

求解地基动力柔度系数的近似方法*

楼梦麟

(同济大学结构理论研究所, 上海, 200092)

Ahmed Ghobarah Tarek S Aziz

(McMaster University, Hamilton, Canada)

1 引言

近年来, 土-结构动力相互作用日益被人们所重视, 在线性问题的范畴内, 研究这类问题的方法主要分为两类, 整体分析方法^[1]和子结构方法^[2]。应用子结构方法的关键之一是获取地基的阻抗矩阵, 针对不同性质的地基有不同的计算方法, 诸如波动方程法、有限单元法、半解析法和混合法等。已有的研究^[3]表明: 考虑了地基材料阻尼作用之后 (这种考虑更接近于工程实际), 当地基取到一定范围时, 波动的辐射影响已经很小, 可以忽略。这样可以用有限范围的地基来近似具有无限远边界的地基, 如图1所示, 便于直接应用有限单元法等大家所熟悉的数值方法。采用这一近似逼近法的优点还在于能比较合理地模拟结构周围近场地基的不均匀性和复杂的地形条件以及结构埋深等影响。经有限单元离散后, 地基阻抗矩阵 $[G]$ 的物理意义是指结构与地基交界面 (如图1中 $a-a-b-b$ 面) 上结点力与结点位移间的对应函数关系, 例如 $[G]$ 中元素 g_{ij} 是指在 j 自由度产生单位位移、其它自由度不变位的情况下各自由度上所作用的力, 一般来说, 直接求解 g_{ij} 相对比较困难, 而采用求解柔度系数的方法, 然后再由柔度系数求得阻抗矩阵就较容易了。求解柔度系数时常有两种方式, 其一是在交界面的各自由度上依次作用单位简谐力求得交界面各自由度的动变位 (称为动力柔度系数), 其二是在交界面上两相邻结点之间依次作用一分布简谐力 (合力为1) 求出柔度系数, 前者可直接对柔度系数矩阵求逆而得阻抗矩阵, 而后者需应用虚功原理。第二种方式的优点是, 当地基与结构采用不同类型的有限单元时, 可以保证结构与地基交界面处力的连续性条件。

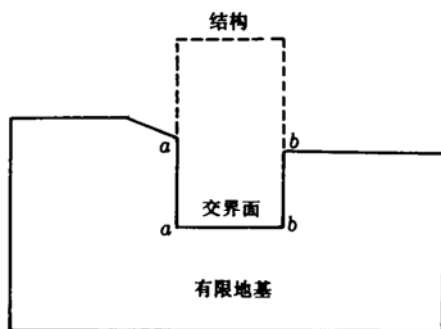


图1 土-结构相互作用示意图

2 分段中点迭代法

经有限单元离散后, 地基的运动方程为

* 本课题为获得国家教育委员会留学回国人员资助费支持项目。
到稿日期: 1993-05-11.

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + \{f_c(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (1)$$

式中 $\{\ddot{u}(t)\}, \{u(t)\}$ 分别为加速度和位移向量; $\{f_c(t)\}$ 为地基内的阻尼力向量; $\{p(t)\}$ 为外荷载, 是前述两种单位作用力方式形成的结点力向量, 当作用力为简谐力且地基土介质的弹性阻尼性质用复模量表示时, 阻尼力可表为 $i[C]\{u(t)\}$, $i = \sqrt{-1}$, 而阻尼阵 $[C]$ 由各单元刚度阵 $[K_j^e]$ 与粘滞阻尼系数 η_j 的乘积组装而成。

$$[C] = \sum_j \eta_j [\beta_j]^T [K_j^e] [\beta_j] \quad (2)$$

这时式 (1) 可写为

$$([K] + i[C] - \omega^2[M])\{U_n(\omega)\} = \{P_n\} \quad (3)$$

式中 $\{u_n(t)\} = \{U_n(\omega)\}e^{i\omega t}$; $\{p_n(t)\} = \{P_n\}e^{i\omega t}$ 。下标“ n ”表示简谐外力作用于第 n 结点或 n 与 $n-1$ 结点间的边界上, ω 为简谐力的圆频率。为简便起见, 方程 (3) 可写为

$$[S(\omega)]\{U_n(\omega)\} = \{P_n\} \quad (4)$$

当给定 ω 值时, $[S(\omega)]$ 为一复数常数矩阵, 因此其解 $\{U_n(\omega)\}$ 也为复数位移向量, 式 (4) 是一复数线性代数方程组, 同实数线性代数方程组求解一样, 当 $[S(\omega)]$ 为高阶系数矩阵时, 采用直接求逆的方法是不可取的, 应采用如下复数 Cholesky 分解法:

$$[S(\omega)] = [L(\omega)][L(\omega)]^T \quad (5)$$

这样式 (4) 的求解转化为

$$[L(\omega)]\{V_n(\omega)\} = \{P_n\} \text{ 和 } [L(\omega)]^T\{U_n(\omega)\} = \{V_n(\omega)\} \quad (6)$$

在频率域内求解土-结构动力相互作用问题常采用快速 Fourier 变换方法, 这就意味着将对各离散频率点 (一般取为 2^{10} 个点) 都需逐一求解式 (4), 计算工作量非常之大, 若能不逐一频率点计算动力柔度系数, 无疑能有效提高计算效率。设 ω_0 和 ω_j 分别为两个计算频率, 柔度系数分别由下式决定 (式中下标“ n ”已被省略):

$$[S(\omega_0)]\{U(\omega_0)\} = \{P\} \quad (7)$$

$$[S(\omega_j)]\{U(\omega_j)\} = \{P\} \quad (8)$$

设 $\omega_j = \omega_0 + \Delta\omega_j$, 则式 (8) 中的系数矩阵可写为

$$[S(\omega_j)] = [S(\omega_0)] - (2\omega_0\Delta\omega_j + \Delta\omega_j^2)[M] \quad (9)$$

$$\text{若 } \{U(\omega_j)\} = \{U(\omega_0)\} + \{\Delta U_j\} \quad (10)$$

则利用式 (9) 后, 式 (8) 可写为

$$[S(\omega_0)]\{\Delta U_j\} = (2\omega_0\Delta\omega_j + \Delta\omega_j^2)[M](\{U(\omega_0)\} + \{\Delta U_j\}) \quad (11)$$

上式表明, 当 $\Delta\omega_j$ 与 $\{\Delta U_j\}$ 为小量时, 位移增量 $\{\Delta U_j\}$ 可近似为

$$[S(\omega_0)]\{\Delta U_j\} = (2\omega_0\Delta\omega_j + \Delta\omega_j^2)[M]\{U(\omega_0)\} \quad (12)$$

由于 $[S(\omega_0)]$ 已完成 Cholesky 复分解, 式 (12) 的求解只需在式 (7) 三角分解已完成的基础上完成式 (6) 所描述的前后回代计算 (这时式 (6) 中的 ω 应为 ω_0) 就可求得 $\{\Delta U_j\}$, 然后由式 (10) 求得 $\{U(\omega_j)\}$ 。这比直接求解式 (8) 省略了式 (5) 的分解过程, 可达简化计算的目的。若为了提高 $\{\Delta U_j\}$ 的精度, 可从式 (11) 建立迭代格式

$$[S(\omega_0)]\{\Delta U_j^{(k)}\} = (2\omega_0\Delta\omega_j + \Delta\omega_j^2)[M](\{U(\omega_0)\} + \{\Delta U_j^{(k-1)}\}) \quad (13)$$

[算例 1] 一对称有限平面地基的单元网格如图 2 所示, 图中只画出一半范围。均匀介质的弹性模量 $E = 29.4\text{GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.33$, 粘滞阻尼系数 $\eta = 0.1$, 容重 $\gamma = 23.5\text{kN/m}^3$ 。

在结点1作用水平方向的单位简谐力 $e^{i\omega t}$, 先由式 (7) 计算出 $\omega_0 = 15\text{rad/s}$ 时的 $\{U(\omega_0)\}$, 然后在此结果的基础上, 利用式 (13) 求出 ω_0 附近域内各频率点处柔度系数的近似值, 再与真实解相比较。表1中列出了图2中表面结点的柔度系数 U_{rs} 的实部和虚部相对误差以及迭代次数 k , U_{rs} 中下标“ r ”表示图中点号, “ s ”表示方向。

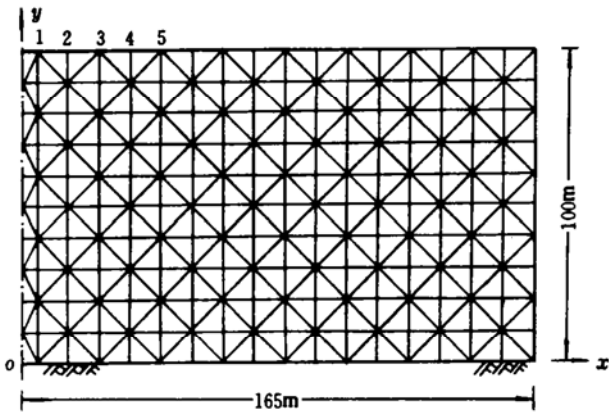


图2 对称有限地基及其有限元网格

表1 表面柔度系数的实部和虚部相对误差及迭代次数 k

$\Delta\omega_j$	k	相对误差 (%)									
		U_{1x}	U_{1y}	U_{2x}	U_{2y}	U_{3x}	U_{3y}	U_{4x}	U_{4y}	U_{5x}	U_{5y}
-5.0	2	0.11 (0.56)	0.00 (0.01)	0.14 (0.73)	0.00 (0.01)	0.18 (0.91)	0.00 (0.02)	0.22 (1.09)	0.01 (0.03)	0.26 (1.27)	0.02 (0.07)
-2.0	2	0.01 (0.05)	0.00 (0.00)	0.01 (0.07)	0.00 (0.00)	0.02 (0.08)	0.00 (0.00)	0.02 (0.10)	0.00 (0.00)	0.02 (0.11)	0.00 (0.01)
-1.0	1	0.04 (0.15)	0.00 (0.00)	0.05 (0.19)	0.00 (0.01)	0.07 (0.24)	0.00 (0.01)	0.08 (0.28)	0.01 (0.02)	0.09 (0.31)	0.01 (0.03)
1.0	1	0.05 (0.18)	0.00 (0.01)	0.06 (0.23)	0.00 (0.01)	0.08 (0.27)	0.00 (0.01)	0.09 (0.31)	0.01 (0.04)	0.11 (0.35)	0.01 (0.04)
2.0	2	0.02 (0.08)	0.00 (0.00)	0.02 (0.10)	0.00 (0.00)	0.03 (0.12)	0.00 (0.00)	0.03 (0.15)	0.00 (0.00)	0.03 (0.15)	0.00 (0.01)
5.0	2	0.36 (1.73)	0.00 (0.01)	0.05 (2.09)	0.00 (0.02)	0.56 (2.40)	0.01 (0.05)	0.65 (2.68)	0.02 (0.11)	0.74 (2.03)	0.04 (0.23)

注: 括号内为虚部相对误差。

上述算例表明, 以某一频率点为中心, 采用近似计算方法, 可以获得具有良好精度的相邻频率域的柔度系数。这说明在频率域内求解地基柔度系数可采用分段中点迭代法。即将频率域分成若干区段, 先计算出各区段中点频率的地基动力位移解, 然后以此解为基础, 通过迭代计算, 近似求出这一区段内其它频率点处的地基动力柔度系数, 一般说迭代次数不易过多。在上述算例中, 当迭代次数为5次 ($k=6$) 时, 就和直接求解的计算时间相当, 达不到节省计算工作的目的。

3 复数静力子结构法

众所周知, 大型实系数线性代数方程组的求解可采用静力子结构方法, 对于形如式 (4) 的大型复系数线性代数方程组的求解也可实施静力子结构方法, 但此时全部为复数运算, 故称为复数静力子结构法, 以示区别。复数静力子结构法的实施过程和原理与实数静力子结构

法相同,也是精确算法,不会引入算法误差。下面简要叙述其主要步骤。设第 k 个子结构的复刚度阵为 $[S^{(k)}(\omega)] = [K^{(k)}] + i[C^{(k)}] - \omega^2[M^{(k)}]$, 将其按内部自由度与边界自由度(分别以下标“ I ”和“ B ”表示)进行如下分块:

$$[S^{(k)}(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{II}^{(k)}(\omega) & S_{IB}^{(k)}(\omega) \\ S_{BI}^{(k)}(\omega) & S_{BB}^{(k)}(\omega) \end{bmatrix} \quad (14)$$

a) 将各子结构复刚度阵凝聚到边界自由度上

$$[\bar{S}_{BB}^{(k)}(\omega)] = [S_{BB}^{(k)}(\omega)] - [S_{BI}^{(k)}(\omega)][S_{II}^{(k)}(\omega)]^{-1}[S_{IB}^{(k)}(\omega)] \quad (15)$$

b) 组装各子结构的凝聚复刚度阵形成系统的凝聚复刚度阵

$$[\bar{S}_{BB}(\omega)] = \sum_k [\alpha^{(k)}]^T [\bar{S}_{BB}^{(k)}(\omega)] [\alpha^{(k)}] \quad (16)$$

式中 $[\alpha^{(k)}]$ 为升阶组装矩阵。

c) 将外荷载凝聚到边界自由度上

$$\{\bar{P}_B^{(k)}\} = \{P_B^{(k)}\} - [S_{BI}^{(k)}(\omega)][S_{II}^{(k)}(\omega)]^{-1}\{P_I^{(k)}\} \quad (17)$$

$$\{\bar{P}_B\} = \sum_k [\alpha^{(k)}]^T \{\bar{P}_B^{(k)}\} \quad (18)$$

d) 求解凝聚边界上的复数位移

$$[\bar{S}_{BB}(\omega)]\{U_B(\omega)\} = \{\bar{P}_B\} \quad (19)$$

e) 求解各子结构内部自由度位移

$$\{U_I^{(k)}(\omega)\} = [S_{II}^{(k)}]^{-1}(\{P_I^{(k)}\} - [S_{IB}^{(k)}(\omega)]\{U_B^{(k)}(\omega)\}) \quad (20)$$

上述为复数静力子结构法的一般计算步骤,在求解地基柔度系数这一特殊问题时,由于荷载向量的特殊形式, $\{\bar{P}_B\}$ 的计算可以简化,例如当单位简谐集中力作用于第 l 个子结构的第 n 个内部自由度上时,其他子结构中无荷载向量。若以 $\text{col}^{(n)}(A)$ 表示取 $[A]$ 中第 n 列子向量,则式 (18) 为

$$\{\bar{P}_B\} = -[\alpha^{(l)}]^T \cdot \text{col}^{(n)}([S_{BI}^{(l)}(\omega)][S_{II}^{(l)}(\omega)]^{-1}) \quad (21)$$

对应地,式 (20) 为

$$\{U^{(k)}(\omega)\} = \begin{cases} -[S_{II}^{(k)}(\omega)]^{-1}[S_{IB}^{(k)}(\omega)]\{U_B^{(k)}(\omega)\} & (k \neq l) \\ [S_{II}^{(l)}(\omega)]^{-1}(\{P_I^{(l)}\} - [S_{IB}^{(l)}(\omega)]\{U_B^{(l)}(\omega)\}) & (k = l) \end{cases} \quad (22)$$

如果单位简谐力作用在凝聚边界上,则 $\{\bar{P}_B\}$ 的形式更为简单, $\{\bar{P}_B\} = [\alpha^{(l)}]^T \{P_B^{(l)}\}$, 仅有一个元素为 1, 其余元素为零。

[算例 2] 有一层厚为 H 的均匀层状地基,在宽为 b 的表面上作用一均布简谐力 $\frac{1}{b}e^{i\omega t}$, 地基的表面柔度系数已有波动方程的解^[4], 现取为有限地基来近似模拟层状地基,并以复数静力子结构法来计算。利用对称性,子结构划分如图 3 所示。分析中的计算参数 $H=2.5b$, $\eta=0.25$, $a_0=\frac{\omega b}{C_s}=0.16$, $\nu=0.33$, $L=21.5b$, $M=7$ 。地基表面柔度系数的波动方程解与有限元近似解如图 4 所示。图中 U , V 分别表示水平和垂直位移,下标 x , y 表示作用力方向。这一算例结果表明,采用有限范围地基去近似模拟具有无限远边界的层状地基具有良好的精度。采用复数子结构法时,由于复数运算的影响,一般只有当所划分的子结构具有重复性时才能发挥减少时间的作用。

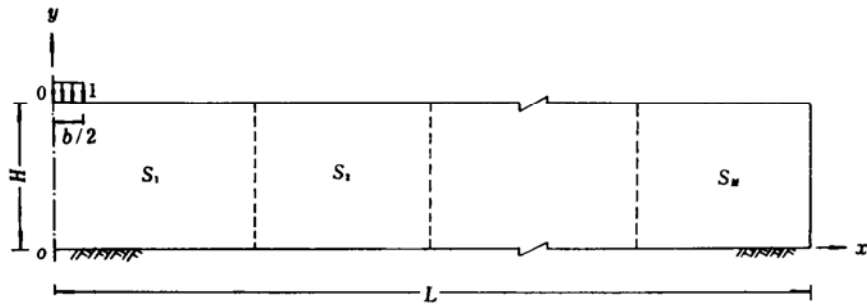


图 3 层状地基的子结构划分示意图

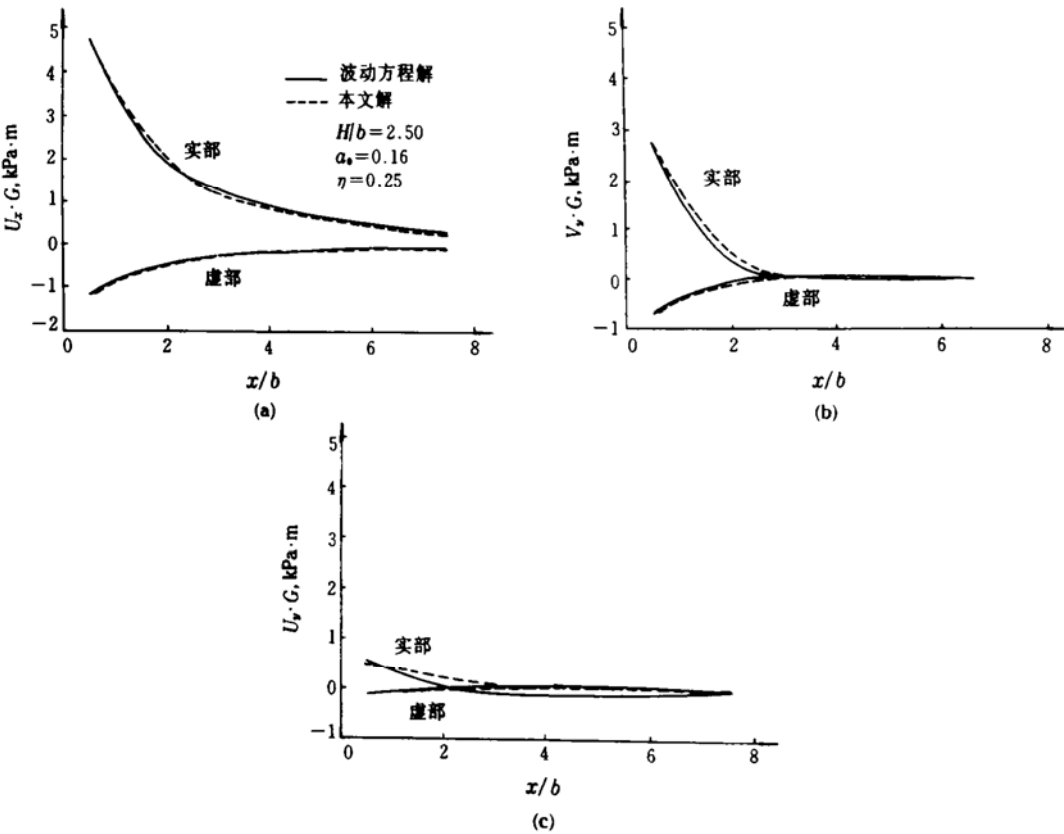


图 4 层状地基的动力柔度系数

4 与静力子结构法相结合的分段中点迭代法

在前述分段中点迭代法中，只要改变式 (13) 右端荷载向量就可利用式 (7) 的解求得式 (8) 的近似解而减少计算工作量，将这一方法与静力子结构法相结合时，与式 (7)、式 (8) 相对应的是式 (19)，利用 $\omega = \omega_0$ 时的静力子结构法的解（只需改变式 (19) 右端的凝聚荷载向量）就可建立下列计算位移增量的迭代格式：

$$[\bar{S}_{BB}(\omega_0)]\{\Delta U_B^{(k)}(\omega_j)\} = \{\Delta \bar{P}_B^{(k-1)}(\omega_j)\} \tag{23}$$

式中 k 为迭代次数, $\{\Delta \bar{P}_B^{(k-1)}(\omega_j)\}$ 是将式(13)右端项 $(2\omega_0\Delta\omega_j + \Delta\omega_j^2)[M](\{U(\omega_0)\} + \{\Delta U_j^{(k-1)}\})$ 经由式(17)、(18)计算而得。在求得了凝聚边界位移增量之后,就可求得在 $\omega = \omega_j$ 时的凝聚边界位移 $\{U_B(\omega_j)\} = \{U_B(\omega_0)\} + \{\Delta U_B(\omega_j)\}$, 然后内部自由度位移的近似解仍由式(20)求出。式(23)与式(13)相比,方程的阶数要比式(13)少得多,相应地迭代计算量就可得到减少。

[算例3] 仍以图3所示层状地基为例,考虑4种计算情况: ① $\omega_0 = 35.31\text{rad/s}$, $\Delta\omega = -1.0\text{rad/s}$; ② $\omega_0 = 36.31\text{rad/s}$, $\Delta\omega = -2.0\text{rad/s}$; ③ $\omega_0 = 39.31\text{rad/s}$, $\Delta\omega = -5.0\text{rad/s}$; ④ $\omega_0 = 44.31\text{rad/s}$, $\Delta\omega = -10.0\text{rad/s}$ 。这几种计算情况最后都得 $\omega_j = \omega_0 + \Delta\omega = 34.31\text{rad/s}$ (无量纲频率 $a_0 = 0.16$) 时的近似解,然后与波动方程解相比较,各相对误差列于表2中。在采用静力子结构法与分段中点迭代法相结合的方法与应用式(23)时, $k = 1$, 即没有进行迭代计算。表中数值表明,即使 $\Delta\omega$ 值很大,不采用迭代计算,应用分段中点迭代法仍具有很好的计算精度,这使得这一方法在实际应用中产生良好效果。

表 2

层状地基表面柔度系数的相对误差

($\omega_j = 34.31\text{rad/s}$, $a_0 = 0.16$, $k = 1$)

柔度系数	计算情况	实部相对误差 (%)				虚部相对误差 (%)			
		x/b				x/b			
		0.5	1.5	2.5	3.5	0.5	1.5	2.5	3.5
U_x	①	0.000	0.001	0.001	0.002	0.006	0.005	0.031	0.002
	②	0.000	0.003	0.005	0.007	0.002	0.002	0.009	0.009
	③	0.013	0.023	0.035	0.046	0.011	0.016	0.050	0.062
	④	0.060	0.108	0.165	0.217	0.051	0.072	0.265	0.298
V_y	①	0.002	0.000	0.010	0.000	0.001	0.002	0.031	0.053
	②	0.006	0.001	0.003	0.000	0.003	0.004	0.008	0.012
	③	0.003	0.006	0.016	0.006	0.009	0.021	0.056	0.142
	④	0.011	0.026	0.068	0.026	0.043	0.093	0.250	0.603
U_y	①	0.000	0.003	0.004	0.009	0.001	0.001	0.015	0.002
	②	0.000	0.001	0.001	0.003	0.002	0.031	0.044	0.008
	③	0.002	0.002	0.002	0.033	0.008	0.014	0.028	0.059
	④	0.008	0.009	0.006	0.172	0.038	0.062	0.127	0.275

参 考 文 献

- 1 Ghosh S, Wilson E L. Dynamic Stress Analysis of Axisymmetric Structures under Arbitrary Loading. Report UCB/EERC 69-10, 1969.
- 2 Gutierrez J A, Chopra A K. A Substructure Method for Earthquake Analysis of Structures Including Structure-Soil Interaction. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1978, 7 (6): 51~70.
- 3 楼梦麟, 林皋. 粘弹性地基中人工边界的波动反射效应. 水利学报, 1986 (6): 20~30.
- 4 楼梦麟. 粘弹性地基的动力刚度矩阵及坝基相互作用对水坝地震反应的影响 [学位论文]. 大连理工大学土木系, 1984.