

能量的局部误差估计和直接积分法的时步自适应算法

王 怀 忠

孙 钧

(宝山钢铁(集团)公司, 上海, 201900)

(同济大学地下工程系, 上海, 200092)

文 摘 本文研究了直接积分法中时间离散引起的位移和速度局部误差, 区分了动力系统的能量, 能量的局部误差和位移、速度局部误差的能量三者的关系。提出将系统能量的局部误差作为后验误差估计指标。该误差估计指标的物理意义明确, 不仅考虑了位移局部误差而且还考虑了速度局部误差对能量局部误差的影响。本文还给出了相应的时间步长自适应调节算法, 并在算例中实现了时间步长的自适应调节计算, 同时验证了本文误差估计的精确性和可靠性。

关键词 直接积分法, 时步自适应算法, 能量误差, 局部误差估计。

1 引 言

在采用有限元法和直接积分法计算分析结构-介质动力相互作用时, 需进行空间的有限元离散和时间的时步离散, 因此需从空间和时间两方面着手采取措施提高计算精确度。

后验误差估计和自适应有限元法崛起于 70 年代末, 80 年代中后期达到鼎盛阶段, 在浩瀚的文献中文献 [1, 2] 等具有代表性。这些文献研究的是有限元的空间离散误差估计和各类自适应策略。90 年代初出现了一些研究直接积分法中时间离散误差的估计和时步自适应的文献^[3~5]。这些文献的共同之处是对直接积分格式进行高阶精度分析, 给出位移局部误差的后验估计和相应的时间步长自适应调节算法。

本文澄清了动力系统的能量, 能量的局部误差和位移、速度局部误差的能量三者的关系; 将系统能量的局部误差作为后验误差估计指标, 不仅考虑了位移局部误差而且还考虑了速度局部误差对能量局部误差的影响; 并给出相应的时间步长的自适应调节算法。

2 Newmark 型直接积分法

对所关心的结构-介质系统, 不计阻尼, 考虑惯性力的影响, 即可得以下的平衡微分方程:

$$M\ddot{a}(t) + K\dot{d}(t) = F(t) \quad (1)$$

这里 M , K 分别为质量矩阵和刚度矩阵; $F(t)$ 为荷载向量; a , V , d 分别为加速度、速度和位移向量; 初值条件为: $V(0) = V_0$, $d(0) = d_0$ 。一般情况下人们采用直接积分法求解式 (1)。本文采用最常用的 Newmark 型直接积分法进行研究, 采用其他类型的直接积分法也可得到同样的结果。Newmark 积分格式包含以下方程:

$$M\mathbf{a}_{t+\Delta t} + K\mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (2)$$

$$\mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{d}_t + \mathbf{V}_t\Delta t + (0.5 - \alpha)\mathbf{a}_t\Delta t^2 + \alpha\mathbf{a}_{t+\Delta t}\Delta t^2 \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_{t+\Delta t} = \mathbf{V}_t + (1 - \gamma)\mathbf{a}_t\Delta t + \gamma\mathbf{a}_{t+\Delta t}\Delta t \quad (4)$$

其中 $\mathbf{d}_{t+\Delta t}$, $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$, $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$ 分别是 $\mathbf{d}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{a}$ 在 $t + \Delta t$ 时刻的近似值; α , γ 为自由参数, 它们决定了 Newmark 法的稳定性和精确度。当 $\gamma \geq 0.5$, $\alpha = 0.25(0.5 + \gamma)$ 时, 积分格式无条件稳定。 $\alpha = 1/4$, $\gamma = 1/2$ 时为平均加速度法; $\alpha = 1/6$, $\gamma = 1/2$ 时为线性加速度法。通常在解式 (2) ~ (4) 时采用位移为基本未知量。文献 [6] 给出了加速度为基本未知量的 Newmark 法, 这样可以避免位移和速度作为导出变量带来的误差振荡积累。

3 位移和速度的局部误差

在 $t + \Delta t$ 时刻, 位移、速度和加速度精确局部误差为

$$\Delta \bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \mathbf{d}_{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} \quad (5)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t} = \mathbf{V}_{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t} \quad (6)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} \quad (7)$$

在此 $\mathbf{d}_{t+\Delta t}$, $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$, $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$ 为 $t + \Delta t$ 时刻位移、速度、加速度的数值解; $\bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}$, $\bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t}$, $\bar{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$ 为求解式 (1) 和 $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_t$, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_t$ 得出精确解。一般情况精确解难以得出。为研究系统的应变能和动能, 我们比较关心位移和速度的局部误差, 不妨高阶近似地定义 $t + \Delta t$ 时刻位移和速度的局部误差为

$$\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}^* = \mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_{t+\Delta t}^* \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t}^* = \mathbf{V}_{t+\Delta t} - \mathbf{V}_{t+\Delta t}^* \quad (9)$$

$$\mathbf{d}_{t+\Delta t}^* = \mathbf{d}_t + \mathbf{V}_t\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_t\Delta t^2 + \left(\frac{1}{6} - \beta\right)\dot{\mathbf{a}}_t\Delta t^3 + \beta\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}\Delta t^3 \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_{t+\Delta t}^* = \mathbf{V}_t + \mathbf{a}_t\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\dot{\mathbf{a}}_t\Delta t^2 + \delta\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}\Delta t^2 \quad (11)$$

其中 $\mathbf{d}_{t+\Delta t}^*$, $\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*$ 分别为 $\bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}$, $\bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t}$ 的高阶近似。

一般来说为求出 $\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$ 项, 需要额外再求解一个大型代数方程组, 这势必要增加许多计算量, 而在 I, II 情况下, 可以假设

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} = (\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t)/\Delta t = (\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \dot{\mathbf{a}}_t)/2 \quad (12)$$

对式 (8) ~ (11) 做出如下适当的估计:

I 平均 $\dot{\mathbf{a}}$ 法 (线性加速度法), $\beta = 1/12$, $\delta = 1/4$

$$\Delta \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)(\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t)\Delta t^2 = \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2}\Delta t^3 \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)(\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t)\Delta t = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2}\Delta t^2 \quad (14)$$

这样可节省直接求解 $\dot{\mathbf{a}}$ 的工作量, 但式 (13), (14) 有一定局限性, 在 $\alpha = 1/6$, $\gamma = 1/2$ 时就不适用。

II 线性 $\dot{\mathbf{a}}$ 法 (二次加速度法), $\beta = 1/24$, $\delta = 1/6$

$$\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} = \left[\left(\alpha - \frac{1}{12} \right) \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} - \frac{1}{12} \dot{\mathbf{a}}_t \right] \Delta t^3 \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} = \left[\left(\gamma - \frac{1}{3} \right) \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} - \frac{1}{6} \dot{\mathbf{a}}_t \right] \Delta t^2 \quad (16)$$

只要解函数充分光滑, 式 (15), (16) 不失为较近似的局部误差估计式。初值 $\dot{\mathbf{a}}_0$ 可通过下式解出:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_0 + \mathbf{K} \mathbf{V}_0 = \dot{\mathbf{F}}(0) \quad (17)$$

当 $\alpha = 1/6$, $\gamma = 1/2$ 时有

$$\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} = (\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} - \dot{\mathbf{a}}_t) \Delta t^3 / 12 = \bar{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} \Delta t^4 / 12 \quad (18)$$

$$\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} - \dot{\mathbf{a}}_t) \Delta t^2 / 6 = \bar{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} \Delta t^3 / 6 \quad (19)$$

其中 $\bar{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} = (\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t/2} - \dot{\mathbf{a}}_t) / \Delta t$, 这样对局部误差有了更高阶的估计。

由于数值阻尼可以迅速滤去高频成分, 上述误差分析没有考虑方程 (2) 中高频成分对加速度局部误差的贡献; 而对低频成分由于 $\omega \Delta t \ll 1$, 因此可忽略加速度局部误差对 $\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t}$ 和 $\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t}$ 的影响。

4 能量的局部误差与位移和速度局部误差的能量

在 $t + \Delta t$ 时刻, 系统的内能 $\bar{E}_{t+\Delta t}$ 可分为应变能 $\bar{E}_{t+\Delta t}^s$ 和动能 $\bar{E}_{t+\Delta t}^k$ 。

$$\bar{E}_{t+\Delta t} = \bar{E}_{t+\Delta t}^s + \bar{E}_{t+\Delta t}^k = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_{t+\Delta t}^s &= \bar{E}_{t+\Delta t}^s + \Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t}^s + \Delta_2 E_{t+\Delta t}^s \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{d}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E_{t+\Delta t}^k &= \bar{E}_{t+\Delta t}^k + \Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t}^k + \Delta_2 E_{t+\Delta t}^k \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{V}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (22)$$

在式 (21), (22) 中 $\Delta_2 E_{t+\Delta t}^s$, $\Delta_2 E_{t+\Delta t}^k$ 与 $\Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t}^s$, $\Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t}^k$ 相比为高阶小量, 故可不计。

$$\begin{aligned} \Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t} &= \Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t}^s + \Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t}^k \\ &= (\bar{\mathbf{d}}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} + (\bar{\mathbf{V}}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} \\ &\approx (\mathbf{d}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} + (\mathbf{V}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} \\ &= \Delta_1 E_{t+\Delta t}^s + \Delta_1 E_{t+\Delta t}^k = \Delta_1 E_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (23)$$

能量的局部误差为

$$\Delta E_{t+\Delta t} = E_{t+\Delta t} - \bar{E}_{t+\Delta t} = \Delta_1 \bar{E}_{t+\Delta t} + \Delta_2 E_{t+\Delta t} \approx \Delta_1 E_{t+\Delta t} \quad (24)$$

位移和速度局部误差的能量为

$$\begin{aligned} \Delta E_{t+\Delta t} &= \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}_{t+\Delta t} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{V}_{t+\Delta t} \\ &= \Delta_2 E_{t+\Delta t}^s + \Delta_2 E_{t+\Delta t}^k = \Delta_2 E_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (25)$$

文献 [7] 曾不加证明地指出相对误差 $\eta_1 = (\Delta E / E_t)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\eta_2 = (\Delta E_t / E_t)^{\frac{1}{2}}$ 的结果几乎完全相同, 这一结论显然是不成立的。

对静力学问题, 总动能和相应的误差都为零, 这时有

$$\Delta E = \Delta_1 E^s + \Delta_2 E^s \approx \Delta_1 E^s, \quad \Delta E = \Delta_2 E^s$$

则相对误差

$$\eta_3 = (\Delta E / E)^{\frac{1}{2}} = [\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} / (\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d})]^{\frac{1}{2}} \text{ 与 } \eta_4 = \Delta E / E = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} / (\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d})$$

具有相同的误差级, 其中 η_3 为著名的 Zienkiewicz-Zhu^[2]型后验误差估计模式, 但该估计物理意义不明确, 不能直接推广应用到动力学问题中。

5 能量局部误差后验估计

将式 (13)、(14) 代入式 (24) 可得

$$\begin{aligned} \Delta E_{t+\Delta t} &\approx (\alpha - \frac{1}{6}) \Delta t^3 (\mathbf{d}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} \mathbf{a}_{t+\Delta t/2} + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t^2 (\mathbf{v}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} \mathbf{a}_{t+\Delta t/2} \\ &= \Delta_1 E_{t+\Delta t}^s + \Delta_1 E_{t+\Delta t}^k \end{aligned} \quad (26)$$

式 (26) 中略去了含 0 $(\Delta t)^4$ 及更高阶的小量。将式 (15)、(16) 代入式 (24) 同样可得

$$\begin{aligned} \Delta E_{t+\Delta t} &\approx \frac{1}{12} \Delta t^3 (\mathbf{d}_{t+\Delta t})^T \mathbf{K} [(12\alpha - 1) \mathbf{a}_{t+\Delta t/2} - \mathbf{a}_t] \\ &\quad + \frac{1}{6} \Delta t^2 (\mathbf{v}_{t+\Delta t})^T \mathbf{M} [(6\gamma - 2) \mathbf{a}_{t+\Delta t/2} - \mathbf{a}_t] \\ &= \Delta_1 E_{t+\Delta t}^s + \Delta_1 E_{t+\Delta t}^k \end{aligned} \quad (27)$$

我们定义局部能量误差的后验估计为

$$e_a = \Delta_1 E_{t+\Delta t}^s + \Delta_1 E_{t+\Delta t}^k, \quad e_b = \Delta_1 E_{t+\Delta t}^s \quad (28)$$

误差估计的精确性和可靠性指标可由下式表示:

$$\theta_a = e_a / \Delta E_{t+\Delta t}, \quad \theta_b = e_b / \Delta E_{t+\Delta t} \quad (29)$$

则相对误差的后验估计为

$$\eta_a = e_a / (E_{t+\Delta t} + e_a) \quad (30)$$

$$\eta_b = e_b / (E_{t+\Delta t} + e_b) \quad (31)$$

由于 $\Delta_1 E_{t+\Delta t}^s$ 是比 $\Delta_1 E_{t+\Delta t}^k$ 高一阶的小量, 通常 e_b , η_b 可以成为 e_a , η_a 很好的近似。

6 时间步长自适应调整

根据以上误差估计, 为使时间离散引起的局部误差在每一时步都比较平均地分布, 本文给出以下时间步长自适应调整措施, 以保证在给定的误差容许范围内计算的经济性和可靠性。预先给定能量局部误差容许值 η^{tol} , 上容限 $\nu_2 \eta^{\text{tol}}$ 和阈值 $\nu_1 \eta^{\text{tol}}$ 。其中

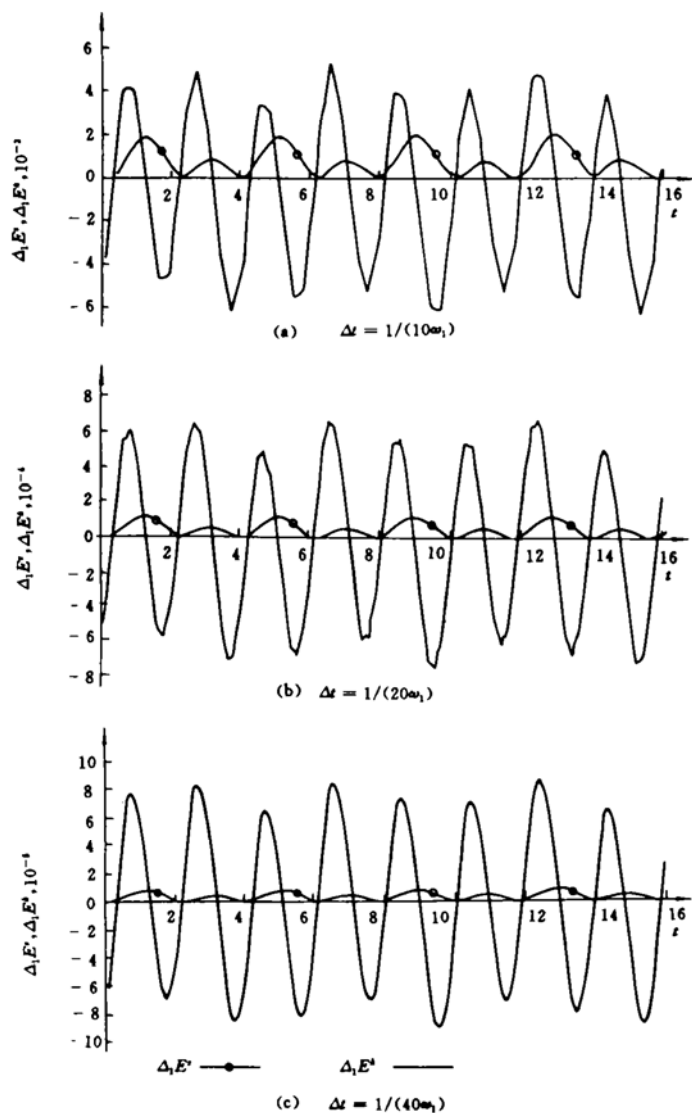
$$0 \leq \nu_1 \leq 1, \quad \nu_2 > 1$$

这样, 当 η ($\eta = |\eta_a|$ 或 $\eta = |\eta_b|$) 满足式 (32) 时

$$\nu_1 \eta^{\text{tol}} \leq \eta \leq \nu_2 \eta^{\text{tol}} \quad (32)$$

计算结果满足精度要求, 可接下一时步计算。当 η 超过上容限时, 即

$$\eta > \nu_2 \eta^{\text{tol}} \quad (33)$$

图1 $\Delta_1 E^s$ 与 $\Delta_1 E^k$ 时程曲线

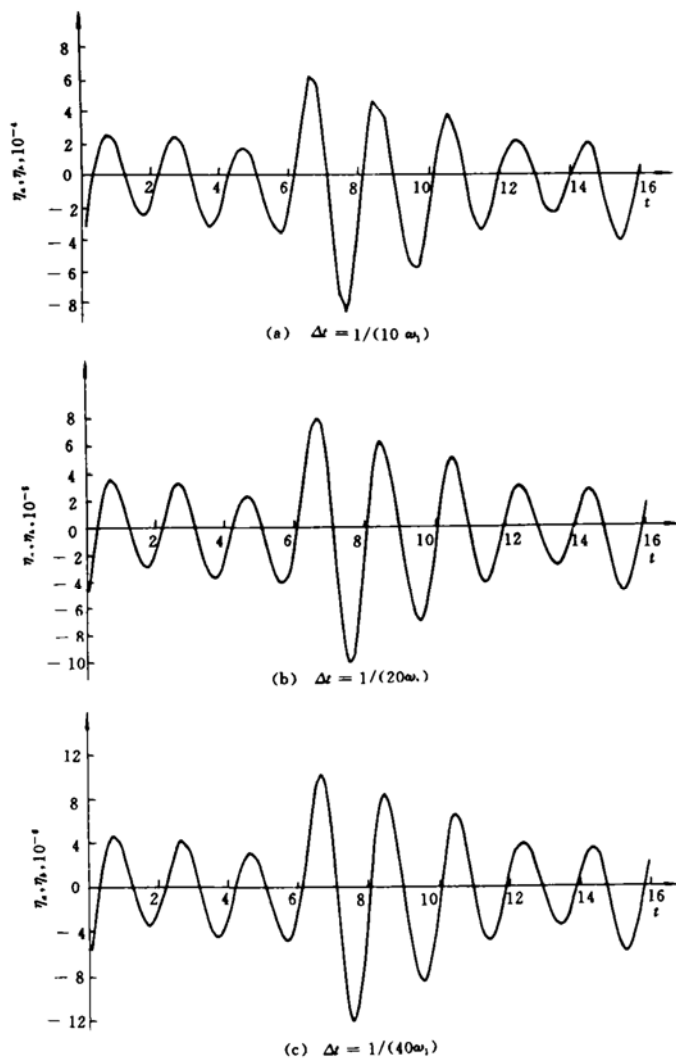
计算结果不能满足精度要求, 需要调整 Δt 并重新计算。新的时间步长 Δt_{new} 的计算公式建议为

$$\Delta t_{\text{new}} = \Delta t_{\text{old}} (\eta^{\text{tol}} / \eta)^{\frac{1}{p}} \quad (34)$$

一般情况下, $p=2$; 在 $\alpha = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{24}$, $\delta = \frac{1}{6}$ 时, 也可以考虑取 $p=3$ 。当误差小于阈值时, 即

$$\eta < \nu_1 \eta^{\text{tol}} \quad (35)$$

计算结果可以接受, 但这表明 Δt 过小从而将增加不必要的计算次数。可以预先给定一个整数 K_0 , 当连续 K_0 次出现式 (35) 的情况时, 在第 K_0 次调整 Δt 并重做该时步计算工作, 新的时间步长计算公式仍为式 (34)。

图2 η_a 与 η_b 时程曲线

7 数值结果

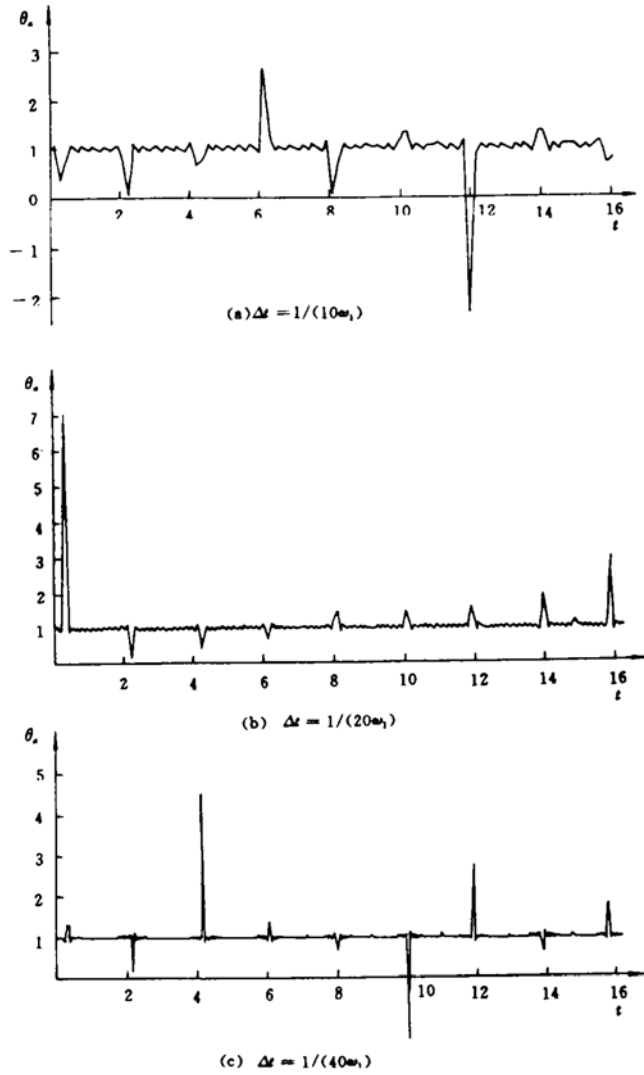
考虑两个自由度的动力系统

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 0 \\ 0 & 4.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.0 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_t^1 \\ d_t^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 4.0 \end{Bmatrix}$$

初始条件 $V_0 = \{1, 2\}$, $d_0 = \{0, 0\}$; 自振频率 $\omega_1 = 0.618034$, $\omega_2 = 1.618034$ 。

计算中采用线性加速度的 Newmark 法逐步积分, 并采用线性 a 法估计位移、速度的局部误差, 即自由参数取 $\alpha = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{24}$ 和 $\delta = \frac{1}{6}$ 。

首先, 分别取 $\Delta t = \frac{1}{10\omega_1}$, $\Delta t = \frac{1}{20\omega_1}$ 和 $\Delta t = \frac{1}{40\omega_1}$ 进行对照计算。 $T_{\text{end}} = \frac{10}{\omega_1}$ 。图1、图2

图 3 θ_a 时程曲线

和图 3 分别给出三个对照组的 $\Delta_1 E^s$, $\Delta_1 E^k$, η_a , η_b 和 θ_a 的时程曲线。图 4 为取 $\Delta t = \frac{1}{20\omega_1}$ 时 $\Delta_1 E^k$, $\Delta_1 E$ 和 ΔE 的时程曲线。图 5 为取 $\Delta t = \frac{1}{10\omega_1}$ 时, $\Delta_2 E^s$ 和 ΔE^k 的时程曲线。

图 1 显示, Δt 每减小到原来的 $1/2$ 倍, $\Delta_1 E^k$ 相应地减小到原来的 $1/8$ 倍, $\Delta_1 E^s$ 相应地减小到原来的 $1/16$ 倍。图 2 中 η_a 和 η_b 几乎完全重合很难区分开来, 所以用同一条曲线表示。 Δt 每减小到原来的 $1/2$ 倍, η_a 和 η_b 相应地减小到原来的 $1/8$ 倍。图 1 和图 2 的结果证实了式 (23) 的估计。

图 3 中 θ_a 随时间的发展基本在 $\theta_a = 1$ 的上下振荡, 在 $\Delta E \approx 0$ 和 $e_a \approx 0$ 的特定有点有较大的跳跃。随着 Δt 的减小, θ_a 的振荡减小, 但在这些特定点的跳跃却相对增大。这表明, 随着 Δt 的减小 e_a 更逼近 ΔE ; 另外, 在这些特定分母 ΔE 更逼近零值, 从而使 θ_a 有很大的跳跃。

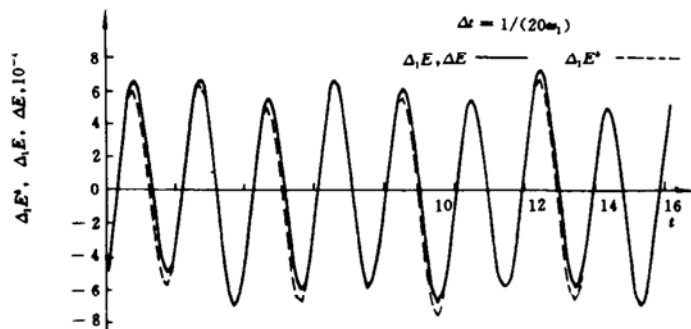
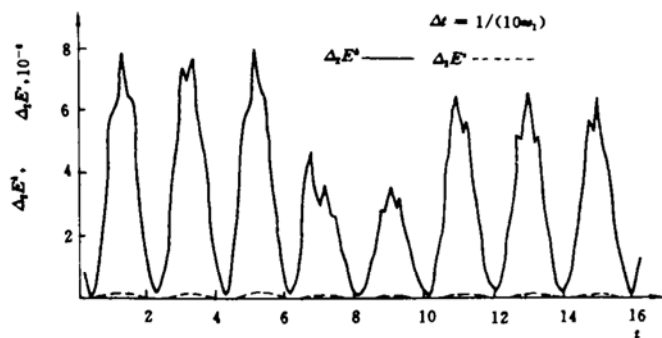
图 4 $\Delta_1 E^k$, $\Delta_1 E$ 和 ΔE 时程曲线图 5 $\Delta_2 E^k$ 和 $\Delta_2 E^T$ 时程曲线

图 4 中 $\Delta_1 E$ 和 ΔE 几乎完全重合, 很难区分开来。 $\Delta_1 E^k$ 也很逼近 $\Delta_1 E$ 和 ΔE , 随着 Δt 的减小, 这种逼近性更好。因此, 忽略 $\Delta_1 E^T$, 用 $\Delta_1 E^k$ 近似代替 $\Delta_1 E$ 是合理的。

在图 5 中, 与 $\Delta_2 E^k$ 相比 $\Delta_2 E^T$ 是更小的量, 它仅在横轴上方有很小的起伏。随着 Δt 的减小, $\Delta_2 E^k$ 和 $\Delta_2 E^T$ 也相应地减小, 但 $\Delta_2 E^T$ 减小得更快。比较图 1 和图 5 可知, 与 $\Delta_1 E^k$ 和 $\Delta_1 E^T$ 相比, $\Delta_2 E^k$ 和 $\Delta_2 E^T$ 是更小的量, 因此式 (24) 忽略 $\Delta_2 E$ 是合理的。

另外本文根据公式 (32) ~ (35) 的内容进行了时间步长的自适应调整计算。计算中取初始时间步长 $\Delta t = \frac{1}{20\omega_1}$, $T_{\text{end}} = \frac{10}{\omega_1}$, $\eta = |\eta_a|$, $p = 3$, $K_0 = 5$, $\nu_1 \eta^{\text{tol}} = 0.001\%$, $\nu_2 \eta^{\text{tol}} = 0.005\%$, 共计算 206 步, 调整 Δt 共 21 次。图 6 给出 Δt 的调整曲线和 η_a , η_b 时程曲线。

比较图 6 和图 2 中 $\Delta t = \frac{1}{20\omega_1}$ 的 η_a , η_b 时程曲线可知, 当取 $\Delta t = \frac{1}{20\omega_1}$ 时, 在 $t = 3.2$ 时刻, η_a 和 η_b 逼近零值, 这使图 6 中 Δt 放大近一倍; 此后由于图 6 中 $|\eta_a|$ 迅速增加, 使 Δt 迅速减小至初始时间步长附近, 在图 2 中 $t \in (6.2, 10.5)$ 的区间由于峰值处 $|\eta_a|$ 和 $|\eta_b|$ 略大于 0.005% , 使图 6 中 Δt 稍微减小, 并有两次小区间段内的略微回升, 此后 Δt 在 $\Delta t = \frac{1}{20\omega_1}$ 上下作小幅度调整。经调整, η_a 和 η_b 曲线在 $\pm 0.005\%$ 的范围内振荡。图 7 为整个

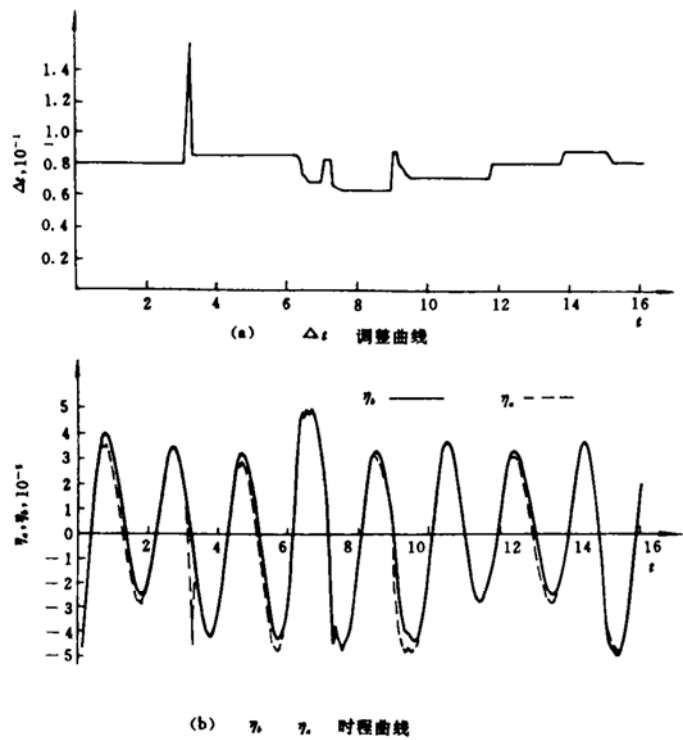


图6 Δt 的调整曲线和 η_a, η_b 时程曲线

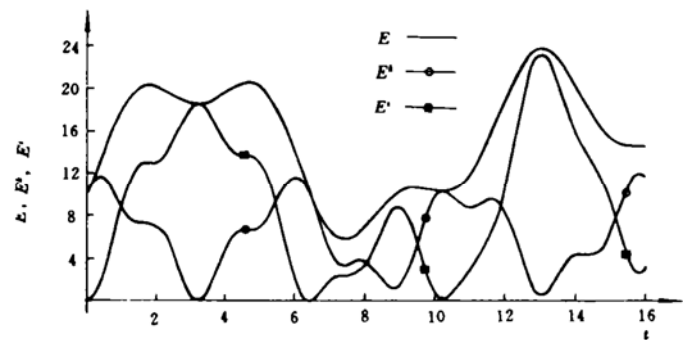


图7 系统的应变能、动能和内能的时程曲线

系统的应变能、动能和内能的时程曲线。以上各算例都可得到图7的结果。

8 结 论

- (1) 应明确区分动力系统的能量，能量的局部误差和位移、速度局部误差的能量三者的关系。
- (2) 系统能量的局部误差具有明确的物理意义，可用来作为有效的后验误差估计指标。
- (3) 计算系统能量局部误差时，要考虑位移局部误差，还要考虑速度局部误差的影响。

(4) 本文算例实现了时间步长自适应调节计算, 验证了误差估计的精确性和可靠性。

参 考 文 献

- 1 Bauska I, Rheinboldt W C. A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method. *Int J Numer Methods Eng*, 1978, **12**, 1597~1615.
- 2 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering analysis. *Int J Numer Methods Eng*, 1987, **24**, 337~357.
- 3 Zienkiewicz O C, Xie Y M. A Simple Error Estimator and Adaptive Time-Stepping Procedure for Dynamic Analysis. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 1991, **20**, 871~887.
- 4 Zeng L F, Wiberg N E, Li X D, Xie Y M. A Posteriori Local Error Estimation and Adaptive Time - Stepping Procedure for Newmark Integration in Dynamic Analysis. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 1992, **21**, 555 ~ 571.
- 5 Li X D, Zeng L F, Wiberg N E. A Simple Local Error Estimator and An Adaptive Time - Stepping Procedure for Direct Integration Method in Dynamic Analysis. *Commun Numer. Methods Eng*, 1993, **9**, 273~292.
- 6 王怀忠, 赵 毅. 加速度作为基本变量的逐步积分法. 见: 中国博士后首届学术大会论文集 (下). 北京: 国防工业出版社, 1993. 1171~1174.
- 7 Zeng L F, Wiberg N E, Bernspang L. An Adaptive Finite Element Procedure for 2D Dynamic Transient Analysis Using Direct Integration. *Int J Numer Methods Eng*, 1992, **34**, 997~1014.

Local Error Estimator of Energy and Adaptive Time-Stepping Procedure for Direct Integration Method

Wang Huai-zhong

(Baoshan Iron and Steel Group Corporation, Shanghai)

Sun Jun

(Tongji University, Shanghai)

Abstract In this paper, the local errors of displacement and velocity induced by temporal discrete in direct integration are studied. Then, the difference among the system energy, local error of energy as well as the energy for local errors of displacement and velocity are distinguished. The local error of energy is presented as a posteriori error estimator which has clear physical meaning. In the estimator not only the local errors of displacement but also the local errors of velocity are taken into account. An adaptive time - stepping procedure is presented. The numerical computation is also performed, and the presented estimator is proved to be of high accuracy and reliability.

key words direct integration, adaptive time - stepping procedure, energy error, local error estimator.