

岩石节理的分形描述

谢和平

(中国矿业大学分形力学研究所, 徐州, 221008)

文摘 本文给出了6种节理的分形量测方法, 讨论了岩石节理粗糙性的分形描述, JRC和分形维数的关系, 以及分维对节理抗剪强度和节理摩擦角的影响。可以说, 分维能定量地刻画节理的粗糙性, 并有可能用来预测节理抗剪强度和节理摩擦角。

关键词 岩石节理, 节理粗糙系数, 分形, 分维。

1 前言

岩石节理特性的研究主要在于研究节理的力学特性, 即强度和刚度; 而节理的力学特性又取决于节理粗糙性、岩石的强度和节理的张开宽度。

Barton^[1]在1973年提出了预测岩石节理峰值剪切强度 τ 的经验关系式

$$\tau = \sigma \tan[\text{JRC}(\text{JCS}/\sigma) + \varphi_b] \quad (1)$$

式中 σ 为有效法向应力; φ_b 为岩体的基本摩擦角, JRC是节理粗糙系数, JCS是节理壁压缩强度。Jaeger^[2]也提出了节理剪切强度非线性地相关于节理粗糙性的经验公式。在目前所有节理力学性质模型中, JRC是唯一的未知量, 需要人们去估测。1978年Barton^[3]定义了从0~20的10种JRC值的典型曲线(或剖面), 现已被国际岩石力学协会接受为节理粗糙度的表示方法。后来Tse & Gruden^[4]发展了一个经验统计关系来估计JRC值。目前, 节理粗糙性仍然未能达到定量描述。

实际上JRC是表征节理面粗糙性的一个几何参数。而由Mandelbrot^[5]发展的分形几何中的分形维数也可以用来描述这种粗糙性。将分形维数与JRC的自然结合来描述节理粗糙性, 最近已有一些研究^[6,7]。Turk等^[8], Carr^[9], Muralha & Charrua-Grace^[10], Lee等^[11]以及Wakabayashi & Fukushige^[12]使用分形几何的码尺方法^[6]直接测量了节理剖面的分形维数。Muralha^[13]使用周长-面积关系^[5,6]间接地测量了节理剖面的分维。最近我们(Xie & Pariseau^[14])建立了一个节理的分形理论模型来模拟节理的粗糙性。Lee等^[11]和Wakabayashi & Fukushige^[12]作了大量的节理抗剪试验后得到了分维对节理剪切强度的影响关系。可以说, 目前分形已很好地应用于定量地描述节理粗糙度, 并有可能利用分维来预测或估计节理的强度和变形。

2 节理的分维量测方法

粗略地说, 目前已有6种分形量测方法用于对节理剖面或节理表面的分形量测。

• 本研究得到煤炭系统优秀回国人员基金和国家自然科学基金资助。
到稿日期: 1993-08-24.

2.1 码尺法

码尺法是分形最基本量测方法之一,是纯几何量测方法。用码尺 δ 去量测一条节理剖面,如从剖面这一端到另一端所需码尺 δ 去步量的次数为 $N_{(\delta)}$,则剖面长度为 $L_{(\delta)} = N_{(\delta)} \times \delta$ 。如果节理剖面是分形曲线,则

$$N_{(\delta)} \propto \delta^{-D} \quad (2)$$

式中 D 为分形维数。

2.2 修正的码尺法^[15]

Brown (1987) 提出了修正的码尺法。所谓修正码尺法就是在曲线的水平方向进行码尺度量,即码尺选定为 Δx ,而不是用码尺沿剖面轨迹去度量,这样从 x_i 到 x_{i+1} 之间的长度增量可以近似由 $\delta = \Delta x$ 来表示,随码尺的不断变小,这种近似程度就越好。在这种情况下,曲线长度 L 与 δ 之间的分形关系^[5,6], $L \propto \delta^{1-D}$ 依然成立。

2.3 盒维数方法

使用半径为 δ 的圆或边长为 δ 的正方形称之为盒子 (box) 去覆盖节理曲线或表面,所需盒子的数目 $N_{(\delta)}$ 将随 δ 而变化。如果节理的粗糙性是分形,则 $N - \delta$ 关系满足方程 (2),

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{(\delta)}}{\log(1/\delta)} \quad (3)$$

2.4 自仿射分形方法

对自仿射分形剖面或表面,在方差函数和各自相关距离之间的关系为

$$\langle (z_i - z_j)^2 \rangle = k((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{2H}$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示对大量样本点取平均, z_i 是点 (x_i, y_i) 的粗糙高度; k 为比例常数。 H 是相关于分形维数的自仿射因子,即

$$D = n - H \quad (4)$$

对于分形曲线和分形表面, n 分别为 2 和 3。

2.5 幂律谱方法

幂律谱方法来源于时间系列分析,是 60 年代发展起来的一个应用数学分支。在这个方法中,幂律谱是根据剖面数据来计算的。谱方法获得的最长和最短波长正好等于剖面长度和标度间隔的两倍。一般地,从自相似或自仿射表面量测的谱具有幂律谱密度函数关系,即

$$G(\omega) \propto \omega^{-S}; \quad S = \begin{cases} 5 - 2D & (\text{剖面}) \\ 7 - 2D & (\text{表面}) \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\omega = 2\pi/\lambda$ 为角频率。使用这个关系,节理剖面的分形维数估计是根据幂律谱的双对数图的斜率来决定。

2.6 周长-面积关系方法

可以使用一个水平面与节理表面相切来得到像岛-湖形貌一样的等高线图形。这样就可以利用周长-面积的分形关系^[5,6]

$$P_i = kA_i^{D/2} \quad (6)$$

来决定分形维数。式中 P_i 是所量测的等高线周长; A_i 为相应的面积; k 是比例常数。

3 JRC 与分维之间的关系

当假定节理剖面具有统计的自相似性时,就能根据第二节的方法来量测节理的分形维数。

Carr & Warriner (1987)^[16], Turk 等 (1987)^[8] Carr (1989)^[9] 和 Lee 等 (1990)^[11] 已分别使用码尺法量测了现场和实验室的各种节理剖面。Lee 等使用位形记录仪对 10 种典型 JRC 值范围的节理剖面进行了码尺法量测, 得到了中心 JRC 值与分维之间关系为

$$\text{JRC} = -0.878 + 37.7844 (D-1) / 0.015 - 16.930 [(D-1) / 0.015]^2 \quad (7)$$

最近 Wakabayashi & Fukushima^[12] 也应用码尺法量测了几种典型节理剖面, 得到了 JRC 值与分维之间的关系为

$$\text{JRC} = [(D-1) / (4.413 \times 10^{-5})]^{1/2} \quad (8)$$

图 1 给出了方程 (7) 和 (8) 与实测结果的对比曲线。从图 1 可以看到分维 D 随 JRC 的增加而增加, 表明了分维 D 和 JRC 值之间存在某种对应关系, 可以说分维 D 能取代 JRC 值更好地定量刻画节理的粗糙性程度。

但是目前用码尺法量测出的分维值均太小, JRC=18~20 时, $D=1.013435$, 并且所量测的分维值受测量者所使用码尺的尺度范围的影响。这个问题已在文献 [6] 进行了详细的讨论, 这也是量测自然分形经常出现的问题。因为自然分形一般不是一致自相似的。另一方面, 根据分形理论, 精确的分维量测结果应当在适当小的码尺尺度范围内获得。而一般节理位形量测仪的分辨率是有限的, 尺度范围不可能适当地小, 故此导致其分维值很小。然而作为一个统计量, 在相同尺度范围内得出的分维值是可以定量刻画节理粗糙性规律的。

我们 (Xie & Pariseau^[14]) 提出了一个节理分形模型。根据这个模型, 只要去量测节理粗糙度平均基长 L^* 和平均高度 h^* , 就可以估计出节理的分维。即

$$D = \log 4 / \log [2(1 + \cos t g^{-1}(2h^*/L^*))] \quad (9)$$

还发现这个分形维数很强烈地相关于 JRC 值。得到了分维与 JRC 的关系为

$$\text{JRC} = 85.2671(D-1)^{0.5679} \quad (10)$$

图 2 给出了由方程 (9) 和 (10) 估算的 JRC 值与 Barton 典型 JRC 值的比较。

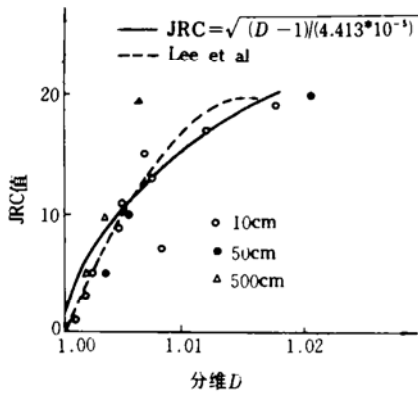


图 1 JRC 与分维关系

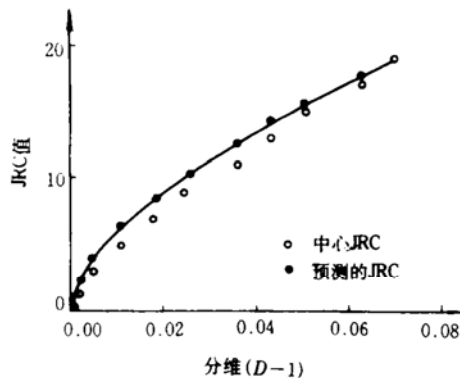


图 2 典型 JRC 中心值和方程 (10) 预测的 JRC 值与分维之间的关系曲线

4 分维对抗剪强度和节理粗糙角的影响

在实验室里我们可以人工生成节理面, 每一组人工生成节理面的分维值可由上述介绍的

节理分维量测方法决定。然后将具有相同分维值的一组节理面啮合在一起进行剪切加载。因为节理表面位形在剪切一次后已发生明显的变化，因此每对节理只剪切一次。从 Lee 等^[11]对 6 组编号为 107, 108, 109, 116, 118, 120 的节理剖面进行剪切试验的结果（表 1）可以看出分维对节理的峰剪强度有较大影响，分维非线性地正比于节理的峰剪强度，即节理的粗糙性将增大节理的抗剪强度。

表 1		节理剪切试验结果	
法向应力 (MPa)	样本号	峰剪应力 (MPa)	分维值
0.17	107	0.39	1.0033
0.17	108	0.46	1.0051
0.17	109	0.42	1.0038
1.72	116	2.91	1.0028
1.72	118	2.71	1.0022
1.72	120	3.01	1.0043

如引入节理粗糙角，则

$$i = \text{JRClog}(\text{JCS}/\sigma) \tag{11}$$

式 (1) 成为

$$\tau = \sigma \text{tg}(i + \varphi_b) \tag{12}$$

式 (12) 表明只要能确定节理摩擦角，就可以决定节理的峰剪强度 τ 。

Turk & Dearman^[17]的研究表明，节理表面的粗糙角 (i) 能由节理剖面的轨迹长度 L_t 和直接长度 L_d 之比来计算，即

$$\cos(i) = L_d/L_t \tag{13}$$

这是决定节理粗糙角的较简便的方法。当考虑节理的分形特征时，轨迹长度和直接长度之间应当满足幂律关系^[17]

$$L_t = L_d^D$$

将上式代入式 (13)，则

$$\cos(i) = L_d^{(1-D)}$$

推广到一般情况，上式可表达为

$$\cos(i) = (CL_d)^{(1-D)} \tag{14}$$

式中 C 为待定参数。这就是根据分维来估计节理粗糙角的基本关系。可是，根据这个方法估计的粗糙角并不能与其它非分形方法估测值达到很好的一致^[17]，这有待我们作进一步的研究。

5 分维的量测方法对节理分维值的影响

由于在分形数学中，不同的分维定义略去了不同的高阶项，因而导致当对同一节理剖面采用不同的量测方法时，产生不同的分维值。

Miller 等^[18]采用码尺法、盒维数、频谱法和修正的码尺法测量了 10 条节理剖面，其结果列于表 2，其中 D_b 表示盒维数， D_s 为谱方法测出的维数， D_d 为码尺法分维， D_m 是修正码尺

法所测分维。根据表 2 可以看出这 4 种方法没有给出一致的分维估计,对同一节理剖面的不同分维值也没有一致的变化趋势。然而,任一量测方法所得分维值存在某一特征规律。比如调整表 2 中码尺法分维 D_d 的次序于表 3,可发现 D_d 值的可比性。如再结合各节理剖面的物理力学特性,可能找出它们的分形规律。由此可以认为,分维可以作为节理粗糙度描述的统计量。至于在节理的分维测定中究竟采用哪一种分维量测方法,这要取决于现有的量测设备和条件,更重要的是取决于所量测的分维结果是否能揭示我们所研究问题的物理实质。

表 2 不同分维量测方法对节理分维值的影响

节理编号	D_s	D_b	D_d	D_m
A	1.258	1.099	1.161	1.129
B	1.246	1.158	1.192	1.123
C	1.202	1.118	1.193	1.157
D	1.191	1.159	1.094	1.103
E	1.383	1.143	1.261	1.199
F	1.309	1.122	1.155	1.128
G	1.263	1.136	1.182	1.200
H	1.274	1.146	1.183	1.147
I	1.225	1.076	1.105	1.103
J	1.124	1.041	1.084	1.058

表 3 不同节理剖面 D_d 值的可比性

节理编号	E	C	B	H	G	A	F	I	D	J
分维 D_d	1.261	1.193	1.192	1.183	1.182	1.161	1.155	1.105	1.094	1.084

6 结 语

尽管分形已广泛应用于节理的描述,但国际上仍有争议。一些人认为节理的粗糙性并非是分形,特别是对同一节理使用不同的分维量测方法可能产生不同的分维值,更增加了对节理分形描述的非议。然而,分形作为一门新的手段和工具,它能较好地定量刻画节理粗糙性,现已得到公认。当然,在分形应用中,使用哪一种分维量测方法,量测的尺度范围的确定,哪一条节理剖面能较客观地代表节理表面,以及节理表面自相似性的各向异性等问题确实是我们今后应深入研究的课题。

参 考 文 献

- 1 Barton N R. Review of a New Shear Strength Criterion for Rock Joints. Engineering Geology, Elsevier, Amsterdam, 1973, 17: 287~332.
- 2 Jaeger J C. Friction of Rocks and Stability of Rock Slops. Geotechnique, 1971, 21: 97~134.
- 3 Barnford W E, et al. Suggested Methods for the Quantitative Description of Discontinuities in Rock Masses. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1978, 15: 319~369.
- 4 Tse R, Gruden D M. Estimating Joint Roughness Coefficients. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr,

- 1979, 16: 303~307.
- 5 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. New York, Freeman W H, 1982. 16, 32.
 - 6 Xie H. Fractals in Rock Mechanics. Balkema A A Publishers, Netherlands, 1993. 357~397.
 - 7 Xie H. Fractals - Rock Mechanics. In: Lecture Notes Given at the University of Utah. U S A, 1990. 1~50.
 - 8 Turk N, et al. Characterization of Rock Joint Surfaces by Fractal Dimension. In: 28th U S Symp on Rock Mechanics. Tucson, 1987. 1223~1236.
 - 9 Carr J R. Fractal Characterization of Joint Surface Roughness in Welded Tuff at Yucca Mountain, Nevada. In: Rock Mechanics as a Guide for Efficient Utilization of Natural Resources. Rotterdam, Balkema, 1989: 193~200.
 - 10 Muralha J, Charrua - Grace J G. An Experience on the Application of Fractal Theory to Basic Shear Strength Studies. In: Barton N R, et al (eds) . Rock Joints. Balkema, 1990: 667~671.
 - 11 Lee Y H, Carr J R, Bars D J, Haas C J. The Fractal Dimension as a Measure of the Roughness of Rock Discontinuity Profiles. Int J Rock Mech Min Sci & Gemech Abstr, 1990, 27: 453~464.
 - 12 Wakabayashi N, Fukushige I. Experimental Study on the Relation between Fractal Dimension and Shear Strength. In: Proc of Int Symp for Fractured & Jointed Rock Masses. Berkeley, 1992. 101~110.
 - 13 Muralha J. Fractal Dimension of Joint Roughness Surface. In: Proc of Int Symp for Fractured & Jointed Rock Masses. Berkeley, 1992. 87~95.
 - 14 Xie H, Pariseau W G. Fractal Estimation of Joint Roughness Coefficient. In: Proc of Int Conf on Fractured and Jointed Rock Masses. Berkeley, 1992. 72~86.
 - 15 Brown S R. A Note on the Description of Surface Roughness Using Fractal Dimension. Geophys, Research Lett, 1987, 14: 1095~1098.
 - 16 Carr J R, Warriner J B. Rock Mass Classification Using Fractal Dimension. In: 28th U S Symp on Rock Mechanics. Tucson, 1987: 73~80.
 - 17 Turk N, Dearman W R. Investigation of Some Rock Joint Properties: Roughness Angle Determination and Joint Closure. In: Proc Int Symp on Fundamentals of Rock Jointed. Sweden, Bjorhliden, 1985: 197~204.
 - 18 Miller S M, et al. Ambiguities in Estimating Fractal Dimensions of Rock Fracture Surfaces. In: Proc of 31st U S Symp on Rock Mechanics. Balkema A A Publishers, 1990. 471~478.

Fractal Description of Rock Joints

Xie He - ping

(Institute of Fractal Mechanics, China University of Mining & Technology, Xuzhou)

Abstract In this paper, six methods of fractal dimension measurements for a joint are given. Fractal description of the joint asperity, relationship between JRC and fractal dimension, and the effect of fractal dimension on shear strength and friction angle of joints are discussed. Fractal dimension can be used to quantitatively describe joint roughness and to estimate strength and friction angle of joint.

Key words rock joint, JRC, fractal, fractal dimension.