

各向异性粘性土蠕变的微观力学模型^{*}

施 斌 王宝军

宁文务

(南京大学地球科学系, 210093)

(地矿部宁波工程勘察院, 315103)

文 摘 根据土蠕变的速率过程理论、塑性滑动理论和虚功原理, 从土的微观结构的角度, 建立了各向异性粘性土蠕变的微观力学模型, 给出了模型的数值解, 首次确定了粘粒定向分布函数。以淮阴三种粘性土为研究对象, 用上述模型对其试验结果进行了拟合。拟合结果表明所建立的模型是一个比较合理和有效的模型。

关键词 粘性土, 各向异性, 蠕变, 微观力学模型, 拟合。

1 引 言

纵观土力学 70 余年的发展历史, 岩土本构关系均是建立在宏观现象学基础上的, 从土的微观结构角度来建立土的本构关系, 只是近十几年的事。这种模型有两类: 一类是由 Batdorf 和 Budiansky(1949) 创立的经典塑性滑动理论发展形成的重叠片和微滑面模型; 第二类为 Cundall(1971) 和 Cundall, Strack(1979) 建立的颗粒模拟模型, 近年已应用到了水泥、纤维和砂等复合材料的本构关系模型中。

上述第一类模型越来越受到国际土力学界的重视, 许多研究者已普遍认识到要进一步了解粘性土宏观应力应变性状, 必须从土的微观结构及物理化学的本质着手。因此, 从统计的角度, 根据土的微观结构和粘土微粒的物理化学性质建立土的本构模型来反映土的宏观性状是一个新的发展方向, 这类模型我们称为土的微观力学模型或称为微滑面模型。微观力学模型的基本思路出自 Taylor(1938) 提出的材料中不同方向微滑面上的应力应变关系。这些关系的建立有两个假设前提, 即微滑面上的应力是宏观应力张量的分量, 这一假设称为静态约束; 二是微滑面上的变形是宏观应变张量的分量, 这一假设称为动态约束。由于土应变的软化现象, Bazant, Oh(1983, 1985) 和 Bazant, Gambarova(1984) 指出土在静态约束下, 当土应变软化发生时, 其微滑面体系是不稳定的。因此对于土来说, 在动态约束下建立土的微观力学模型是不可避免的。本次研究就是在这一约束条件下, 根据 Bazant 等建模的框架, 运用土的速率过程理论, 建立了不均匀粘性土蠕变的微观力学模型, 并通过试验对模型进行了验证。

2 模型的基本假设

在大量扫描电镜观察中证实了绝大部分粘性土是由微粘粒片组成, 并以各种几何形状排列。所谓的卡片房(cardhouse)排列是粘性土中最普遍的一种, 而微滑面即为颗粒片之间的接

* 国家自然科学基金资助课题(批准号 49402038)。

触滑动面(见图1)。但要弄清粒间力的大小是十分困难的,实际上也是没有必要的。这一问题可通过合理的解释就能解决。这一解释的理论依据就是土蠕变的速率过程理论,有关这一理论的基本原理可参见文献[1]。

根据速率过程理论,土的蠕变是由于粒间滑动引起的。在蠕变过程中,一些粒间键断开,一些键同时形成。因此粘土颗粒的排列(间距和定向性)和孔隙液的化学特征都会影响着粒间接触处结合键数量,而粘粒吸附层的厚度对于粒间键断开的速率有着明显影响。粘土颗粒与另一颗粒间的滑动服从活化能的解释。据此,在建立粘性土蠕变微观力学模型时,可作如下假设:①土的非弹性变形(蠕变)是由于粒间接触滑动引起的,粒间滑动的速率由活化能所控制;②在土微观结构观察的基础上,粒间接触面的方向频率分布要预先获得,它不光反映土结构的二维特征,而且也要反映接触面方向的三维分布;③土在蠕变过程中,体积膨胀暂忽略不计。

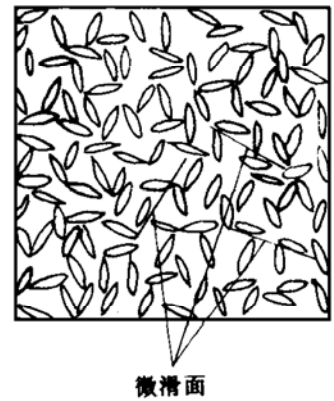


图1 土结构模型与微滑面示意图

3 各向异性粘性土蠕变微观力学模型的建立

这里我们采用笛卡儿坐标张量 $x_i (i = 1, 2, 3)$ (见图2)。i 指的是沿着这些轴的分量。在动态约束条件下,任何微滑面上的变形矢量 $\vec{\epsilon}^n$ 是宏观变形张量 ϵ_{ij} 的分量,即

$$\epsilon_j^n = n_i \epsilon_{ij} \quad (1)$$

式中 n_i 为垂直于微滑面上的单位方向余弦,微滑面的变形矢量在 $\vec{n}$ 方向上的投影便产生了在微滑面上的法向变形及其分量的量值。

$$\epsilon_N = n_j \epsilon_j^n = n_j n_k \epsilon_{jk} \quad (2)$$

$$(\epsilon_N)_i = n_i n_j n_k \epsilon_{jk} \quad (3)$$

在微滑面上变形矢量的量值为

$$|\vec{\epsilon}^n| = (\epsilon_j^n \epsilon_j^n)^{1/2} = (n_i \epsilon_{ij} n_k \epsilon_{ik})^{1/2} \quad (4)$$

在微滑面上的剪切变形矢量为

$$\vec{\epsilon}_T - \vec{\epsilon}^n = \vec{\epsilon}_N \quad (5)$$

其量值为

$$\epsilon_T = (|\vec{\epsilon}^n|^2 - \epsilon_N^2)^{1/2} \quad (6)$$

或

$$\epsilon_T = |\vec{\epsilon}_T| = (\epsilon_{Tj} \epsilon_{Tj})^{1/2} \quad (7)$$

根据式(3)~(7),剪切变形矢量的分量和量值为

$$\epsilon_{Ti} = (n_k \theta_{ij} - n_i n_j n_k) \epsilon_{jk} \quad (8)$$

$$\epsilon_T = [n_i \epsilon_{ik} n_k (\epsilon_{jk} - n_j n_m \epsilon_{km})]^{1/2} \quad (9)$$

根据速率过程理论,粘土片微滑面上的剪切应力可用下式来表达,即:

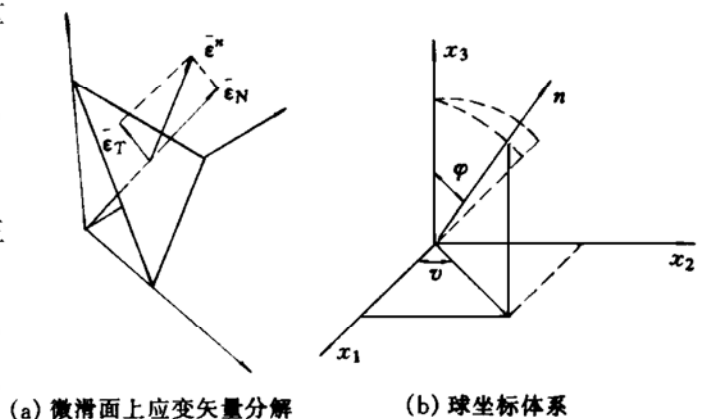


图2 球坐标系下应变矢量的分解

$$\tau_r = \frac{1}{k_2} \text{sh}^{-1} \frac{\dot{\epsilon}_T}{k_1} \quad (10)$$

其中

$$k_1 = 2X \frac{kT}{h} t^{-m} e^{-\Delta F/RT} = k_0 t^{-m} \quad (11)$$

$$k_0 = 2X \frac{kT}{h} e^{-\Delta F/RT} \quad (12)$$

$$k_2 = \frac{\lambda}{2kT} \quad (13)$$

式(10~13)中 τ_r 为微滑面上的剪切应力; k_0 为蠕变速率参数; k_2 为应力水平参数; X 为位移分子数的颗粒浓度系数; k 为 Boltzmann 常数(1.38×10^{-6}); T 为绝对温度(K); h 为 Planck 常数(6.624×10^{-27}); R 为普适气体常数; $\text{sh}^{-1}(x)$ 为反双曲函数; λ 为粘粒平衡位置间的距离; t 为蠕变时间; m 为蠕变衰减指数; ΔF 为土的活化能。

式(10)可以计算出 τ_r 的量值, 但它的方向还必须确定。前面已经证明, 粘土矿物的形状呈片状, 属于层状硅酸盐矿物。无疑, 对于土的各向异性来说, 粘土片必然存在某些优势定向。由于在土的剪切面上, 粘土片的滑动方向一般来说与剪切方向是不一致的。但从统计观点分析, 我们发现在剪切矢量方向上由于滑动方向与剪切方向不一致所造成的偏差是等机率的。因此, 作为一个近似, 可以假设在每个微滑面上滑动方向与剪切应力方向是一致的, 即矢量 $\vec{\epsilon}_T$ 和 $\vec{\tau}_r$ 在每个微滑面上其方向是平行的, 则剪切矢量的分量为

$$\tau_{Ti} = \frac{1}{k_2} e_i \text{sh}^{-1} \frac{\dot{\epsilon}_T}{k_1} \quad (14)$$

式中 e_i 为剪切应变速率矢量的方向余弦, 即

$$e_i = \frac{\dot{\epsilon}_{T_i}}{\dot{\epsilon}_T} \quad (15)$$

为了使所有方向微滑面上的微观应力与宏观应力张量间建立平衡等效关系, 我们可以运用虚功原理来建立。每个单位体积粘土在宏观上的应力虚功为 $\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}$ 。这里, 宏观应力张量 σ_{ij} 为有效应力张量, 即

$$\sigma_{ij} = t_{ij} - \delta_{ij} p \quad (16)$$

式中 p 为孔隙水压力; t_{ij} 为总应力; δ_{ij} 为单元张量。在一个单位球体(半径为 1)内, 宏观应变速率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 的任何变化量 $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$ 上宏观应力的虚功必须等于所有方向的微滑面上剪切应力所做的虚功, 即

$$\begin{aligned} \delta \dot{\omega} &= \frac{4\pi}{3} \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} = 2 \int_S \tau_{Tr} \delta \dot{\epsilon}_T f(\vec{n}) dS \\ &= 2 \int_S \frac{1}{k_2 \dot{\epsilon}_T} (n_m \delta_{kr} - n_r n_k n_m) \dot{\epsilon}_{km} (\text{sh}^{-1} \frac{\dot{\epsilon}_T}{k_1}) (n_j \delta_r - n_r n_i n_j) \delta \dot{\epsilon}_{ij} f(\vec{n}) dS \end{aligned} \quad (17)$$

或

$$\sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} = \left| \frac{3}{2\pi} \int_S b_{ijk} \frac{1}{k_2 \dot{\epsilon}_T} (\text{sh}^{-1} \frac{\dot{\epsilon}_T}{k_1}) f(\vec{n}) dS \right| \dot{\epsilon}_{km} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (18)$$

积分只需要对一个单位的半球体 S 进行, 因为在球表面的两个完全相反点的积分值是相

等的。 $f(\vec{n})$ 是微滑面定向分布函数。这里

$$\begin{aligned} b_{ijkm}' &= (n_j \delta_{ir} - n_r n_i n_j)(n_m \delta_{kr} - n_r n_k n_m) \\ &= \delta_{ik} n_j n_m - n_i n_j n_k n_m \end{aligned} \quad (19)$$

b_{ijkm}' 张量对于脚标 i, j 和 k, m 间的相互变化是不对称的, 但它可以写成一个对称部分和一个反对称部分之和, 即

$$b_{ijkm}' = b_{ijkm} + \tilde{b}_{ijkm} \quad (20)$$

这里对称部分是

$$b_{ijkm} = \frac{1}{4}(\delta_{ik} n_j n_m + \delta_{jk} n_i n_m + \delta_{im} n_j n_k + \delta_{jm} n_i n_k) - n_i n_j n_k n_m \quad (21)$$

由于张量 $\dot{\epsilon}_{km}$ 和 $\delta \epsilon_{ij}$ 是对称的, 因此

$$\tilde{b}_{ijkm} \dot{\epsilon}_{km} \delta \epsilon_{ij} = 0 \quad (22)$$

将式(20)代入式(18)并考虑式(22), 得

$$\sigma_{ij} = \eta_{ijkm} \dot{\epsilon}_{km} \quad (23)$$

式中 η_{ijkm} 为土体四阶粘滞张量, 定义为

$$\eta_{ijkm} = \frac{3}{2\pi} \int_S b_{ijkm} \frac{1}{k_2 \dot{\epsilon}_T} (\text{sh}^{-1} \frac{\dot{\epsilon}_T}{k_1}) f(\vec{n}) dS \quad (24)$$

式(23) (24) 就是从微观结构角度推导出的土蠕变的应力-应变关系。

在上述土的应力-应变关系中不包括土的体积应力和应变, 宏观体积应力 σ 不会引起在微滑面上的剪切应力 τ_T , 因此它的功率为零。反过来, 在微滑面上剪切应变速率 $\dot{\epsilon}_T$ 不会引起宏观的体积变化。如果用宏观的偏应力张量 σ_{ij}^D 和宏观偏应变速率张量 $\dot{\epsilon}_{km}^D$ 代替 σ_{ij} 和 $\dot{\epsilon}_{km}$, 式(23)的应力-应变关系同样有效的。即

$$\sigma_{ij}^D = \eta_{ijkm} \dot{\epsilon}_{km}^D \quad (25)$$

同样, 如果偏应变 $\dot{\epsilon}_k^D$ 替代 $\dot{\epsilon}_k$, 则式(8) (9) 同样有效, 那么, 剪切应变速率

$$\dot{\epsilon}_T = [n_i \dot{\epsilon}_k^D n_k (\dot{\epsilon}_k^D - n_j n_m \dot{\epsilon}_{km}^D)]^{1/2} \quad (26)$$

式(23) (26) 和由式(21) (24) 得到的粘滞张量, 就是我们想要得到的土蠕变的微观力学模型。

4 微观力学模型的数值解

根据 Stroud(1971) 提出的高维积分的近似计算, 式(24) 可用如下求和公式估算:

$$\eta_{ijkm} \approx \sum_{\alpha=1}^n \omega_{\alpha} \left| b_{ijkm} \frac{1}{k_2 \dot{\epsilon}_T} (\text{sh}^{-1} \frac{\dot{\epsilon}_T}{k_1}) f(\vec{n}) \right|_{\alpha} \quad (27)$$

这里, 脚码 α 指在一个单位球表面上某一数值积分点(即某一特征方向), ω_{α} 为数值积分公式的宽度或系数, 因此对于一个半球体 $\sum_{\alpha=1}^n \omega_{\alpha} = 0.5$ 。积分点应尽可能均匀地在球面上合理分布, 一个完美的均匀剖分应该使得垂直于 α 方向的微滑面与一个规则多面体的面相一致。有关超过 10 个积分点的多种数值积分公式在 Stroud(1971) 的书已作了详细的推导, 列出了许多现成的计算参数和方法, 使用者可按照计算的精度和需要, 选择合适的数值积分公式。对于岩

土工程应用来说, 选择 9 次 16 个积分点的公式计算, 其精度已足够了^[2]。

对于一个给定荷载土蠕变的数值解, 可以用逐步迭代形式进行。式(25)可以用如下增量关系估算:

$$\delta \sigma^D = \eta \Delta \dot{\epsilon}^D + \Delta \eta \dot{\epsilon}^D \quad (28)$$

式中 σ^D 和 $\dot{\epsilon}^D$ 为 6×1 阶的偏应力和偏应变速率分量矩阵; η 为 6×6 阶粘滞矩阵; Δ 表示增量。式(28)可以写成

$$\Delta \sigma^D = \eta \Delta \dot{\epsilon}^D - \Delta \sigma^D; \Delta \sigma^D = - \Delta \eta \dot{\epsilon}^D \quad (29)$$

如果应变速率增量被处理为应变增量, 粘滞矩阵 η 被处理成弹性模量矩阵, 那么上式就成为弹性应力-应变关系, $\Delta \sigma^D$ 为非弹性应力增量的柱矩阵。

5 微滑面定向分布函数的确定

在上述粘性土蠕变微观力学模型中, 微滑面的定向分布函数 $f(\vec{n})$ 是反映粘性土各向异性的一个十分重要的参数, 而这种各向异性体现在微观结构上的各向异性。因此可以说, $f(\vec{n})$ 是参与建立微观力学模型的一个结构参数, 从而使土结构的研究迈出了重要一步。

$f(\vec{n})$ 代表了滑动接触面的定向分布, 要直接测量微滑面在不同方向上的频率分布是不可能的, 但可以通过 X 光衍射仪来测得粘土片的定向分布函数 $F(\vec{n})$ ^[5]。虽然函数 $f(\vec{n})$ 与函数 $F(\vec{n})$ 不一定一致, 但可以假定它们之间是近似相等的, 即 $f(\vec{n}) \approx F(\vec{n})$ 。这一假设是有根据的。如果至少具有一个滑动接触点的每一个粘土片与只有一个滑动接触面平行, 那么这一假定是严格正确的。在这一情况下, 粘土片与同一方向上的滑动接触面之间为一一对应关系。但实际上一个粘土片可以有平行于这一粘土片的两个滑动接触面, 或者没有一个平行与它的, 这样就破坏了一一对应关系。对于大量的粘土片而言, 由这一假设引起的误差很可能彼此抵消, 即一个粘土片有两个平行的滑动接触, 另一个相同方向上的粘土片有两个与粘土片不平行的滑动接触。因此从统计角度分析, $f(\vec{n}) \approx F(\vec{n})$ 的假设是合理的。 $f(\vec{n})$ 值可直接从 $F(\vec{n})$ 图上读取, 见图 3。

上述用 X 光衍射测得的 $f(\vec{n})$ 是粘土片间的微滑面定向分布函数, 而实际上, 在某些土中如重塑高塑性粘性土中, 土体蠕变的微滑面往往处在团粒间, 在这种情况下用团粒 $f(\vec{n})$ 代替粘粒 $f(\vec{n})$ 更为合适。有关团粒间微滑面的定向分布函数确定将另文论述。

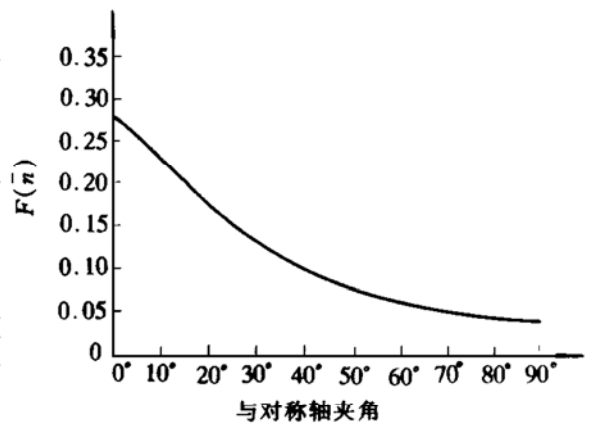


图 3 重塑灰色粘土样中伊利石矿物
X 光衍射定向分析

6 粘性土蠕变试验结果的拟合

为了检验上述模型的正确性和实用性, 我们取江苏淮阴三种土的重塑样为研究对象, 分别制成各向同性和各向异性两种试样, 然后分别进行蠕变试验, 再用上述模型进行拟合。6 个试样的初始状态见表 1。

表 1 试样的初始状态与蠕变参数

土样号	土样名称	粘粒含量 < 2 μ (%)	液限 w_L (%)	塑性指数 I_P (%)	何种 结构样	最大固 结压力 (kPa)	固结前 含水量 (%)	固结后 含水量 (%)	固结后 孔隙比 e	时间 指数 m	应力水 平参数 k_2	蠕变速 率参数 k_0
HI-1	灰色粘土	51.9	71.9	42.8	各向同性	200	58	39.7	1.15	0.97	0.15	0.35
HA-2	灰色粘土				各向异性	350	80.3	35.6	1.03	0.94	0.53	0.15
ZI-1	棕红色粉质粘土	38.7	41.2	14.1	各向同性	200	55.3	34.2	1.05	0.98	0.036	1.48
ZA-2	棕红色粉质粘土				各向异性	450	70.4	33.5	0.93	0.94	0.1	0.6
FI-1	棕黄色粉土	2.8	34.7	7.5	各向同性	200	45.2	35.5	0.98	0.91	0.037	0.7
FA-2	棕黄色粉土				各向异性	350	52.7	34.7	0.93	0.83	0.07	0.38

通过蠕变试验, 我们获得了每种各向同性和各向异性试样的轴向偏应力与某一时刻(这里取 30 分钟)轴向应变速率关系的试验结果。通过土的蠕变试验可确定土蠕变的时间衰减指数 m , 根据试算法可获得 k_0 和 k_2 值(见表 1); 根据 X 光衍射确定土的 $f(\bar{n})$, 然后应用土蠕变的微观力学模型, 采用逐步迭代法, 用 C 语言编制了计算机程序, 对上述试验结果进行了拟合。拟合结果见图 4, 从图中可以看出, 试验结果与拟合结果十分吻合, $(\sigma_1 - \sigma_3) - \dot{\epsilon}_a$ 的关系为非线性关系。

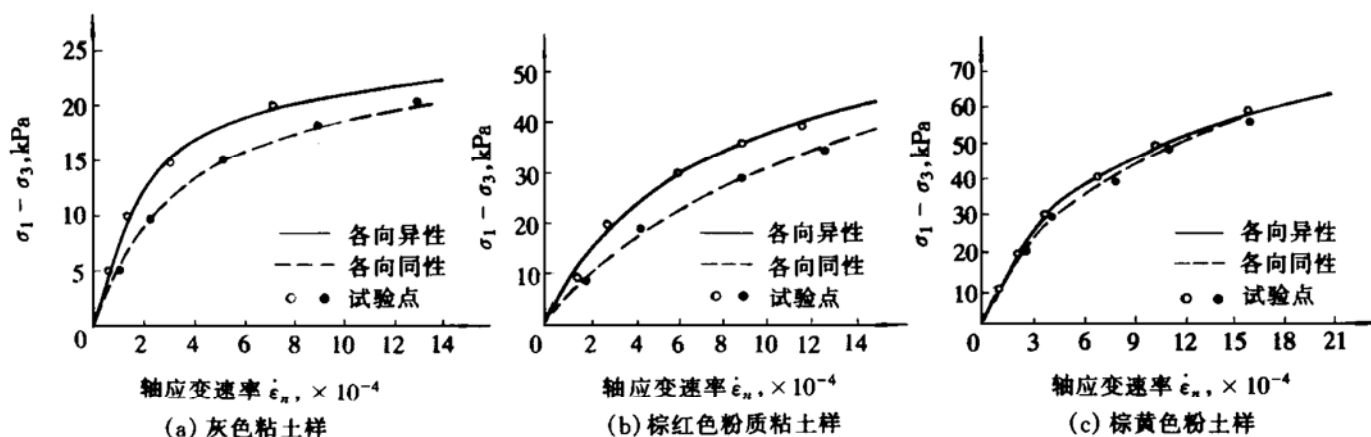


图 4 主应力差与轴向应变速率拟合结果
(每级加荷 30min)

灰色粘土和棕红色粉质粘土, 由于团粒的定向性较好, 因而它们的各向同性与各向异性试样的蠕变曲线相差较大; 而棕黄色粉土, 由于各向异性试样的团粒定向性仍较差, 因而各向同性和各向异性重塑试样的蠕变曲线很接近, 没有较大差别。从图中还可以发现, 三类土的各向异性试样的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \dot{\epsilon}_a$ 曲线均处在各向同性之上, 这说明在相同的轴向应力之下, 垂直于轴向应力方向各向异性试样的应变速率小于各向同性试样的应变速率, 这是符合实际情况的, 这也说明了结构对土的蠕变的影响。

在上述模拟过程中, 一旦某种土的 k_0 和 k_2 确定后, 就可以获得任意时刻土的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \dot{\epsilon}_a$ 的关系曲线, 这对土的蠕变研究有着重要的理论和实践意义。

河海大学殷宗泽教授对论文进行了精心的审阅, 张宗祜院士、沈珠江院士、王正宏教授、李生林教授、罗国煜教授等提出了许多宝贵意见, 在此一并表示衷心感谢!

参 考 文 献

- 1 Mitchell J K, Campanella R G, Singh A. Soil Creep as a Rate Process. *Journal of the Soil Mechanics and Engineering Foundations*. Paris, France, 1968: 231~ 253.
- 2 Bazant Z P, Oh B H. Microplane Model for Progressive Fracture of Concrete and Rock. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1985, **3**(4) : 559~ 582.
- 3 Bazant Z P, Ozaydin K, Krizek R J. Microplane Model for Creep of Anisotropic Clay. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 1975, **101**(EM 1) : 57~ 78.
- 4 维亚洛夫 C C. 土力学的流变原理. 杜余培译. 北京: 科学出版社, 1987. 101~ 132.
- 5 施斌, 水汀. 一种测定粘性土微观结构定向性的新技术——D/ MAX IIIA 型全自动结构测角仪. *水文地质工程地质*, 1991(6) : 54~ 55.
- 6 Shi Bin(施斌), Li Shenglin(李生林). Quantitative Approach on SEM Images of Microstructure of Clay Soils. *Science in China, Series B*, 1995, **38**(6) : 741~ 748.
- 7 Stroud A H. Approximate Calculation of Multiple Integrals. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971. 67~ 93.

Micromechanical Model on Creep of Anisotropic Clay

*Shi Bin Wang Baojun**Ning Wenwu*

(Dept. of Earth Sciences, Nanjing University, 210093) (Engineering Investigation Institute of Ninbuo, 315103)

Abstract According to rate process theory, slip theory of plasticity, and principle of virtual work, the micromechanical model on creep of anisotropic clay is set up. The numerical solution of the model and frequency distribution function are given. The results of the creep test for three kinds of clayey soils in Huaiyin are fitted by the model. The fitting results show that the model is reliable and efficient.

Key words clayey soil, anisotropy, creep, micromechanical model, fitting.