

DOI: 10.11779/CJGE201906006

深基坑内支撑支点水平刚度系数的解析解计算方法研究

金亚兵¹, 刘 动²

(1. 深圳市地质局, 广东 深圳 518023; 2. 深圳市岩土综合勘察设计有限公司, 广东 深圳 518172)

摘 要: 排桩(墙)加内支撑结构是深基坑支护常采用的支护结构, 内支撑支点水平刚度系数是支护结构设计计算的重要参数之一。基于受压杆件的应力应变线弹性理论和变形协调假定, 对水平对撑(简称对撑)、水平对撑带八字撑(简称八字撑)、水平斜撑(简称斜撑)、水平角撑(简称角撑)、竖向斜撑、水平环形撑(简称环撑)、带放射撑的单环环形撑(简称单环撑)以及带放射撑的多环环形撑(简称多环撑)等 8 种基本内支撑结构的支点水平刚度系数进行了解析解的推导, 提出了 8 种基本内支撑结构的支点水平刚度系数的计算公式, 利用算例对其中常见的四类内支撑结构的支点水平刚度系数进行了演算, 并采用有限单元法进行了复核, 结果表明, 解析解与有限元法计算的结果相符程度较好, 解析解可作为支护结构单元计算的初始输入数据。补充完善了现行国家行业标准《建筑基坑支护技术规范》(JGJ120—2012)仅提供了水平对撑的支点水平刚度系数计算公式的不足, 可供深基坑工程设计、施工人员参考。
关键词: 深基坑; 内支撑; 支点; 水平刚度系数; 解析解计算方法

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)06-1031-09

作者简介: 金亚兵(1965—), 男, 湖北黄梅人, 博士, 教授级高级工程师, 主要从事岩土工程设计和研究工作。E-mail: jinyabing25@sina.com。

Analytical methods for horizontal stiffness coefficient at pivots of inner support structures in deep foundation pits

JIN Ya-bing¹, LIU Dong²

(1. Shenzhen Geology Bureau, Shenzhen 518023, China; 2. Shenzhen Comprehensive Geotechnical Engineering Investigation & Design Co., Ltd., Shenzhen 518172, China)

Abstract: The row piles with inner support structures are often used for retaining and protection of deep foundation pits, and the horizontal stiffness coefficient at the pivots of inner support structures is one of the most important design parameters of retaining and protection structures. In view of the stress-strain linear elasticity theory and deformation coordination hypothesis for compressed bars, the analytical solutions of horizontal stiffness coefficient at pivots of eight basic types of inner support structures face-to-face support, splayed support, inclined support, angle support, vertically inclined support, ideal-ring support, single-ring support and polycyclic-ring support are derived. The formulae for calculating the horizontal stiffness coefficient of the above eight structures are put forward. The horizontal stiffness coefficients of four commonly-used structures are calculated through examples, and the finite element method is used for checking. The results show that the analytical solutions are in good agreement with those calculated by the finite element method, and they can be used as the initial input data for calculation of support structures. This research improves the deficiency that the “Technical specification for retaining and protection of building foundation excavations JGJ120—2012” only affords the formula for calculating the horizontal stiffness coefficient at pivots of horizontal face-to-face support, and the research results can be used as a reference for the design and construction personnel in deep foundation pit engineering.

Key words: deep foundation pit; inner support; pivot; horizontal stiffness coefficient; analytical method

0 引 言

深基坑支护体系通常由支护桩(墙)和内支撑结构(以下简称撑)或锚拉结构(以下简称锚)共同组成, 在进行支护体系设计计算时, 撑(或锚)支点水平刚度系数的计算是支护体系设计的重要环节。自国

家行业标准《建筑基坑支护技术规程》^[1](以下简称《规程》)发布以来, 许多专家学者及工程设计人员都

基金项目: 广东省深圳市地质局地质工程院士工作站专项经费资助项目(2013B090400025)

收稿日期: 2018-03-01

对撑（或锚）支点水平刚度系数的计算进行了探索。杨敏等^[2]讨论了单独的桩顶圈梁、内支撑体系和外拉锚杆的水平刚度系数的计算方法。陈书申^[3]根据基坑工程实例支护桩桩顶水平位移差异大的现象，对规范将支撑刚度简化为常数提出了质疑，明确指出支撑支点与支点之间的刚度系数不同，提出对大型、重要的工程或对变形、沉降控制要求高的工程应分别采用不同的刚度系数进行计算。刘小丽等^[4]对4种典型型式的平面内支撑结构的等效刚度系数数值计算影响因素进行了分析，得出的一些建设意见对基坑数值分析有一定的积极作用。宋英伟^[5]提出了对撑和斜撑的水平刚度系数计算公式，拓展了规范适用范围。陈焘等^[6]提出了一种异形基坑桁架支撑体系等效刚度的简便算法，为复杂、宽大异形平面基坑计算刚度系数开启了新的思路。刘汉凯^[7]提出了对撑、斜撑、角撑以及竖向斜撑的水平刚度系数通用计算公式，并用有限元法进行了验证。何一韬等^[8]采用倒梁法分析了腰梁的受力及变形，引入变形协调条件对倒梁法进行反力局部调整，经有限元模型对比分析，得出挡土结构将土压力直接传递给支撑，腰梁的作用是调节支撑受力，支撑刚度不应考虑腰梁跨中的挠度的结论。曾律弦等^[9]将支护桩和竖向立柱桩作为空间桩单元，将冠梁（或腰梁）、竖向立柱、放射撑、角撑作为空间梁单元，将环形撑作为空间曲梁单元，建立整体坐标系下的刚度矩阵、节点位移矩阵和节点荷载矩阵的平衡方程，通过编制有限元程序求解平衡方程得到各节点的内力与变形，经对环形撑抗弯刚度变化对支撑体系受力性状分析，得出环形撑的抗弯刚度有合理的上限值结论。李昀等^[10]结合圆形水池工程无扶壁无圈梁无支撑且一次开挖14 m深的大型圆形地下连续墙围护结构进行了3种不同的计算方法的计算，得出三维 m 法结果偏于安全，其坑外主动区土压力按静止土压力模拟，计算可能偏于保守；三维建模时地连墙采用板单元、顶部冠梁采用梁单元、地连墙底部按固定约束，工程设计计算比较复杂；二维环形墙等效弹簧刚度法考虑了圆形结构的三维效应，但将地连墙沿深度方向等效为一个一个的弹簧，力学概念不够清晰，仅可作为工程设计初步估算之用。吴西臣等^[11]以处于武汉长江隧道安全保护影响范围内的某大型深基坑支护工程为例，通过单环撑与同心圆双环撑的内力、位移等对比分析表明，采用同心圆双环撑能有效分担单环撑轴力，避免了局部应力集中；而且，由于双环撑结构刚度更大，可有效控制基坑变形，这些结论，提出了多环撑水平刚度系数解析解计算的指导思想。冯晓腊等^[12]利用有限元法对武汉某近似圆形深基坑进行了单环、双环、三环等环形撑和对撑、矩形撑留圆形出土口等多种支

撑方案的数值计算和分析，得出了多环撑轴力、弯矩和剪力分布特征，为探讨环形撑水平刚度系数解析解的建立提供了理论参考。王春艳等^[13]根据刚度分配原则，引入受力分配系数，对圆环支撑体系水平刚度系数的计算进行了解析解的推导，提出了圆环支撑体系水平刚度系数的简易计算方法，给出了解析式的修正式，为探讨环形撑水平刚度系数的精确解析解开拓了思路。李松等^[14]引入法向弹簧与切向弹簧形成组合弹簧边界，采用有限单元法对基坑平面角撑结构进行了计算分析，结果表明切向弹簧对内支撑位移起控制作用，只有考虑了切向弹簧的作用，才能得到准确的内支撑刚度和内力。张有祥等^[15]结合工程案例讨论了桩锚支护结构锚杆刚度系数的合理计算方法。Gordon等^[16]采用有限单元法分析了影响支护结构变形的主要因素，提出了支护结构变形计算的半理论半经验公式。

综上所述，内支撑为对撑型式的支点水平刚度系数的解析解计算方法已经取得共识，非对撑型式的支点水平刚度系数解析解计算方法至今未取得共识。所以，深入开展内支撑支点水平刚度系数解析解计算方法的研究是非常必要的。论文将内支撑划分为非环形撑和环形撑两大类八小类，其中，非环形撑包括对撑、八字撑、斜撑、角撑、竖向斜撑等五小类，环形撑包括环撑、单环撑和多环撑等三小类，除对撑外其他七小类支撑基本型式见图1~7。本文从支点水平刚度系数的基本概念出发，进行了各种内支撑支点水平刚度系数解析解的公式推导，并对4个算例进行了演算和有限单元法的复核计算。

1 非环形撑支点水平刚度系数计算

1.1 对撑支点水平刚度系数计算

《规程》2012版第4.1.10条规定：对支撑式支挡结构的弹性支点刚度系数宜通过对内支撑结构整体进行线弹性结构分析得出的支点力与水平位移的关系确定。对水平对撑，当支撑冠（腰）梁的挠度不计，计算宽度内弹性支点刚度系数 K_T (kN/m)可按《规程》2012版公式(4.1.10)计算，该公式为

$$K_T = \frac{\alpha_R E A b_a}{\lambda l_0 S} \quad (1)$$

式(1)中， λ 为支撑不动点调整系数：支撑两对边基坑的土性、深度、周边荷载等条件相近，且分层对称开挖时，取 $\lambda=0.5$ ；支撑两对边基坑的土性、深度、周边荷载等条件或开挖时间有差异时，对土压力较大或先开挖的一侧，取 $\lambda=0.5\sim 1.0$ ，且差异大时取大值，反之取小值；对土压力较小或后开挖的一侧，取 $(1-\lambda)$ ；当基坑一侧取 $\lambda=1$ 时，基坑另一侧应按固

定支座考虑; 对竖向斜撑构件, 取 $\lambda=1$ 。 α_R 为支撑松弛系数, 对混凝土支撑和预加轴力的钢支撑取 $\alpha_R=1.0$, 对不预加轴力的钢支撑, 取 $\alpha_R=0.8\sim 1.0$ 。 E 为支撑材料的弹性模量 (kPa), A 为支撑截面积 (m^2), l_0 为受压支撑构件的长度 (m), S 为支撑水平间距 (m), $S=S_1+S_2$, S_1, S_2 分别为支撑两侧水平计算间距, b_a 为桩距或地连墙幅宽 (m)。 由于角撑根本不存在不动点, 笔者建议“支撑不动点调整系数 λ ” 定义为“零变形点调整系数 λ ”。 因篇幅所限, 不作式 (1) 的推导。

1.2 斜撑支点水平刚度系数计算

对如图 1 所示的斜撑, 假设斜撑两端冠 (腰) 梁受到相等线荷载 q (kN/m) 作用, 斜撑长度为 l_0 , 斜撑抗压刚度为 E_1A_1 (kN), 斜撑与冠 (腰) 梁夹角为 θ , O 点为零变形点, λ 为零变形点调整系数, 第 i 根斜撑支点水平刚度系数计算过程如下:

斜撑轴力

$$N_i \sin \theta_i = q(S_{i,1} + S_{i,2}) = qS_i,$$

$$N_i = \frac{qS_i}{\sin \theta_i};$$

斜撑压缩变形

$$\lambda \Delta l = \frac{N_i \lambda l_0}{E_1 A_1} \cdot \frac{1}{\sin \theta_i} = \frac{q S_i \lambda l_0}{\sin^2 \theta_i \cdot E_1 A_1}。$$

于是, 斜撑支点水平刚度系数为

$$K_{Ti} = \frac{q S_i}{\lambda \Delta l} = \frac{q S_i E_1 A_1 \sin^2 \theta_i}{q S_i \lambda l_0}$$

$$= \frac{E_1 A_1}{\lambda l_0} \sin^2 \theta_i。$$
 (2)

如果支挡结构为排桩且桩距为 b_a , 或支挡结构为地连墙且单幅墙宽为 b_a , 则 K_{Ti} 应为

$$K_{Ti} = \frac{E_1 A_1 b_a}{\lambda l_0 S_i} \cdot \sin^2 \theta_i。$$
 (3)

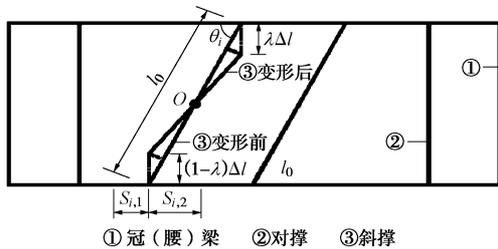


图 1 水平斜撑支点刚度系数计算模型示意图

Fig. 1 Sketch of model for stiffness coefficient of horizontal inclined support

1.3 角撑支点水平刚度系数计算

对如图 2 所示的角撑, 假设角撑相邻两边冠 (腰) 梁受到相等线荷载 q 作用, 角撑长度为 l_0 , 角撑抗压刚度 E_1A_1 , 角撑与冠 (腰) 梁夹角为 θ , O 点为零变

形点, λ 为零变形点调整系数, 第 i 根角撑支点水平刚度系数计算过程如下:

角撑轴力

$$N_i \sin \theta_i = q(S_{i,1} + S_{i,2}) = qS_i,$$

$$N_i = \frac{qS_i}{\sin \theta_i};$$

角撑压缩变形

$$\lambda \Delta l = \frac{N_i \lambda l_0}{E_1 A_1 \sin \theta_i} = \frac{q S_i \lambda l_0}{\sin^2 \theta_i \cdot E_1 A_1}。$$

于是, 角撑支点水平刚度系数

$$K_{Ti} = \frac{q S_i}{\lambda \Delta l} = \frac{E_1 A_1}{\lambda l_0} \cdot \sin^2 \theta_i。$$
 (4)

对支挡结构为排桩且桩距为 b_a , 或支挡结构为地连墙且单幅墙宽为 b_a , 则 K_{Ti} 应为

$$K_{Ti} = \frac{E_1 A_1 b_a}{\lambda l_0 S_i} \cdot \sin^2 \theta_i。$$
 (5)

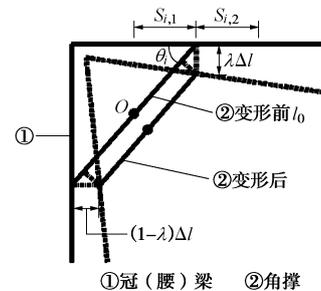


图 2 水平角撑支点刚度系数计算模型示意图

Fig. 2 Sketch of model for stiffness coefficient of horizontal angle support

1.4 竖向斜撑支点水平刚度系数计算

对如图 3 所示的竖向斜撑, 假设竖向斜撑与支挡结构夹角为 θ , 受到水平支点力为 N_i , 斜撑长度为 l_0 , 斜撑抗压刚度 E_1A_1 (kN), O 点为零变形点, 这时 $\lambda=1.0$, 第 i 根竖向斜撑支点水平刚度系数计算过程如下:

竖向斜撑轴力

$$N_{li} \sin \theta_i = N_i,$$

$$N_{li} = \frac{N_i}{\sin \theta_i};$$

竖向斜撑压缩变形

$$\Delta l = \frac{N_{li}}{E_1 A_1} \cdot \frac{l_0}{\sin \theta_i}。$$

于是, 竖向斜撑支点水平刚度系数

$$K_{Ti} = \frac{N_i}{\Delta l} = \frac{N_i \sin \theta_i}{\frac{N_{li} l_0}{E_1 A_1 \sin \theta_i}} = \frac{E_1 A_1}{l_0} \cdot \sin^2 \theta_i。$$
 (6)

S_i 为第 i 根竖向斜撑的水平间距。对支挡结构为排桩且桩距为 b_a , 或支挡结构为地连墙且单幅墙宽为 b_a ,

则 K_{Ti} 应为

$$K_{Ti} = \frac{E_1 A_1 b_a}{l_0 S_i} \cdot \sin^2 \theta_i \quad (7)$$

如果图 3 中基坑底反力支座为可位移的竖向桩，竖向斜撑水平位移 Δl 还应加上竖向桩的桩顶水平位移。竖向桩的桩顶水平位移计算方法参见《建筑桩基技术规范》(JGJ94)，这里不再赘述。

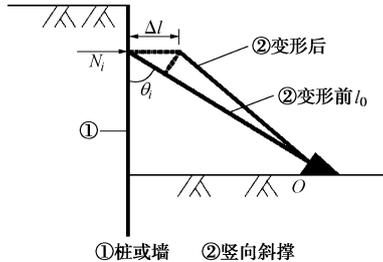


图 3 竖向斜撑支点刚度系数计算模型示意图

Fig. 3 Sketch of model for stiffness coefficient of vertical inclined support

观察式 (1)、(3)、(5)、(7)，对对撑、斜撑、角撑和竖向斜撑，可以用一个通用的公式来计算支点的水平刚度系数，只需在式 (1) 后乘上 $\sin^2 \theta$ 即可，对撑 θ 取 90° ，斜撑和角撑 θ 取锐夹角，竖向斜撑 θ 取竖向夹角。

1.5 八字撑支点水平刚度系数计算

对如图 4 所示的八字撑，计算主撑（对撑）水平刚度系数时，应考虑八字撑的作用。假定八字撑长 b_i ，两端固支，一端距主撑轴线距离 a_i ，断面抗压刚度 $E_b A_b$ (kN)，则八字撑支点水平刚度系数计算过程如下：

第一步，计算八字撑的压缩变形。假设主撑和八字撑共同承受 qS_i 的作用力，八字撑与冠(腰)梁的夹角为 θ_i ，主撑在八字撑段承受 $\alpha_1 qS_i$ 的作用力，八字撑承受 $\alpha_2 qS_i$ 的作用力， $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ，则八字撑段主撑压缩变形量 Δl_{ab} 和八字撑沿垂直冠(腰)梁方向的压缩变形量 Δl_{ab8} 计算公式分别如下：

$$\Delta l_{ab} = \frac{\alpha_1 q S_i l_{ab}}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_{ab8} = \frac{0.5 \alpha_2 q S_i l_{ab}}{\sin^3 \theta_i \cdot E_b A_b}$$

根据变形协调条件， $\Delta l_{ab} = \Delta l_{ab8}$ ，则有

$$\alpha_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + 2 \sin^3 \theta_i E_b A_b} \quad (8)$$

$$\alpha_2 = \frac{2 \sin^3 \theta_i E_b A_b}{E_1 A_1 + 2 \sin^3 \theta_i E_b A_b} \quad (9)$$

第二步，计算主撑（对撑）非八字段压缩变形 Δl_1 ：

$$\Delta l_1 = \frac{q S_i (\lambda l_0 - l_{ab})}{E_1 A_1} \quad (10)$$

第三步，计算主撑（对撑）总压缩变形量 Δl 和八

字撑支点水平刚度系数 K_{Ti} ：

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_{ab} = \frac{q S_i (\lambda l_0 - l_{ab})}{E_1 A_1} + \frac{q S_i l_{ab}}{E_1 A_1 + 2 \sin^3 \theta_i E_b A_b} \quad (11)$$

$$K_{Ti} = \frac{q S_i}{\Delta l} = \left[\frac{\lambda l_0 - l_{ab}}{E_1 A_1} + \frac{l_{ab}}{E_1 A_1 + 2 \sin^3 \theta_i E_b A_b} \right]^{-1} \quad (12)$$

对支撑结构为排桩且桩距为 b_a ，或支撑结构为地连墙且单幅墙宽为 b_a ，则 K_{Ti} 应为

$$K_{Ti} = \left[\frac{\lambda l_0 - l_{ab}}{E_1 A_1} + \frac{l_{ab}}{E_1 A_1 + 2 \sin^3 \theta_i \cdot E_b A_b} \right]^{-1} \cdot \frac{b_a}{S_i} \quad (13)$$

算例一：假设某基坑宽度 $l_0 = 30$ m，对撑水平间距 $S_i = 12$ m，对撑砼强度等级 C25，对撑断面尺寸宽×高为 1.0 m×1.2 m，支撑结构为间距 1.8 m 的钻孔桩，对撑两侧荷载相等。利用式 (1) 计算得到对撑支点水平刚度系数： $K_{Ti} = 336$ MN/m。如果在对撑两端各加一个八字撑，八字撑砼强度等级亦为 C25，八字撑断面尺寸宽×高为 0.8 m×1.0 m，八字撑长度为 5 m，一端距对撑轴线 3 m。于是， $a_i = 3$ m， $b_i = 5$ m， $l_{ab} = 4$ m， $\sin \theta_i = 0.8$ 。于是，利用式 (13) 计算得到加设了八字撑后，支点水平刚度系数： $K_{Ti} = 377$ MN/m。该值比纯对撑的支点水平刚度系数增加了约 12.2%。

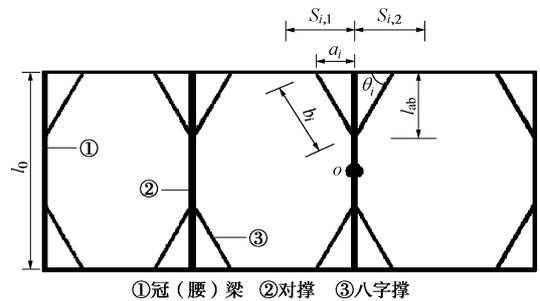


图 4 带八字撑的水平对撑支点刚度系数计算模型示意图

Fig. 4 Sketch of model for stiffness coefficient of horizontal face-to-face splayed support

2 环形撑支点水平刚度系数计算

2.1 理想圆形基坑环形撑支点水平刚度系数计算

对如图 5 所示的理想圆形基坑，支撑结构由圆环形布置的支护桩（墙）和紧贴支护桩内侧的环形撑构成。支护桩初始中心线距基坑圆心点距离为 R ，环形撑初始中心线距基坑圆心点距离为 r ；支护桩环向间距为 b_a ，环形撑受到线荷载 q 作用；环形撑径向压缩变形后半径为 r' ；环形撑的轴向抗压刚度为 $E_h A_h$ ，其中环形撑宽×高为 $b_h \cdot h_h$ 。

为分析环形撑的受力，沿基坑圆心切一断面，分析其中一半环形撑的受力。半环形撑在均布荷载 q 和两端轴力 N 、切向力 T 和弯矩 M 作用下保持平衡，根

据 $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_M = 0$ 的平衡条件, 得到 $T=0$, $M=0$, 及

$$N = q(r + 0.5b_h) \quad (14)$$

环形撑在环向轴力作用下产生的环向压缩变形为 $\Delta h = \frac{q(r + 0.5b_h)2\pi r}{E_h A_h} = 2\pi r - 2\pi r' = 2\pi(r - r')$ 。 (15)

因此, 环形撑的径向压缩变形 $\Delta r = r - r'$ 为

$$\Delta r = \frac{q(r + 0.5b_h)r}{E_h A_h} \quad (16)$$

于是, 在单位宽度荷载作用下, 环形撑任意支点水平刚度系数 K_T 为

$$K_T = \frac{q \cdot 1.0}{q(r + 0.5b_h)r} = \frac{E_h A_h}{r(r + 0.5b_h)} \quad (17)$$

一般 b_h 比 r 小很多, 可取 $r + 0.5b_h \approx r$, 那么对支挡结构间距为 b_a 的支护桩, 式 (17) 可写为

$$K_T = \frac{E_h A_h}{r^2} \quad (18)$$

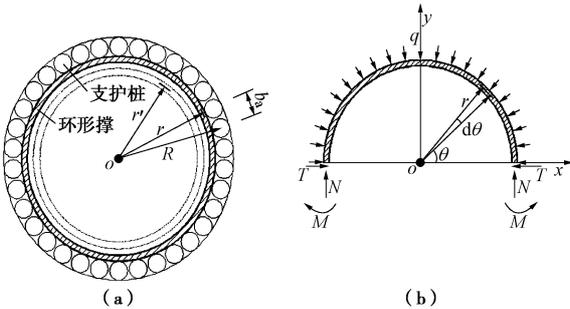


图 5 理想环形撑水平刚度系数计算模型示意图

Fig. 5 Sketch of model for stiffness coefficient of ideal

horizontal-ring support

算例二: 假定一圆形基坑环形撑半径为 30 m, 砼强度等级为 C30, 横断面尺寸宽×高为 1.2 m×1.0 m, 支护桩间距 1.5 m, 则环形撑支点水平刚度系数 $K_T=60$ MN/m, 单位宽度支点水平刚度系数 $K_T=40$ MN/m。

2.2 理想圆形基坑放射撑加环形撑支点水平刚度系数计算

图 5 中的环形撑是直接紧贴支护桩布置的, 如果在支护桩和环形撑之间均匀设置一圈 n 个等长的放射撑, 则成为放射撑加环形撑支撑结构。放射撑长度为 L 、断面尺寸宽×高为 $b_l \cdot h_l$, 轴向抗压刚度为 $E_l A_l$; 环形撑的初始半径为 r , 压缩后半径为 r' , 环形撑轴向抗压刚度为 $E_h A_h$, 高×宽为 $b_h \cdot h_h$; 支护桩内侧形成的圆形基坑半径为 R , 支护桩作用在冠梁或环形腰梁上的线荷载为 q , 冠梁或环形腰梁高度为 H ; 支护桩间距为 b_a 。那么, 环形撑支点水平刚度系数计算过程如下:

(1) 首先, 计算环形撑受到的均布荷载 q_h 。根据荷载相等原理: $2\pi Rq = 2\pi r q_h$, 计算式得到 $q_h = \frac{qR}{r}$ 。

于是, 环形撑的径向压缩变形 Δr 为

$$\Delta r = \frac{q_h r^2}{E_h A_h} = \frac{qRr}{E_h A_h} \quad (19)$$

(2) 其次, 计算放射撑轴向压缩变形 Δl 。对于均匀分布 n 个放射撑的任意一根放射撑, 其受到的平均轴力 \bar{N} 应满足等式 $n\bar{N} = 2\pi Rq$, 于是单根放射撑平均轴力 \bar{N} 应为

$$\bar{N} = \frac{2\pi Rq}{n} \quad (20)$$

于是, 单根放射撑的压缩变形 Δl 为

$$\Delta l = \frac{\bar{N}L}{E_l A_l} = \frac{2\pi RqL}{nE_l A_l} \quad (21)$$

支点压缩变形 Δ 应为环形撑的径向压缩变形 Δr 与放射撑的轴向压缩变形 Δl 之和, 即

$$\Delta = \Delta r + \Delta l = \frac{qRr}{E_h A_h} + \frac{2\pi RqL}{nE_l A_l} \quad (22)$$

于是, 放射撑加环形撑支点水平刚度系数 K_T 为

$$K_T = \frac{\bar{N}}{\Delta} = \frac{2\pi}{\frac{nr}{E_h A_h} + \frac{2\pi L}{E_l A_l}} \quad (23)$$

对间距为 b_a 的支护桩, K_T 应为

$$K_T = \frac{nb_a}{\frac{nrR}{E_h A_h} + \frac{2\pi RL}{E_l A_l}} \quad (24)$$

算例三: 假定一圆形基坑支护桩内侧形成的圆形基坑半径为 30 m; 支护桩间距 1.5 m, 桩顶冠梁和内侧腰梁宽×高为 1.2 m×1.0 m; 环形撑初始半径 25 m, 环形撑断面尺寸宽×高为 1.2 m×1.0 m; 沿基坑内侧均匀布置 30 根放射撑, 放射撑长度为 5 m, 放射撑断面尺寸宽×高为 1.0 m×1.0 m, 环形撑和放射撑砼强度等级均为 C30。根据式 (24) 计算得到支点水平刚度系数 $K_T=68.6$ MN/m, 单位宽度水平刚度系数为 45.7 MN/m。如果将桩顶冠梁和内侧腰梁作为一个环形撑, 并按照后述 2.4 节计算方法, 则得到支点水平刚度系数 $K_T=72.6$ MN/m, 单位宽度水平刚度系数为 48.4 MN/m。计算的环形撑径向压缩变形与放射撑轴向压缩变形比 $\Delta r / \Delta l = 19.99$, 该结果表明, 环形撑的径向压缩变形在支挡结构变形中起主导作用, 而且环形撑的截面宽度和平面半径起重要作用, 环形撑截面宽度越大, 平面半径越小, 环形撑的径向压缩变形越小。

2.3 放射撑+单环撑支点水平刚度系数计算

常见基坑平面形状多为近似方形、长方形, 工程上对不太深的基坑大多采用如图 6 所示的放射撑加单环撑的内支撑型式, 在支挡结构顶部设置冠梁, 在支挡结构内侧设置腰梁。对此类内支撑结构可借鉴圆形基坑环形撑的分析方法, 并按下面步骤进行。

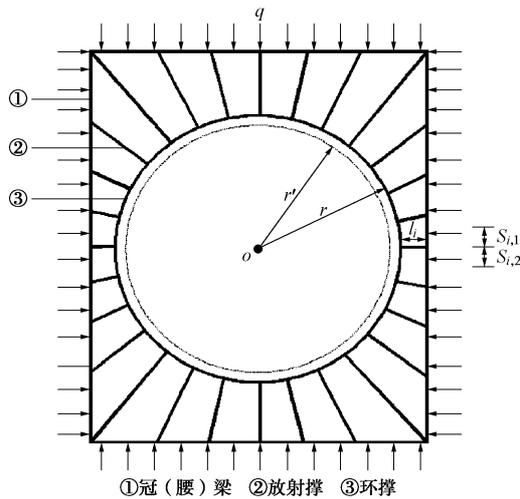


图6 单环撑支点刚度系数计算模型示意图

Fig. 6 Sketch of model for stiffness coefficient of single-ring support

第一步, 根据基坑平面形状及尺寸、开挖深度、土质条件, 以及土方挖运需求, 确定一个合适的环形撑半径 r 及断面尺寸 $b_h \cdot h_h$ (宽 \times 高); 尽量利用对称原则, 将环形撑中心布置在基坑平面对称中心位置, 尽量按照等间距或等角度原则从环形撑中心向四周均匀布置放射撑; 放射撑竖向高度宜与环形撑等高, 放射撑宽度根据计算确定, 首先确定第一根垂直基坑边的放射撑宽度, 其余各撑宽度根据变形协调条件计算确定。

第二步, 计算第一根放射撑的轴向压缩变形 Δl_1 。假设第一根放射撑承受线荷载 q 的宽度 S_1 、长度 l_1 , 断面高度 h_h 、宽度 b_{11} 。于是, 第一根放射撑的轴向压缩变形为

$$\Delta l_1 = \frac{q S_1 l_1}{\sin \theta_1 E_1 h_h b_{11}} \quad (25)$$

第三步, 计算第 i 根放射撑的轴向压缩变形 Δl_i 。假设第 i 根放射撑承受线均布荷载 q 的宽度为 S_i 、长度 l_i , 断面高度 h_h 、宽度为 b_{1i} , 与基坑边线夹角为 θ_i (锐角)。则, 第 i 根放射撑的轴向压缩变形为

$$\Delta l_i = \frac{q S_i l_i}{\sin \theta_i E_i h_h b_{1i}} \quad (26)$$

为确保环形撑中心点不移动, 每一根放射撑应具有相等的轴向压缩变形, 即 $\Delta l_i \equiv \Delta l_1$, 则有

$$S_1 \cdot l_1 \cdot b_{1i} \cdot \sin \theta_i = S_i \cdot l_i \cdot b_{11} \cdot \sin \theta_1 \quad (27)$$

根据式 (27) 可以确定第 i 根放射撑的宽度为 b_{1i} , 为避免 b_{1i} 过大, 对如图 6 所示形状的基坑, 可在 4 个坑角处减小 S_i 布置或加角撑以降低放射撑的轴力。

第四步, 假设整个支撑平面布置的放射撑有 n 根, 则环形撑共受到放射撑作用力为 N_i 之合力, 把它按线均布荷载考虑, 则作用在环形撑上的均布荷载 q_h 为

$$q_h \cong \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{2\pi r} = \frac{q \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{2\pi r} \quad (28)$$

环形撑径向压缩变形 Δr :

$$\Delta r = \frac{q_h r^2}{E_h A_h} = \frac{q r \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{2\pi E_h A_h} \quad (29)$$

第五步, 假设支挡结构为支护桩, 桩间距为 b_a , 计算得到第 i 根放射撑支点水平刚度系数 K_{Ti} :

$$K_{Ti} = \left[\frac{r \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{2\pi S_i E_h A_h} + \frac{l_i}{E_i A_i \sin \theta_i} \right]^{-1} \sin \theta_i \cdot \frac{b_a}{S_i} \quad (30)$$

2.4 放射撑+多环撑支点水平刚度系数计算

工程实践中, 为控制深、大基坑的变形和提高支撑体系的稳定性, 经常采用双环甚至多环环形撑并辅以放射撑的支撑方式。下面以图 7 为例推导三环撑的支点水平刚度系数的计算过程。

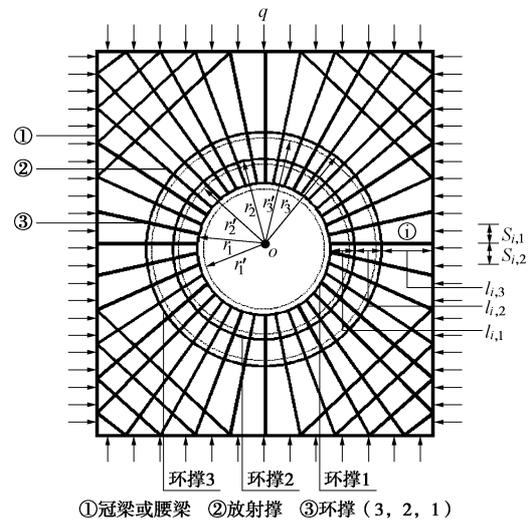


图7 多环撑支点刚度系数计算模型示意图

Fig. 7 Sketch of model for stiffness coefficient of polycyclic-ring supports

首先, 假设三环撑具有同一圆心, 利用基坑边界形状, 尽量使圆心在纵横对称轴交点处, 并假定放射撑位于圆心与冠(腰)梁支点连线上, 尽量以等角度或等距离原则布置。其次, 假定支撑体系不发生平动, 即基坑左右侧和上下侧对称支点位移相等; 作用于支挡结构上的土压力 q 通过冠(腰)梁传递给放射撑上的轴力之和按 $\sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n \frac{q S_i}{\sin \theta_i}$ 计算, 式中各物理量意义同前述。再次, 假定放射撑轴力之和以线荷载 q_0 (kN/m) 作用在最外环即第三环环形撑环边上, q_0 按等式 $2\pi r_0 q_0 = \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n \frac{q S_i}{\sin \theta_i}$ 计算, 即 $q_0 =$

$\frac{q}{2\pi r_0} \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}$, r_0 为环形撑圆心至最外侧环形撑外环边距离。最后假定: ①3 个环形撑的内径从小到大为 r_1, r_2, r_3 , 截面面积分别为 $A_{h1} (b_{h1} \cdot b_{h1})$ 、 A_{h2}

($b_{h_2} \cdot b_{h_2}$)、 A_{h_3} ($b_{h_3} \cdot b_{h_3}$), 弹性模量分别为 E_{h_1} , E_{h_2} , E_{h_3} ; ② n 个放射撑的长度由三段构成, 分别 $l_{i,1}$, $l_{i,2}$, $l_{i,3}$, 三段放射撑截面面积相同, 分别为 A_{li} ($b_{li} \cdot h_{li}$), 弹性模量分别为 E_{li} 。为设计计算和施工方便, 选取支撑所有构件砼强度等级和高度相等, 选取放射撑 $l_{i,1} \equiv l_{i,2}$ 。下面进行 3 个环形撑和 n 个放射撑的设计计算。

将内环即环 1 受到的放射撑轴向压力合力按线均布荷载 q_1 考虑, 中间环即环 2 受到的内外放射撑轴向压力合力按线均布荷载 q_2 考虑, 最外环即环 3 受到的内外放射撑轴向压力合力按线均布荷载 q_3 考虑, 则有作用在 3 个环形撑上轴向压力合力与总土压力相等, 即有如下等式:

$$2\pi r_1 q_1 + 2\pi r_2 q_2 + 2\pi r_3 q_3 = 2\pi r_0 q_0 = q \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i} \quad (31)$$

3 个环形撑环向压缩变形 Δh_1 , Δh_2 , Δh_3 分别为

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_1 &= \frac{2\pi q_1 r_1^2}{E_{h1} A_{h1}} \\ \Delta h_2 &= \frac{2\pi q_2 r_2^2}{E_{h2} A_{h2}} \\ \Delta h_3 &= \frac{2\pi q_3 r_3^2}{E_{h3} A_{h3}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

3 个环形撑环向压缩变形协调条件为

$$\frac{\Delta h_1}{r_1} = \frac{\Delta h_2}{r_2} = \frac{\Delta h_3}{r_3} \quad (33)$$

3 个环形撑径向压缩变形 Δr_1 , Δr_2 , Δr_3 分别为

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_1 &= \frac{q_1 r_1^2}{E_{h1} A_{h1}} \\ \Delta r_2 &= \frac{q_2 r_2^2}{E_{h2} A_{h2}} \\ \Delta r_3 &= \frac{q_3 r_3^2}{E_{h3} A_{h3}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

根据式 (31) ~ (33) 可求得

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{q \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{\left(1 + \frac{E_{h2} A_{h2}}{E_{h1} A_{h1}} + \frac{E_{h3} A_{h3}}{E_{h1} A_{h1}}\right) 2\pi r_1} \\ q_2 &= \frac{q \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{\left(1 + \frac{E_{h1} A_{h1}}{E_{h2} A_{h2}} + \frac{E_{h3} A_{h3}}{E_{h2} A_{h2}}\right) 2\pi r_2} \\ q_3 &= \frac{q \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{\left(1 + \frac{E_{h1} A_{h1}}{E_{h3} A_{h3}} + \frac{E_{h2} A_{h2}}{E_{h3} A_{h3}}\right) 2\pi r_3} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

最外环即第三环环形撑的径向压缩变形 Δr_3 :

$$\Delta r_3 = \frac{r_3 q \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{2\pi \sum_{j=1}^3 E_{hj} A_{hj}} \quad (36)$$

于是, 多环撑第 i 根放射撑支点水平位移 $\Delta_i = \Delta r_3 + \Delta l_i$, 多环撑第 i 支点水平刚度系数 K_{Ti} 为

$$K_{Ti} = \frac{\sin \theta_i}{\frac{r_3 \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{2\pi \sum_{j=1}^3 E_{hj} A_{hj}} + \frac{l_{i,3}}{E_{li} A_{li} \sin \theta_i}} \quad (37)$$

对支挡结构桩间距为 b_a 的支护桩, K_{Ti} 应为

$$K_{Ti} = \left[\frac{r_3 \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\sin \theta_i}}{2\pi \sum_{j=1}^3 E_{hj} A_{hj}} + \frac{l_{i,3}}{E_{li} A_{li} \sin \theta_i} \right]^{-1} \sin \theta_i \cdot \frac{b_a}{S_i} \quad (38)$$

算例四: 如图 7 所示, 假设某基坑长 100 m, 宽 80 m; 采用冠梁截面尺寸宽 \times 高为 1.2 m \times 1.2 m; 采用半径依次为 35 m、30 m、25 m 的三环环撑加放射撑结构, 环形撑断面尺寸宽 \times 高均为 1.8 m \times 1.2 m, 放射撑高为 1.2 m, 宽度根据计算确定。环形撑圆形中心布置在基坑平面中心处, 环形撑、放射撑、冠梁砼等级为 C30。竖向支挡结构为支护桩, 桩径 1.2 m, 桩距 1.5 m, 桩身砼强度为 C35。

按照放射撑设置原则, 根据式 (27), 设定第一根放射撑沿环形撑圆形中心向基坑冠梁或腰梁垂直布置, $\theta_1=90^\circ$, 长 $l_{1,3}=4.1$ m, $S_1=8.0$ m, 截面宽 \times 高 = 1.0 m \times 1.2 m; 第二根放射撑距第一根放射撑距离 8 m, $\theta_2=78.7^\circ$, $l_{2,3}=4.9$ m, 计算截面宽 \times 高为 1.2 m \times 1.2 m, $S_2=8.0$ m; 第三根放射撑距第二根放射撑距离 8 m, $\theta_3=68.2^\circ$, 因计算宽度偏大, 在距第三根撑支点 4 m 处加设角撑, 计算截面宽 \times 高为 1.2 m \times 1.2 m, $S_3=6.0$ m; 依次进行到第六根放射撑。从第七根放射撑开始已进入基坑另一侧, 重新按另一侧放射撑压缩变形相等原则设置放射撑, 这里列出第七根、第十一根放射撑设计参数: 第七根 $\theta_7=51.3^\circ$, $l_{7,3}=23.5$ m, 宽 \times 高为 1.2 m \times 1.2 m, $S_7=4$ m; 第十一根 $\theta_{11}=90^\circ$, $l_{11,3}=14.1$ m, 宽 \times 高为 1.2 m \times 1.2 m, $S_{11}=8$ m。其它各撑按对称原则布撑共布置 40 根放射撑。根据式 (38) 计算得到各支点水平刚度系数见表 1, 为减少篇幅只列出了算例四的 1/4 数据, 其他支点水平刚度系数可根据对称性获取。

2.5 各算例的水平刚度系数解析解与数值解的对比

为比较本文推导的典型内支撑结构支点水平刚度系数解析解与有限元数值解的差异程度, 采用了 Midas GTS NX 软件对 4 个算例进行了数值模拟, 提

取出其内支撑结构的水平位移, 换算出各算例支撑支点的单位宽度水平刚度系数数值解。数值模拟中, 支护桩用 2D 板单元模拟 (板厚度根据桩径和间距采用等效刚度原则确定), 在开挖面上通过析取功能析取出该板; 冠 (腰) 梁采用采用 1D 线单元模拟, 通过选取开挖面上相应位置的线生成 1D 线单元; 冠 (腰) 梁线单元和支护桩板单元在节点耦合。图 8 左图是算例四三个环内支撑结构水平位移云图; 图 8 右图是假定取消算例四的第一、第二个环撑时内支撑结构水平位移云图。各算例支点单位宽度水平刚度系数数值解与解析解的结果见表 1。从表 1 可以看出, 利用本文推导的解析解公式计算的刚度系数和数值解的值相对误差一般在 5% 以内, 少数在 10% 以内, 两者相符程度较好; 单环撑内支撑结构水平位移约为三环撑的 2.2 倍, 刚度系数约为 0.45 倍。

表 1 4 个算例水平刚度系数 K_{Ti} 解析解与数值解对比表

Table 1 Comparison of horizontal stiffness coefficient K_{Ti} of four examples (analytical and numerical solutions)

计算的支点	单位宽度水平 刚度系数解析解 $K_{Ti}/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	单位宽度水平 刚度系数数值解 $K_{Ti}/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	相对误差/%
算例一 (八字撑)	209.4	229.2	-8.6
算例二 (圆环撑)	40.0	38.9	2.8
算例三 (圆环撑+放射撑)	45.7	46.1	-0.9
算例四 (支点 1) (三环撑)	139.4	133.6	4.4
算例四 (支点 2)	136.4	130.1	4.8
算例四 (支点 3)	126.9	123.6	2.7
算例四 (支点 4)	116.2	112.0	3.8
算例四 (支点 5)	96.7	95.1	1.7
算例四 (支点 6)	96.4	97.8	-1.4
算例四 (支点 7)	76.3	82.6	-7.6
算例四 (支点 8)	108.9	111.2	-2.1
算例四 (支点 9)	120.7	125.0	-3.4
算例四 (支点 10)	129.8	134.7	-3.6
算例四 (支点 11)	112.9	116.4	-3.0

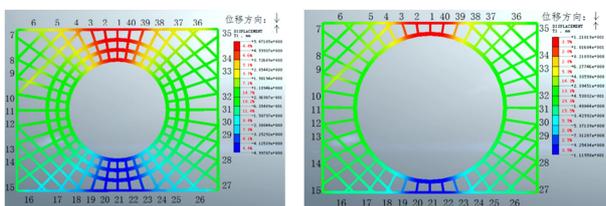


图 8 算例四支点水平位移计算结果

Fig. 8 Calculated results of horizontal displacements at pivots of example No. 4

3 结 论

(1) 深基坑内支撑构件是以轴向受压为主的弹性变形杆件, 只要设计合理, 内支撑的轴向压缩变形解析解和刚度系数解析解是可以简化求算的。

(2) 论文提出的内支撑支点水平刚度系数的解析解与比较成熟和较高精度的有限元法计算数值对比, 结果表明两种求解结果相符程度较好, 解析解可作为深基坑支护结构单元计算的初始输入数据。

(3) 推导环形撑水平压缩和水平刚度系数过程中, 提出了环形撑不产生平动的前提条件和设计控制方法, 即放射撑等压缩变形控制设计计算方法, 工程算例说明这样进行环形撑平动控制是可行的。

(4) 多环撑比单环撑, 能提高内支撑支挡能力是因为多环撑明显提高了内支撑刚度系数。内支撑支护结构设计时可根据基坑周边环境对变形控制的要求, 按变形控制条件进行环形撑的环数设计。对圆形基坑, 计算支点刚度系数时, 应考虑支护桩冠 (腰) 梁的支撑作用, 否则, 计算的环撑径向压缩变形偏大, 计算的刚度系数偏小。

参考文献:

- [1] JGJ120—2012 建筑基坑支护技术规程[S]. 2012. (JGJ 120—2012 Technical specification for retaining and protection of building foundation excavations[S]. 2012. (in Chinese))
- [2] 杨 敏, 熊巨华. 建筑基坑支撑结构体系水平刚度系数的计算[J]. 岩土工程技术, 1999(1): 13 - 16. (YANG Min, XIONG Ju-hua. Calculation of horizontal stiffness coefficient support structure in building foundation pit[J]. Geotechnical Engineering Technique, 1999(1): 13 - 16. (in Chinese))
- [3] 陈书申. 围护桩顶部位移特征及内支撑刚度公式辨异[J]. 福州大学学报 (自然科学版), 2001, 29(5): 93 - 96. (CHEN Shu-shen. Features of displacement at the top of enclosure piles and analysis of the stiffness formula of bracing system[J]. Journal of Fuzhou University(Natural Science), 2001, 29(5): 93 - 96. (in Chinese))
- [4] 刘小丽, 陈 芳, 贾永刚. 深基坑内支撑等效刚度数值计算影响因素分析[J]. 中国海洋大学学报, 2009, 39(2): 275 - 280. (LIU Xiao-li, CHEN Fang, JIA Yong-gang. Analysis on influencing factors for computing the equivalent stiffness of the interior bracing of deep excavation by numerical method[J]. Periodical of Ocean University of China, 2009, 39(2): 275 - 280. (in Chinese))
- [5] 宋英伟. 基坑内支撑水平刚度计算的探讨[J]. 山西建筑, 2011, 37(18): 68 - 69. (SONG Ying-wei. Inquiry on horizontal bearing stiffness in the foundation pit[J]. Shanxi Architecture, 2011, 37(18): 68 - 69. (in Chinese))
- [6] 陈 焘, 张茜珍, 周顺华, 等. 异形基坑支撑体系刚度及受力分析[J]. 地下空间与工程学报, 2011, 7(增刊 1): 1384 - 1389. (CHEN Tao, ZHANG Xi-zhen, ZHOU Shun-hua, et al.

- Stiffness and stress analysis of irregular foundation pit support system[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2011, 7(S1): 1384 - 1389. (in Chinese))
- [7] 刘汉凯. 基坑内支撑刚度计算方法辨析[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2013, 31(1): 73 - 76. (LIU Han-kai. Calculating methods for the stiffness of the interior bracing of foundation excavation[J]. Journal of Jiamusi University (Natural Science Edition), 2013, 31(1): 73 - 76. (in Chinese))
- [8] 何一韬, 谭 准, 高云龙. 地铁车站基坑内支撑刚度的探讨[J]. 铁道建筑, 2014(3): 68 - 70. (HE Yi-tao, TAN Zhun, GAO Yun-long. Discussion on the stiffness of the support in the foundation pit of a subway station[J]. Railway Engineering, 2014(3): 68 - 70. (in Chinese))
- [9] 曾律弦, 潘 泓, 肖四喜. 深基坑环梁支护结构的性状分析[J]. 四川建筑科学研究, 2009, 35(3): 115 - 118. (ZENG Lu-xian, PAN Hong, XIAO Si-xi. Analysis on behavior of ring beam retaining structures of deep foundation pit[J]. Sichuan Building Science, 2009, 35(3): 115 - 118. (in Chinese))
- [10] 李 昀, 李华梅, 吴 昊, 等. 大型圆形深基坑设计分析研究[J]. 地下空间与工程学报, 2011, 7(5): 938 - 944. (LI Yun, LI Hua-mei, WU Hao, et al. Study on design method of great cylindrical foundation pits[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2011, 7(5): 938 - 944. (in Chinese))
- [11] 吴西臣, 徐杨青. 180 同心圆双环内支撑在复杂环境下大型深基坑中的支护[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(增刊 1): 72 - 76. (WU Xi-chen, XU Yang-qing. Application of concentric circular strut system in large deep excavations under complex environment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(S1): 72 - 76. (in Chinese))
- [12] 冯晓腊, 冯 恒, 劳骥民, 等. 圆环支撑在武汉地区基坑工程中的应用研究[J]. 施工技术, 2016, 45(增刊): 29 - 32. (FENG Xiao-la, FENG Heng, LAO Ji-ming, et al. Application of annular inner support in deep foundation excavation in Wuhan[J]. Construction Technology, 2016, 45(S0): 29 - 32. (in Chinese))
- [13] 王春艳, 张方涛, 马 郢, 等. 基坑圆环支撑体系水平刚度系数计算方法研究[J]. 岩土力学, 2017, 38(3): 840 - 846. (WANG Chun-yan, ZHANG Fang-tao, MA Yun, et al. A method for calculating horizontal stiffness coefficient of ring supporting system for foundation pit[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(3): 840 - 846. (in Chinese))
- [14] 李 松, 马 郢, 李受祉, 等. 组合弹性边界在基坑内支撑平面杆系有限元分析中的应用[J]. 岩土力学, 2017, 34(10): 95 - 101. (LI Song, MA Yu, LI Shou-zhi, et al. Application of combined elastic boundary in finite element analysis of plane bar support system on foundation pit[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 34(10): 95 - 101. (in Chinese))
- [15] 张有祥, 周宏磊. 关于基坑规程中围护结构变形计算的探讨[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2018, 33(3): 39 - 46. (ZHANG You-xiang, ZHOU Hong-lei. Deformation calculation study about elastic fulcrum method of foundation pit[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology (Natural Science Edition), 2018, 33(3): 39 - 46. (in Chinese))
- [16] GORDON T C, JUANG C H, EVAN C L, et al. Simplified model for wall deflection and ground-surface settlement caused by braced excavation in clays[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(6): 731 - 747.