

变荷载下任意层地基一维固结理论

谢康和 潘秋元

(浙江大学岩土工程研究所, 杭州, 310027)

1 前言

由于实际地基大多由性质不一的层状土组成, 成层地基固结计算一直为人们所关注。自 Gray 首先给出双层地基一维固结解答以来^[1], 已有不少学者致力于多层(二层以上)地基一维固结理论研究^[2~4]。但由于求解困难, 这些研究大多未能给出全解, 且对实际工程中的变荷载(单级或多级等速加荷)讨论甚少, 不便实际应用。而现有成层地基固结简化算法(如加权固结系数法)虽然计算简便, 结果却不能令人满意^[5]。

本文给出变荷载下任意层地基一维固结问题完整的解析解答, 编制了相应的计算程序, 并举例说明其应用, 为多层地基一维固结问题提供了最为完整的严密解和计算程序, 从而使成层地基固结理论更趋完善。

2 问题的描述

本文考虑的多层地基如图 1 所示。其总厚度为 H , 所含土层数为 n , 土层 i 的厚度、竖向渗透系数、体积压缩系数和压缩模量分别记为 h_i, k_{vi}, m_{vi} 和 E_{si} ($i = 1, 2, \dots, n$)。地基排水条件分为两种, 即单面排水(仅地基表面透水)和双面排水(地基表面和底面均透水)。地面作用着随时间任意变化的连续均布荷载 $q(t)$, 其起始值为 q_0 , 最终值为 q_u , 加荷历时为 t_c , 如图 2 所示。

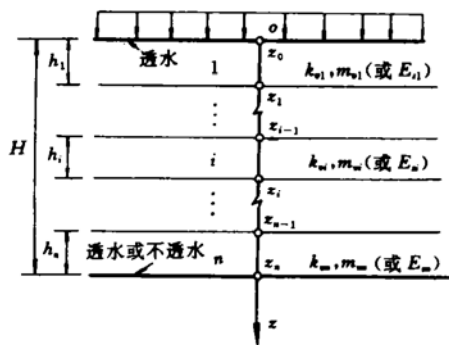


图 1 多层地基

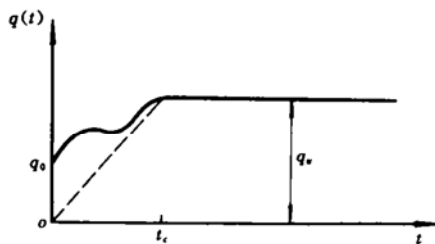


图 2 荷载-时间关系

取地表为坐标 z 原点, 并记该点至土层 i 顶面和底面之垂直距离分别为 z_{i-1} 和 z_i , 则有:

$z_0 = 0; z_i = \sum_{j=1}^i h_j, i = 1, 2, \dots, n; z_n = H$ 。再作除加荷条件外与太沙基一维固结理论相同的假定, 即可得变荷载下多层地基中任一土层 i 的一维固结微分方程如下:

$$c_{vi} \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \quad (z_{i-1} \leq z \leq z_i, i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

其中 $c_{vi} = k_{vi}/(\gamma_w m_{vi}) = k_{vi} E_{si}/\gamma_w$, 土层 i 的竖向固结系数; $u_i = u_i(z, t)$, 土层 i 中任一点任一时刻的超静孔压。

方程 (1) 的求解条件如下:

边界条件

$$\left. \begin{aligned} z = 0: u_1 &= 0 \\ z = H: u_n &= 0 (\text{底面透水}); \frac{\partial u_n}{\partial z} = 0 (\text{底面不透水}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

层与层交界面处连续条件

$$z = z_i: u_i = u_{i+1}; k_{vi} \frac{\partial u_i}{\partial z} = k_{v(i+1)} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

起始条件

$$t = 0: u_i = q(0) = q_0 \quad (4)$$

变荷载下任意层地基一维固结问题即归结为求微分方程 (1) 之解 u_i , 并使之满足求解条件 (2)、(3)、(4)。

3 解 答

为使解答简洁起见, 定义下列无量纲参数:

$$a_i = \frac{k_{vi}}{k_{v1}}, b_i = \frac{m_{vi}}{m_{v1}} = \frac{E_{s1}}{E_{si}}, \rho_i = \frac{h_i}{H}, \mu_i = \sqrt{\frac{c_{v1}}{c_{vi}}} = \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

用类似于求解双层地基一维固结问题的方法^[5], 可得方程 (1) 之满足一切求解条件的解如下:

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} C_m g_{mi}(z) e^{-\beta_m t} (q_0 + \int_0^t \frac{dq}{dt} e^{\beta_m t} dt) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

式中

$$\beta_m = \lambda_m^2 c_{v1} / H^2 \quad (7)$$

$$g_{mi}(z) = A_{mi} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}) + B_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}) \quad (8)$$

$g_{mi}(z)$ 中的系数 A_{mi} 和 B_{mi} 由下列递推公式计算:

$$\left. \begin{aligned} [A_{m1} \quad B_{m1}]^T &= [1 \quad 0]^T \\ [A_{mi} \quad B_{mi}]^T &= S_i [A_{m(i-1)} \quad B_{m(i-1)}]^T \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 S_i 为以下矩阵:

$$S_i = \begin{bmatrix} A_i B_i + d_i C_i D_i & A_i D_i - d_i C_i B_i \\ C_i B_i - d_i A_i D_i & C_i D_i + d_i A_i B_i \end{bmatrix} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (10)$$

矩阵中系数 A_i, B_i, C_i, D_i 和 d_i 的计算式为

$$\begin{aligned} A_i &= \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z_{i-1}}{H}) \\ B_i &= \sin(\mu_{i-1} \lambda_m \frac{z_{i-1}}{H}) \\ C_i &= \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z_{i-1}}{H}) \\ D_i &= \cos(\mu_{i-1} \lambda_m \frac{z_{i-1}}{H}) \\ d_i &= \frac{k_{v(i-1)}}{k_{vi}} \sqrt{\frac{c_{vi}}{c_{v(i-1)}}} = \sqrt{\frac{a_{i-1} b_{i-1}}{a_i b_i}} \end{aligned}$$

λ_m 为以下超越方程之正根:

$$S_{n+1} \cdot S_n \cdot S_{n-1} \cdots S_2 \cdot S_1 = 0 \quad (11)$$

其中 $S_1 = [1 \ 0]^T$, S_{n+1} 为 1×2 阶矩阵, 即

$$S_{n+1} = \begin{cases} [\sin(\mu_n \lambda_m) & \cos(\mu_n \lambda_m)] \quad (\text{底面透水}) \\ [\cos(\mu_n \lambda_m) & -\sin(\mu_n \lambda_m)] \quad (\text{底面不透水}) \end{cases} \quad (12)$$

式 (6) 中的最后一系数 C_m 由下列积分式确定:

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_{mi}(z) dz}{\sum_{i=1}^n b_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_{mi}^2(z) dz} \\ &= \frac{2 \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} [A_{mi}(C_i - D_{i+1}) + B_{mi}(B_{i+1} - A_i)]}{\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} [\mu_i \rho_i \lambda_m (A_{mi}^2 + B_{mi}^2) + (B_{mi}^2 - A_{mi}^2)(D_{i+1} B_{i+1} - C_i A_i) + 2 A_{mi} B_{mi} (C_i^2 - D_{i+1}^2)]} \end{aligned} \quad (13)$$

从式 (6) 可见: 对一般荷载, 解由两项组成, 只要知道 $q(t)$ 的数学表达式, 即可通过积分得到解的显式; 对于恒载 (即瞬时加荷), $q(t) = q_0 = q_u$, $\frac{dq}{dt} = 0$, 式 (6) 右边的括号中仅剩第一项; 对于图 2 中虚线所示的实际工程中常见的等速加荷, $q_0 = 0$, 式 (6) 右边的括号中则仅剩第二项, 且有

$$u_i = \begin{cases} q_u \sum_{m=1}^{\infty} C_m g_{mi}(z) (1 - e^{-\lambda_m^2 T_v}) / (\lambda_m^2 T_v) & 0 \leq t \leq t_c \\ q_u \sum_{m=1}^{\infty} C_m g_{mi}(z) e^{-\lambda_m^2 T_v} (e^{\lambda_m^2 T_v} - 1) / (\lambda_m^2 T_v) & t \geq t_c \end{cases} \quad (14)$$

其中 $T_v = \frac{c_{v1} t}{H^2}$, $T_v = \frac{c_{v1} t_c}{H^2}$ 。

由以上解可进一步求得任一土层 i 的平均固结度

$$U_i = \frac{1}{q_u h_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} [q(t) - u_i] dz$$

$$= \frac{1}{q_u} \left[q(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mi}(C_i - D_{i+1}) + B_{mi}(B_{i+1} - A_i)}{\mu_i \rho_i \lambda_m} C_m e^{-\beta_m t} (q_0 + \int_0^t \frac{dq}{dt} e^{\beta_m t} dt) \right] \quad (15)$$

按沉降（压缩量）定义的地基总平均固结度

$$U_s = \frac{S_t}{S_{\infty}} = \frac{1}{q_u \sum_{i=1}^n m_{vi} h_i} \left[\sum_{i=1}^n m_{vi} \int_{z_{i-1}}^{z_i} (q(t) - u_i) dz \right] = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \rho_i U_i}{\sum_{i=1}^n b_i \rho_i} \quad (16)$$

以作用的平均有效应力（或所消散的平均孔压）定义（简称按平均孔压定义）的地基总平均固结度

$$U_p = \frac{q(t) - \bar{u}}{q_u} = \frac{1}{q_u} \left[q(t) - \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} u_i dz \right] = \sum_{i=1}^n \rho_i U_i \quad (17)$$

上述各种固结度均是对最终荷载 q_u 而言的。

容易证明，对于多层地基的某土层来说，其平均固结度按沉降定义和按平均孔压定义是相同的，如式（15）所示。但对整个多层地基而言，从式（16）和（17）可见，其总平均固结度按沉降定义和按平均孔压定义并不一致（即 $U_s \neq U_p$ ），除非各土层的变形指标 m_{vi} 或 E_{si} 相同（即 $b_i = 1$ ）。这与双层地基一维固结问题是相似的^[5]。

4 算例与应用

已为本文解答编制了微机程序。现用此程序对某 4 层地基进行一维固结分析以说明本文解及程序的正确及其应用。

该地基双面排水，其各层土的厚度、力学参数以及按式（5）定义的无量纲参数如表 1 所示。

表 1 某 4 层地基几何与力学参数^[2]

土层号 i	h_i (m)	ρ_i	k_{vi} (cm/s)	a_i	m_{vi} (kPa ⁻¹)	b_i	c_{vi} (cm ² /s)	μ_i
1	3.05	0.125	2.78×10^{-9}	1.000	6.41×10^{-5}	1.000	4.42×10^{-4}	1.000
2	6.10	0.25	8.25×10^{-9}	2.966	4.08×10^{-5}	0.635	2.06×10^{-3}	0.463
3	9.14	0.375	1.17×10^{-9}	0.422	2.04×10^{-5}	0.317	5.85×10^{-4}	0.866
4	6.10	0.250	2.94×10^{-9}	1.058	4.08×10^{-5}	0.635	7.35×10^{-4}	0.774

注：各层土的厚度与力学参数引自文献 [2] 表 3。表中数字按国际单位制进行了换算。

表 2 为从式（11）求得的前 12 个正根。图 3~5 为主要计算结果。其中图 3 为恒荷载下 $t = 740, 2930$ 及 7195 天（相当于 $U_s = 25\%, 50\%$ 及 75% ）时该地基中超静孔压沿深度分布曲线；图 4 为各土层的平均固结度 $U_1 \sim U_4$ 以及按沉降定义和按平均孔压定义的地基总平均固结度 U_s 和 U_p 与 T_v 关系曲线；图 5 为图 2 虚线所示的变荷载下 $U_s - T_v$ 关系随 T_{vc} 变

化曲线。

表 2 式 (11) 的前 12 个根

m	1	2	3	4	5	6
λ_m	5.0443	7.4872	11.5397	17.7427	20.8746	24.4233
m	7	8	9	10	11	12
λ_m	29.0832	32.5245	37.3292	41.6653	45.7632	49.0654

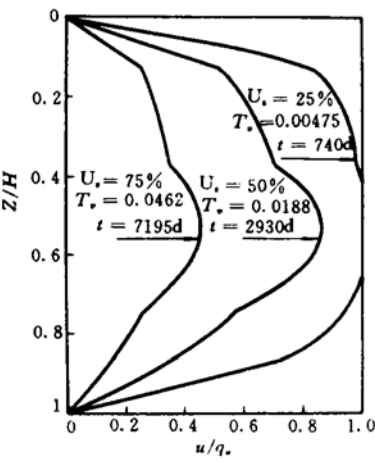


图 3 孔压沿深度分布曲线

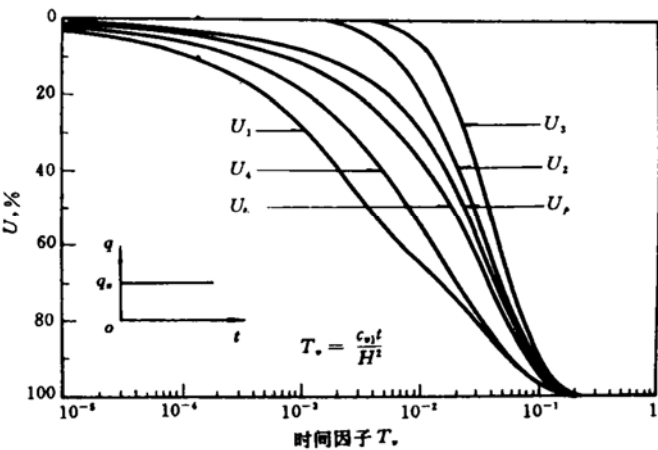


图 4 各种平均固结度与时间因子 T_v 关系曲线

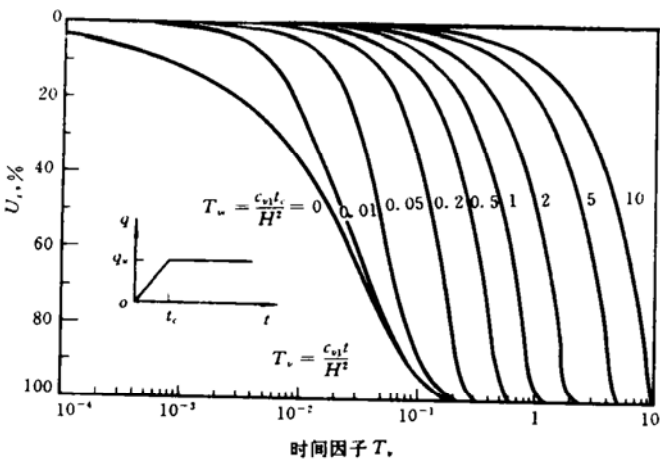


图 5 等速加荷下 $U_s - t - t_i$ 关系曲线

Schiffman 等人也曾分析过此例，但仅给出了恒荷载下该地基的孔压分布曲线（见文献 [2] 图 2），将此图与本文的图 3 比较可知，两者完全一致。

从图 4 可见，由于靠近透水面且厚度相对较薄，土层 1 和 4 较中间两土层固结快，固结速率依次为：土层 1 > 土层 4 > 土层 2 > 土层 3。尚可见， U_s 与 U_p 有明显的差别。以总平均

固结度达到 50% 所需时间为例, 按沉降定义需要 2930 天 ($T_v = 0.0188$), 而按平均孔压定义则需 3675 天 ($T_v = 0.0236$)。

图 5 表明, 地基的固结速率随加荷历时 t_c 的增加而减小。例如由图可知, 当 $t_c = 0$ (即 $T_{vc} = 0$, 恒载), U_s 在 $t = 2930$ 天时可达 50%; 而当 $t_c = 1557$ 天 ($T_{vc} = 0.01$), $t = 2930$ 天时 U_s 仅达 43%。

图 3~5 也适用于其他 4 层地基的一维固结分析, 只要各土层的无量纲参数与表 1 中的相同。例如, 欲求某 $H = 32\text{m}$, $E_{s1} = 3\text{MPa}$, $k_{v1} = 2.15 \times 10^{-6}\text{cm/s}$ (或 $c_{v1} = 0.0658\text{cm}^2/\text{s}$) 且无量纲参数与表 1 相同的 4 层地基在等速加荷 ($t_c = 90$ 天) 下 U_s 达到 90% 所需时间, 可直接查图 5 对应于 $T_{vc} = 0.0658 \times 90 \times 86400 / 3200^2 = 0.05$ 的曲线得 $T_{v90} = 0.11$, 进而得 $t_{90} = 0.11 \times 3200^2 / (0.0658 \times 86400) = 198$ 天。

参 考 文 献

- 1 Gray H. Simultaneous Consolidation of Contiguous Layers of Unlike Compressible Soils. Trans ASCE, 1945, 110: 1327~1356.
- 2 Schiffman R L, Stein J R. One-dimensional Consolidation of Layered Systems. JSMFD ASCE, 1970, 96 (4): 1499~1504.
- 3 陈根媛. 多层地基的一维固结计算方法与砂井地基计算的改进建议. 水利水电科学研究, 1984 (2): 1~13.
- 4 Lee P K K, Xie K H, Cheung Y K. A Study on one Dimensional Consolidation of Layered Systems. Int J for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, 16: 815~831.
- 5 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用. 岩土工程学报, 1994, 16 (5): 26~38.

【书讯】 由江苏大丰县自来水公司高工刘东椿等编著的《图算法在高次方程和工程计算中的应用》一书, 将由同济大学出版, 科技新书目 369 期已向全国征订。该书用图算法简化了中日水力学教材、给水排水设计手册、机械工程手册、建筑结构、材料力学等书籍的一些试算法, 连带介绍的三种高次方程图算法具有通用性。这些新算法对其他专业也有启迪作用。

此书每本 7 元 (含邮费), 欲购请速与作者联系。地址: 大丰县自来水公司, 邮编: 224100。

作者还准备举办培训班推广这一应用技术。