, participated in the research, and analyzed and interpreted the research data. CUI Yiqin collected the research data. DING Xuanming made critical revisions to the key content of the article. LUAN Lubao drafted the article and confirmed the final submitted version.



## 参考文献:

- [1] KUHLEMEYER R L. Static and dynamic laterally loaded floating piles[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1979, **105**(2): 289-304.
- [2] 高广运, 王 非, 赵 宏, 等. 分层地基中群桩的动力响应及减振分析[J]. *岩土工程学报*, 2013, **35**(增刊 2): 1108-1112. (GAO Guangyun, WANG Fei, ZHAO Hong, et al. Dynamic response and vibration reduction analysis of pile groups in layered foundation[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(S2): 1108-1112. (in Chinese))
- [3] AI Z Y, LIU C L. Vertical vibration of a pile in transversely isotropic multilayered soils[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, **357**: 145-155.
- [4] 冯世进, 王 雷. 锤击荷载作用下大直径钢管群桩的动力特性分析[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(1): 129-137. (FENG Shijin, WANG Lei. Dynamic response analysis of a large-diameter steel tube pile group subjected to hammering loads[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(1): 129-137. (in Chinese))
- [5] LI Y, AI Z Y. Transient analysis of a fixed-head pile group in multi-layered transversely isotropic media due to horizontal loadings[J]. *Computers and Geotechnics*, 2020, **127**: 103772.
- [6] POULOS H G. Analysis of the settlement of pile groups[J]. *Géotechnique*, 1968, **18**(4): 449-471.
- [7] 郑长杰, 崔亦秦, 丁选明, 等. 竖向动荷载作用下端承型群桩动力相互作用解析解[J]. *岩土工程学报*, 2022, **44**(12): 2187-2195. (ZHENG Changjie, CUI Yiqin, DING Xuanming, et al. Analytical solution for dynamic interaction of end-bearing pile groups subjected to vertical dynamic loads[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(12): 2187-2195. (in Chinese))
- [8] RADHIMA J, KANELLOPOULOS K, GAZETAS G. Static and dynamic lateral non-linear pile-soil-pile interaction[J]. *Géotechnique*, 2022, **72**(7): 642-657.
- [9] 栾鲁宝. 群桩动力相互作用因子与振动响应解析方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2019. (LUAN Lubao. Study on Analytical Method of Dynamic Interaction Factor and Vibration Response of Pile Groups[D]. Chongqing: Chongqing University, 2019. (in Chinese))
- [10] 崔春义, 辛 宇, 许成顺, 等. Pasternak 层状地基中群桩水平动力响应解析解答[J]. *岩土工程学报*, 2023, **45**(5): 893-902. (CUI Chunyi, XIN Yu, XU Chengshun, et al. Analytical solutions for horizontal dynamic response for pile groups based on Pasternak model[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2023, **45**(5): 893-902. (in Chinese))
- [11] KAYNIA A M. Dynamic Stiffness and Seismic Response of Pile Groups[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1982.
- [12] DOBRY R, GAZETAS G. Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups[J]. *Géotechnique*, 1988, **38**(4): 557-574.
- [13] 刘林超, 闫启方, 闫 盼. 考虑三维波动的饱和土中管桩群桩的水平振动研究[J]. *岩土力学*, 2017, **38**(10): 2817-2825. (LIU Linchao, YAN Qifang, YAN Pan. Horizontal vibration of pipe pile groups in saturated soil considering three-dimensional wave effects[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, **38**(10): 2817-2825. (in Chinese))
- [14] ZHENG C J, CUI Y Q, KOURETZIS G, et al. Scattered wave effects on the vertical dynamic response of pile groups embedded in layered soil[J]. *Computers and Geotechnics*, 2023, **158**: 105361.
- [15] MAKRIS N, GAZETAS G. Dynamic pile-soil-pile interaction. part II: lateral and seismic response[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1992, **21**(2): 145-162.
- [16] MYLONAKIS G, GAZETAS G. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soil[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1999, **125**(1): 16-25.
- [17] ZHENG C J, MYLONAKIS G, KOURETZIS G, et al. Kinematic seismic response of end-bearing piles to S-waves[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2022, **163**: 107547.
- [18] ZHENG C J, MYLONAKIS G, KOURETZIS G. Inertial and kinematic response of laterally loaded piles: sensitivity of elastodynamic continuum solutions to key assumptions[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2024, **178**: 108485.
- [19] LUAN L B, ZHENG C J, KOURETZIS G, et al. Dynamic analysis of pile groups subjected to horizontal loads considering coupled pile-to-pile interaction[J]. *Computers and Geotechnics*, 2020, **117**: 103276.
- [20] LUAN L B, DING X M, CAO G W, et al. Development of a coupled pile-to-pile interaction model for the dynamic analysis of pile groups subjected to vertical loads[J]. *Acta Geotechnica*, 2020, **15**(11): 3261-3269.
- [21] MYLONAKIS G. Contributions to Static and Seismic Analysis of Piles and Pile-supported Bridge Piers[D]. Buffalo: State University of New York at Buffalo, 1995.