

非饱和土的有效应力探讨

陈正汉

(后勤工程学院, 重庆, 630041)

王永胜

谢定义

(能源部西北水电勘测设计院, 西安, 710001)

(陕西机械学院, 西安, 710048)

文 摘 本文推导了各向异性多孔介质与非饱和土有效应力的理论公式, 用三轴试验测定了非饱和土的有效应力参数, 澄清了国内外一些学者近期在同类工作中的某些误解。

关键词 有效应力, 有效应力参数, 非饱和土, 多孔介质。

1 引 言

非饱和土的有效应力是土力学界研究并争论多年的一个问题^[1]。由于Terzaghi提出的饱和土的有效应力公式

$$\sigma' = \sigma - u_w \quad (1)$$

与有效应力原理的成功应用, 促使人们对非饱和土进行相应的研究, 并在六十年代提出了多种有效应力表达式^[2]。其中最流行的是Bishop提出的下述方程

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma - u_a + \chi(u_a - u_w) \\ &= \sigma - [\chi u_w + (1 - \chi)u_a] \end{aligned} \quad (2)$$

式中 σ' , σ , u_a 和 u_w 分别是有效应力、总应力、孔隙气压力和孔隙水压力; χ 称为有效应力参数, 它与土类、饱和度、问题的性质(是变形问题还是强度问题)等因素有关, 其值在 0 与 1 之间。对于饱和土, $\chi = 1$; 对于干土, $\chi = 0$ 。按Skempton的解释, χ 值可理解为单位土面积上水压力作用的面积^[3]。

考虑到土颗粒的压缩性, Biot和Willis^[4], Skempton^[3], Nur和Byerlee^[5]先后从不同角度推得控制饱和土体变的有效应力的精确表达式为

$$\sigma' = \sigma - (1 - \frac{C_s}{C})u_w \quad (3)$$

或
$$\sigma' = \sigma - (1 - \frac{K}{K_s})u_w \quad (4)$$

式中 C , C_s , K , K_s 依次为土骨架的压缩性、土颗粒的压缩性、土骨架的体变模量和土颗粒的体变模量。类比式(3), (4)与(1)的关系, Skempton直接给出非饱和土的相应公式

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma - \left(1 - \frac{C_s}{C}\right) [\chi u_w + (1 - \chi) u_a] \\ &= \sigma - \left(1 - \frac{K}{K_s}\right) [\chi u_w + (1 - \chi) u_a]\end{aligned}\quad (5)$$

由于Bishop公式(式(2))是从唯象观点出发提出的, 且其中的参数 χ 测定困难, 因而不少学者对它的正确性持怀疑态度。包承纲于1986中明确指出^[6], Bishop公式“既未从理论上加以论证, 也未从试验中加以充分检验。”因此, 有必要用理论方法对该式加以严密考察, 弄清其适用范围。

本文从弹性理论出发, 仅就体变方面对非饱和土的有效应力公式及相应的参数测定问题加以探讨, 并对近期提出的一些有效应力公式作一简析。

2 有效应力的理论公式

首先考虑各向异性线变形的多孔介质, 如岩石、混凝土等。设试样受到的总应力为 σ_{ij} , 孔隙中充满着两种不溶混的流体, 且两种流体各自连通。设 n 是多孔介质的孔隙率, s 是第一种流体的饱和度, 则在单位体积中两种流体所占的体积分别是 sn 和 $(1-s)n$ 。令与两种流体对应的孔隙压力分别是 P_1 和 P_2 , 且 $P_2 > P_1 > 0$ 。试样受到的这种应力状态可以设想是经过三个加载步骤实现的。

第一步, 在孔隙 sn 中施加孔压 P_1 , 在孔隙 $(1-s)n$ 中施加 $P_2^1 = P_1$, 并在试样外围施加总应力 $\sigma_{ij}^1 = P_1 \delta_{ij}$ 。此处, δ_{ij} 是Kronecker符号, 对于 $i=j$, $\delta_{ij}=1$; 对于 $i \neq j$, $\delta_{ij}=0$ 。这时, 从变形上看, 试样等价于一个无孔固体, 即试样中的孔隙可用骨架材料填充。试样的应变 ε_{ij}^1 为

$$\varepsilon_{ij}^1 = C_{ijkl}^0 P_1 \delta_{kl} \quad (6)$$

式中 C_{ijkl}^0 是多孔介质骨架材料的变形柔度张量。

第二步, 在孔隙 $(1-s)n$ 中施加 $P_2^2 = P_2 - P_1$, 在试样外围施加总应力 $\sigma_{ij}^2 = P_2^2 \delta_{ij}$ 。这时孔隙 $(1-s)n$ 部分可用骨架材料代替, 试样等价于一个孔隙率为 sn 的多孔固体。其应变 ε_{ij}^2 为

$$\varepsilon_{ij}^2 = C_{ijkl}^n (P_2 - P_1) \delta_{kl} \quad (7)$$

式中 C_{ijkl}^n 是孔隙率为 sn 的多孔材料的柔度张量。

第三步, 对试样仅施加外围总应力 σ_{ij}^3

$$\sigma_{ij}^3 = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij} - P_2 \delta_{ij} \quad (8)$$

这时试样等价于一个孔隙率为 n 但无孔隙流体的多孔固体。其应变 ε_{ij}^3 为

$$\varepsilon_{ij}^3 = C_{ijkl}^n (\sigma_{kl} - P_2 \delta_{kl}) \quad (9)$$

式中 C_{ijkl}^n 是孔隙率为 n 的多孔固体的柔度张量。

根据线弹性假设, 应用叠加原理得试样的总应变 ε_{ij} 为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^3 \quad (10)$$

另一方面, 根据有效应力的概念, 有

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^n \sigma'_{kl} \quad (11a)$$

$$\text{或} \quad \sigma'_{ij} = M_{ijkl}^n \varepsilon_{kl} \quad (11b)$$

式中 σ'_{ij} 为有效应力张量; M_{ijkl}^n 是孔隙率为 n 的多孔固体的弹性模量张量。把式(6)~(10)代入式(11b)得

$$\sigma'_{ij} = M_{ijkl}^n [P_1 C_{klmn}^0 + (P_2 - P_1) C_{klmn}^{sn} + C_{klmn}^n \sigma_{mn} - P_2 C_{klmn}^n] \quad (12)$$

利用恒等式

$$M_{ijkl}^n C_{klmn}^n = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \quad (13)$$

式(12)变为

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - P_1 M_{ijkl}^n (C_{klmn}^{sn} - C_{klmn}^0) - P_2 (\delta_{ij} - M_{ijkl}^n C_{klmn}^{sn}) \quad (14)$$

这就是各向异性弹性多孔介质中有两种不溶混流体各自连通时的有效应力公式。这里所说的各向异性包括三个方面: ①骨架材料本身的各向异性, 由 C_{klmn}^0 代表; ②孔隙率为 n 的多孔介质的结构的各向异性, 由 M_{ijkl}^n 反映; ③孔隙率为 sn 的多孔介质的结构的各向异性, 由 C_{klmn}^{sn} 体现。

若骨架材料和两种有孔隙结构的多孔介质都是各向同性的, 利用

$$\begin{aligned} M_{ijkl}^n &= \lambda^n \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^n (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ C_{klmn}^0 &= \frac{1}{3K^0} \delta_{kl} \\ C_{klmn}^{sn} &= \frac{1}{3K^{sn}} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (15)$$

式(14)简化为

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - P_1 \left(\frac{K^n}{K^{sn}} - \frac{K^n}{K^0} \right) \delta_{ij} - P_2 \left(1 - \frac{K^n}{K^{sn}} \right) \delta_{ij} \quad (16)$$

在式(15)和式(16)中, K^0 、 K^n 和 K^{sn} 分别是固体材料本身、孔隙率为 n 的多孔介质与孔隙率为 sn 的多孔介质的体变模量, λ^n 和 μ^n 是孔隙率为 n 的多孔介质的Lame常数。

对非饱和土而言, 因孔隙水压力为负值, 情况稍复杂一点。为简化讨论, 我们仅研究各向同性的情况。设土样受到的总应力为 σ , 孔隙水压力 $u_w < 0$, 孔隙气压力 $u_a > 0$ 。仍设想土的应力状态是通过三个加载步骤实现的。

第一步, 施加 $\sigma^1 = u_a^1 = u_w < 0$, 土粒受拉应力作用, 体应变 θ_1 为

$$\theta_1 = -\frac{1}{K} |u_w| = \frac{1}{K} u_w \quad (17)$$

式中 K 为土粒的膨胀模量。

第二步, 在 $(1-s)n$ 孔隙部分施加 $u_a^2 = u_a + |u_w| = u_a - u_w$, $\sigma^2 = u_a^2$, 土的体变 θ_2 为

$$\theta_2 = \frac{1}{K^{sn}} u_a^2 = \frac{1}{K^{sn}} (u_a - u_w) \quad (18)$$

第三步, 只施加围压 $\sigma^3 = \sigma - \sigma^1 - \sigma^2 = \sigma - u_w$, 土的体变 θ_3 为

$$\theta_3 = \frac{1}{K^n} \sigma^3 = \frac{1}{K^n} (\sigma - u_w) \quad (19)$$

结合式(17)~式(19)得土的总应变 θ , 并代入有效应力公式

$$\sigma' = K^n \theta \quad (20)$$

就得
$$\sigma' = \sigma - \left(\frac{K^n}{K^{sn}} - \frac{K^n}{K^0} \right) u_w - \left(1 - \frac{K^n}{K^{sn}} \right) u_a \quad (21)$$

对土粒而言, 在小变形条件下可认为 $K = K^0$, 则式(21)就归结为式(16)。因此, 式(16)也是非饱和土的有效应力的普遍表达式。

若土粒是不可压缩的, $K^0 \rightarrow \infty$, 式(21)变为

$$\sigma' = \sigma - \left[\frac{K^n}{K^{sn}} u_w + \left(1 - \frac{K^n}{K^{sn}} \right) u_a \right] \quad (22)$$

与Bishop公式(2)比较, 可知

$$\chi = \frac{K^n}{K^{sn}} \quad (23)$$

对饱和土, $s=1$, $K^{sn}=K^n$, $\chi=1$, 式(22)就退化为Terzaghi公式(式(1))。对于干土, $s=0$, $K^{sn}=K^0 \rightarrow \infty$, $\chi=0$, 式(22)退化为

$$\sigma' = \sigma - u_a \quad (24)$$

由于总有 $K^n \leq K^{sn}$, 故 $0 \leq \chi \leq 1$ 。因此, 当Bishop公式(式(2))中的参数 χ 以式(23)定义时, 它是不计土粒压缩性的有效应力的正确表达式。由式(23)易见, χ 与土的密度及饱和度有关。

式(21)还可被写为

$$\sigma' = \sigma - \left(1 - \frac{K^n}{K^0} \right) \left(\frac{\frac{1}{K^{sn}} - \frac{1}{K^0}}{\frac{1}{K^n} - \frac{1}{K^0}} u_w + \frac{1 - \frac{K^n}{K^{sn}}}{1 - \frac{K^n}{K^0}} u_a \right) \quad (25)$$

由于
$$1 - \frac{\frac{1}{K^{sn}} - \frac{1}{K^0}}{\frac{1}{K^n} - \frac{1}{K^0}} = \frac{\frac{1}{K^n} - \frac{1}{K^{sn}}}{\frac{1}{K^n} - \frac{1}{K^0}} = \frac{1 - \frac{K^n}{K^{sn}}}{1 - \frac{K^n}{K^0}} \quad (26)$$

比较Skempton公式(式(5))与式(25)可知, 在考虑土粒或多孔介质固体材料的压缩性时有

$$\chi = \frac{\frac{1}{K^{sn}} - \frac{1}{K^0}}{\frac{1}{K^n} - \frac{1}{K^0}} = \frac{\frac{K^0}{K^{sn}} - 1}{\frac{K^0}{K^n} - 1} \quad (27)$$

式(23)和式(27)可用来测定 χ 值。对于土用式(23), 对于岩石和混凝土用式(27)。它们赋予参数 χ 明确的物理意义。

最后, 我们把式(21)推广到更一般的情况。设多孔介质的孔隙中有 N 种不溶混的流体, 它们各自连通, 孔压依次为 $P_1 < P_2 < \dots < P_N$, 对应的饱和度为 $S_1, S_2, \dots, S_N$ 且

$$S_1 + S_2 + \dots + S_N = 1 \quad (28)$$

则有效应力为

$$\sigma' = \sigma - \chi_1 P_1 - \chi_2 P_2 - \dots - \chi_{N-1} P_{N-1} - \chi_N P_N \quad (29)$$

式中
$$\chi_1 = K^n \left(\frac{1}{K^{s_1 n}} - \frac{1}{K^0} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \chi_2 &= K^n \left(\frac{1}{K^{(s_1+s_2)n}} - \frac{1}{K^{s_1 n}} \right) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \chi_{N-1} &= K^n \left(\frac{1}{K^{(s_1+s_2+\dots+s_{N-1})n}} - \frac{1}{K^{(s_1+s_2+\dots+s_{N-2})n}} \right) \\
 \chi_N &= K^n \left(\frac{1}{K^n} - \frac{1}{K^{(s_1+s_2+\dots+s_{N-1})n}} \right) \quad (30)
 \end{aligned}$$

当多孔固体材料不可压缩 ($K^0 = \infty$) 且孔隙中只有两种流体时, $N=2$, $s_1+s_2=1$, 则

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \frac{K^n}{K^{s_1 n}} = \chi \\
 \chi_2 &= 1 - \frac{K^n}{K^{s_1 n}} = 1 - \chi \quad (31)
 \end{aligned}$$

式(29)便退化为式(22)

3 有效应力参数的测定

在不计土粒压缩性时, 可根据式(23)确定有效应力参数。该式中的 K^n 和 K^m 是土骨架本身属性的指标, 可以用孔隙中不存在流体的试样或有流体存在但孔压等于零的试样通过试验测定。土力学告诉我们, 水的存在对土骨架的力学性质影响很大。为了计及水份对土的压缩性的影响, 我们建议以下的修正公式

$$K^n = SK_{\text{饱和}}^n + (1-S)K_{\text{干}}^n \quad (32)$$

式中 $K_{\text{饱和}}^n$ 用饱和土样的均压排水试验测定; $K_{\text{干}}^n$ 用干土的均压排气试验测定。对 K^m 可用同样的方法求得。

本文只做了不同密度的饱和土样的均压排水试验, 所用土料见文献[7]中表1。试验结果示于图1。图中还列出了各曲线的起始体变模量 K_0 , 本文就是用 K_0 计算参数 χ 的。从图2可知, $\log(K_0/p_a - \gamma_d/\gamma_w)$ 是线性关系, 其方程为

$$\log(K_0/p_a) = 2.875 \frac{\gamma_d}{\gamma_w} - 3.204 \quad (33)$$

式中 p_a 是大气压, γ_d 和 γ_w 分别是土的干容重和水的容重。

应用式(23)和式(33)计算 χ 时, 需要先知道孔隙率为 n 的试样在其由气体占据的孔隙体积 $(1-S)n$ 被土粒填充形成孔隙率为 Sn 的新试样时的干容重 γ'_d 。在已知试样的干容重 γ_d (或孔隙 n)、饱和度 S 及土粒比重 G 时, 可先算出该试样的孔隙比 e

$$e = \frac{G\gamma_w}{\gamma_d} - 1 \quad \text{或} \quad e = \frac{n}{1-n} \quad (34)$$

则孔隙率为 Sn 的试样的孔隙比 e' 和干容重 γ'_d 可按以下两式计算

$$e' = \frac{Se}{1+(1-S)e} \quad (35)$$

$$\gamma'_d = \frac{G\gamma_w}{1+e'} \quad (36)$$

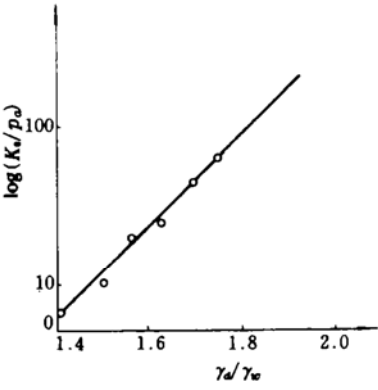
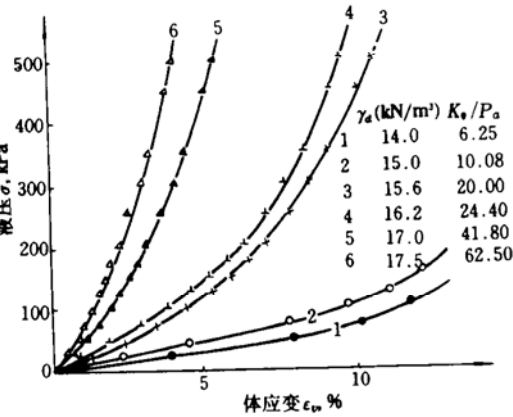


图 1 饱和土均压排水试验结果

图 2 $\log(K_s/p_a)-(\gamma_d/\gamma_w)$ 关系

对于 γ_d 等于 15.6kN/m^3 和 17.0kN/m^3 的两种情况, 用以上公式算出的 χ 值列于表 1。从该表可见, χ 值主要受饱和度的影响, 干容重 (代表土的密度) 的影响不大。该表还说明, 当饱和度低于 70% 时, χ 值是比较小的。

表 1 不同干容重的土的有效应力参数值

饱和度		0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.98	1.00
χ	$\gamma_d=15.6(\text{kN/m}^3)$	0.10	0.15	0.21	0.32	0.46	0.68	0.86	1.00
	$\gamma_d=17.0(\text{kN/m}^3)$	0.13	0.18	0.26	0.36	0.51	0.71	0.87	1.00

4 对近期提出的有效应力公式的简析

由于有效应力的概念明确, 近年来又引起了学者们的兴趣。国内外的一些力学家和岩土工程专家在 80 年代里相继提出了有关公式, 兹简析如下。

1980 年, Carroll 在第 15 届国际理论和应用力学大会专题报告中应用平均应力定理给出的非饱和土的应力分解式是^[8]

$$\sigma_{ij}=(1-n)\sigma_{ij}^s+nSu_w\delta_{ij}+(1-S)nu_a\delta_{ij}$$
 (37)

Lewis 和 Schrefler 在 1987 年研究石油、水、气的同时流动问题时导出了类似的公式。按 Carroll 说法, 式 (37) 与 Bishop 公式 (2) 相当。事实上, 此式中的 σ_{ij}^s 是粒间应力, 而 $(1-n)\sigma_{ij}^s$ 是其表观值, 并非有效应力。

Mctigue 等 (1983)^[9] 与 Nikolaevsky (1985)^[10] 导出的有效应力公式是

$$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-[Su_w+(1-S)u_a]\delta_{ij}$$
 (38)

即用饱和度代替了 χ 。但二者仅在极端条件下才相同。

Vardoulakis (1986)^[11] 提出的有效应力分解式是

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^s+Su_w\delta_{ij}+(1-S)u_a\delta_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma^s_{ij} - \gamma u_w \delta_{ij} \quad (39)$$

这里, σ^s_{ij} 的意义与式(37)中的相同。 σ'_{ij} 为有效应力, γ 是一常数。Prevost (1980)^[12] 的观点与此相似。他们区分了有效应力和粒间应力。但此二式纯属假设, 缺乏理论基础和试验验证, 且 γ 的物理意义也是不清楚的。

Boer 和 Eher (1986)^[13] 在研究固-液-气三相多孔介质时, 提出的应力表达式

$$T^s_{ij} = \hat{T}^s_{ij} - (1-n)P\delta_{ij} \quad (40)$$

他们把 T^s_{ij} 称为固体骨架中的应力, 按有效应力对待。而把 $\hat{T}^s_{ij}$ 称为粒间接触应力, P 是作用在骨架上的部分静水应力。此式与式(39)的第二式相似, 其中的 P 的涵义是很模糊的。

1988年, 李希和郭尚平在研究多孔介质中有多种流体渗透时定义的有效应力公式是

$$T^{(c)}_{ij} = T_{sij} - P_N \delta_{ij} \quad (41)$$

其中 $T^{(c)}_{ij}$ 称为有效应力, T_{sij} 为固体应力, P_N 为某种流体的压力。此式与 Terzaghi 公式类似。

总之, 上述几种提法都很难充当真正的有效应力公式。即使在线性变形情况下, 它们与本文的理论公式(22)的差异也是明显的。

5 结 论

(1) 本文在弹性理论的基础上, 导出了各向异性多孔介质与非饱和土的有效应力的理论公式, 它概括了 Bishop 公式和 Skempton 公式, 饱和土的有效应力公式(1), (3), (4) 则是其特例。

(2) 式(23) 赋予有效应力参数 χ 明确的物理意义, 根据该式用三轴试验初步测定了非饱和土的 χ 值。计算分析指出, 饱和度对 χ 值有较大的影响, 而密度的影响不显著。

(3) 近期提出的几种应力分解式在概念上与有效应力并不一致, 有的实属误解。

最后应当指出: 本文在导出有效应力公式时没有计及剪胀性, 且该式不适用于湿化变形问题。

参 考 文 献

- 1 沈珠江, 杨代泉. 非饱和土力学的研究途径和发展前景. 非饱和土理论与实践学术研讨会文集, 中国土木工程学会土力学及基础工程学会编, 1992. 1~8.
- 2 蒋彭年. 非饱和土工程性质简论. 岩土工程学报, 1989, 11(6): 39~59.
- 3 Skempton A W. Effective Stress in Soils, Concret and Rock, Pore Pressure and Suction, Butterworths, London, 1960. 4~16.
- 4 Biot M A and Willis D G. The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. J Appl Mech, 1957, 24: 594~601.
- 5 Nur A and Byerlee J D. An Exact Effective Stress Law for Elastic Deformation of Rock with Fluids. J Geophys Res, 1971, 76: 6414~6419.
- 6 包承纲. 非饱和土的应力应变关系和强度特性. 岩土工程学报, 1986, 8(1): 26~31.
- 7 陈正汉, 谢定义, 王永胜. 非饱和土的水气运动规律及其工程性质研究. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 9~

- 20.
- 8 Carroll M M. Mechanical Response of Fluid-Saturated Prous Materials. Proc. 15th Int. Congress of Theoretical and Applied Mechanics, eds by Rimrott, F P J and Tabarrok B, North-holland, New York, 1980, 251~262.
- 9 Mctigue D F, Wilson R K, Nunziato J W. An Effective Stress Principle for Partially Saturated Media, in: Mechanics of Granular Materials, ed by Jenkins, J T and Satake M, Elesvier, 1983, 195~210.
- 10 Nikolaevsky V N. Mechanics of Fluid-Saturated Geomaterials, in: Mechanics of Geomaterials, ed by Bazant Z P, 1985, 379~399.
- 11 Vardoulakis I, Beskos D E. Dynamic Behavior of Nearly Saturated Porous Media. Mechanics of Materials, 1986, 5, 87~108.
- 12 Prevost J H. Mechanics of Continuous Porous Media. Int J Engng Science, vol 18, 1980, 18, 787~800.
- 13 Boer R and Eher W. On the Problem of Fluid-and Gas-Filled Elasto-Plastic Solids, Int J Solids Structures, 1986, 22(11): 1231~1242.
- 14 李 希, 郭尚平, 渗流过程的混合物理论. 中国科学(A辑), 1988, 265~274.

Effective Stress in Unsaturated Soil

Chen Zheng-han

(The PLA Logistical Engineering University, Chongqing)

Xie Ding-yi

(Shaanxi Institute of Mechanical Engineering, xi'an)

Wang Yong-sheng

(The Northwest Hydraulic Power Design Institute, xi'an)

Abstract A theoretical formula of effective stress for anisotropic porous media and unsaturated soil is derived on the base of elasticity theory, and the effective stress parameter is measured with conventional triaxial apparatus. Some misunderstandings on the concept of effective stress are clarified.

Key words effective stress, effective stress parameter, unsaturated soil, porous media.