

雁型断裂的分形模型和能量耗散*

谢和平

(中国矿业大学, 徐州, 221008)

D. J. Sanderson和D. C. P. Peacock

(英国南安普敦大学地质系)

(中科院力学所非线性连续介质力学开放实验室, 北京, 100080)

文 摘 现场和实验室观察表明, 在断裂区内的雁型裂纹具有一个Riedel几何结构。本文应用剪切裂纹位错堆积(Pile-up)模型, 描述了雁型裂纹形成的拉破坏机理, 建立了雁型裂纹的分形模型来模拟Riedel几何结构。根据这个模型, 可以直接量测出现场和实验中出现的雁型裂纹的分形维数。在此基础上, 应用分形损伤演化模型, 推导出了雁型裂纹的能量耗散, 进而解释了雁型裂纹形成过程的分形本质。

关键词 雁型断裂系统, Riedel几何, 分形模型, 能量耗散。

1. 引言

在压缩应力和剪切应力作用下, 上覆岩层通常产生一个很窄的称为脆性剪切带的断裂区。该断裂区具有不同的尺寸量级, 从微观的晶格变形带集聚到宏观的区域性断层^[1]。大多数这样的断裂区并不是单一断裂平面, 而是由许多亚(第二)断裂组成。亚断裂的最通常的形式就是雁型断裂, 它们表现出局部拉伸破坏。众所周知, 岩石和矿物经常含有不同阶次的微裂纹。在压缩应力和剪切应力作用下, 这些微裂纹能诱导出局部拉应力场^[2,3]。在特定的外部应力作用下, 微裂纹的发展和集聚形成雁型断裂模式, 最后演化、发展成一个宏观剪切断层。这个剪切断裂的拉破坏过程已被Horii, Nemat-Nasser^[4]和Cox and Scholz^[5]观察到(见图1)。从图1可见, 在Cox和Scholz的实验中, 雁型裂纹产生在拉伸裂纹的方位, 并倾斜于初始缺口。图2给出了笔者在英国考察到的现场雁型裂纹区。

尽管在压缩应力和剪切应力作用下雁型裂纹形成的力学描述相当困难, 但是, 不同标度下雁型裂纹之间存在的自相似性在1929年就被Riedel发现^[7]。Riedel使用粘土膏进行剪切实验发现了两组拉伸裂纹, 即雁型裂纹及其共轭。人们现在称这两组拉伸裂纹为Riedel剪切。这种Riedel剪切存在一种自相似几何现象: 在大尺度的Riedel剪切里又能找到低一阶尺度的Riedel剪切, 这种嵌套的Riedel剪切(Riedel within Riedel Structures)被定义为Riedel几何结构^[1,7]。

本文应用分形几何^[9,10]对Riedel几何结构进行了定量的描述。应用断裂力学解释了在压

*国家自然科学基金(19272069)和国家教委博士点基金(9229006)及跨世纪优秀人才基金资助项目。

到稿日期: 1993-08-27

缩应力和剪切应力作用下雁型裂纹的形成，建立了一个分形模型来模拟雁型断裂系统，进而推导了雁型断裂的能量耗散。

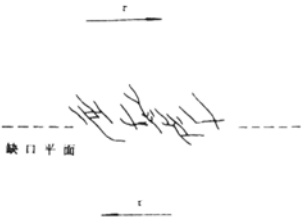


图1 花岗岩Ⅲ型断裂中的雁型裂纹^[9]



图2 英国Bristol Jurassic石灰岩的雁型断裂

2. 雁型裂纹形成的断裂力学描述

岩体中的断裂发展既受岩体承受的应力影响也受岩体内存在的微裂纹影响。现在考虑包含一条细斜裂纹的岩体承受压缩应力和剪切应力(σ^m, τ^m)的混合作用(图3)。单一细裂纹在压缩应力和剪切应力作用下经常由突然的弯折扩展而偏离它的初始直线路径，称之为S型断裂^[11](也称为雁型裂纹)。S型断裂可以理解为剪切裂纹位错的堆积引起在裂纹顶端的拉伸应力强度大于材料的模式I断裂韧性 K_{Ic} 所致^[11]。

弯折扩展裂纹的应力强度因子可以根据Karihalo^[12]推导的斜裂纹应力强度因子的线性组合来近似，即

$$K_I = BK_\theta \quad (1)$$

式中 $B = 1.15$ (Kachanov^[13])； K_θ 为剪切裂纹的应力强度因子，其表达式为

$$K_\theta = 2(C/\pi)^{1/2} \int_0^C \left[\frac{\tau_{eff}}{(C^2 - x_1^2)^{1/2}} \right] dx_1 \quad (2)$$

式中 $\tau_{eff} = \tau - \mu\sigma_n$ ， μ 为裂纹面之间的摩擦系数； C 为半裂纹长度(见图3)； x_1 为积分变量。

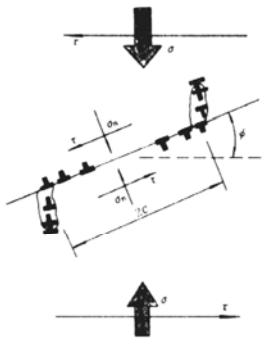


图3 S型断裂模型

对于我们给出的问题(图3), 可以计算出其应力分量为

$$\tau = \frac{1}{2}[\sigma^\infty \sin 2\phi + \tau^\infty(1 + \cos 2\phi)] \quad (3a)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}[\sigma^\infty(1 + \cos 2\phi) + \tau^\infty \sin 2\phi] \quad (3b)$$

式中 ϕ 为细裂纹的倾角(见图3)。结合式(1), (2), (3)可以推导出S型裂纹产生的条件是

$$B[K'_n f_1(\mu, \phi) + K''_n f_2(\mu, \phi)] \geq K_{Ic} \quad (4)$$

$$\text{式中 } K'_n = \sigma^\infty (\pi C)^{1/2} \quad (5)$$

$$K''_n = \tau^\infty (\pi C)^{1/2} \quad (6)$$

$$f_1(\mu, \phi) = \frac{1}{2}[\sin 2\phi - \mu(1 + \cos 2\phi)] \quad (7)$$

$$f_2(\mu, \phi) = \frac{1}{2}[(1 + \cos 2\phi) - \mu \sin 2\phi] \quad (8)$$

下面分析上述结果的两个特例:

特例1 剪应力为零($\tau^\infty=0$)情况。这时由极值原理可导出, 当 $2\phi^* = \cot^{-1}(-\mu)$, 最容易产生S型断裂, 式(4)将成为

$$K'_n \geq 2K_{Ic} / \left\{ B[(1 - \mu^2) / (1 + \mu^2)^{1/2} - \mu] \right\} \quad (9)$$

特例2 压缩应力为零($\sigma^\infty=0$)情况。这时, $2\phi^* = \tan^{-1}(-\mu)$, 最容易产生S型裂纹, 式(4)成为

$$K''_n \geq 2K_{Ic} / \left\{ B[1 + (1 - \mu^2) / (1 + \mu^2)^{1/2}] \right\} \quad (10)$$

从上面两个特例可见, 不同的应力场具有相似的拉伸应力强度因子表达式, 其拉伸破坏过程表现于预存细裂纹在压缩或剪切应力作用下发展演化形成S型裂纹。这些S型裂纹集合构成一个雁型断裂系统, 最终在临界外应力下连通成断层。Scholz^[8]定性地描述了这个过程。现场观察表明, 任何尺度下的断层不是单一剪切断裂, 而是由雁型裂纹或小尺度断层的连通而构成的复杂断裂区^[8]。

3. 雁型断裂系统的分形模型

雁型断裂普遍地存在Riedel几何结构^[1]。从几何上考虑, Riedel几何结构就是自相似性, 可以由分形几何来描述。当把雁型裂纹分布看成一个点集事件(图4b), 那么我们可以构造一个康托集^[9](图4a)来模拟雁型断裂系统。将长度为 L 的区间平分成四个等长线段, 移去中间的两个线段, 以此作为生成元对剩余的线段进行重复地变形(图4)。对于数学分形, 这样的生成步将无限地进行下去。可是对于自然分形, 生成步是有限的, 现选用第 n 生成步的这个康托集来模拟雁型断裂系统。这样, N 是该区间雁型裂纹的数目, 雁型裂纹之间的间距 S 就可由第 n 步构造得出

$$S = 2(L/4^n) \quad (11)$$

在康托集中的码尺(或尺规) δ_n 为无量纲量^[10], 可估计为

$$\delta_n = 4^{-n} \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)得到

$$\delta_n = (2L/S)^{-1} \quad (13)$$

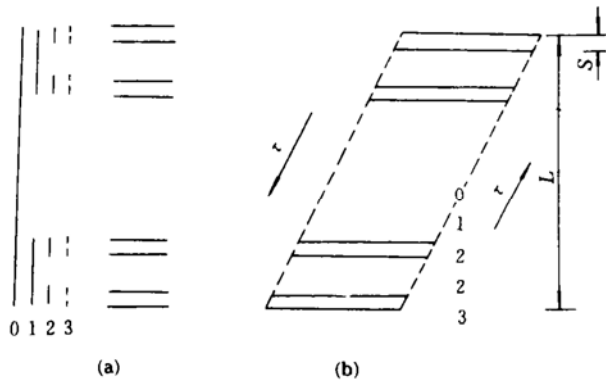


图4 雁型断裂系统的分形模型

根据康托集的分形自然, 雁型裂纹的分形维数能由下式计算

$$D = \log N / \log(2L/S) \quad (14)$$

值得指出的是这个分形模型是复杂Riedel剪切自然分形的一个抽象描述, 其参数 S 应当是一个统计量, 比如可作为所有雁型裂纹之间间距的平均值。根据这个分形模型, 很容易直接从现场或实验室得到的雁型裂纹系统计算出其分维值。由于雁型裂纹在构造区域尺度看是点事件, 加之尚未连通成完整的断层, 其分形维数必然是大于零和小于1。例如图1给出的Riedel剪切结果, 可直接量测出 $S=1.686(\text{mm})$, $L=26(\text{mm})$, $N=15$ 。由式(14)得出 $D=0.79$ 。对于图2给出的现场雁型断层, 可量出 $S=3.861$, $L=89$, $N=24$ 。其分维为 $D=0.83$ 。应当注意到在分维量测中, 由于考虑了标度不变性, 因此地质工作者常用的标尺或比例尺(如地质锤、硬币等)在我们的分形分析中就不需要了(见图2)。

根据上面的例子, 本文建立的分形模型能很容易量测现场和实验室得到的Riedel几何结构。量测的分维处于零和1之间, 能表征断裂区Riedel几何结构的自相似性程度^[23]。

4. 雁型断裂系统的能量耗散

下面讨论雁型断裂系统的分维与雁型断裂区形成的可能断裂机理之间的关系。雁型裂纹的形成过程伴随着能量耗散, 它是一个从微断裂成核、扩展、相互作用、连通的损伤断裂演化过程。最近断裂力学的分形研究^[14-19]对这个过程已有了新的认识。这里将发展一个分形损伤演化模型来推导出雁型断裂系统的能量耗散, 并以此解释这个过程。

King^[20]在研究地震时发现, 形成雁型断裂系统的应力条件是多变的, 这使得耗散能的精确估计很困难。然而, 根据Griffith断裂理论, 无论形成一条长度为 l_i 的裂纹多么复杂, 所需的耗散能 $E(l_i)$ 可以近似估计为

$$E(l_i) = 2\gamma_s t l_i \quad (15)$$

式中 γ_s 为单位面积的表面能; t 为裂纹厚度。

在雁型断裂系统, 裂纹尺寸分布能使用分形损伤演化定律来描述, 即

$$N(l_i) = N_0(l_i/l_c)^{-D}, \quad l_i \in [l_{\min}=0, l_c] \quad (16)$$

式中 $N(l_i)$ 为尺寸小于 l_i 的裂纹数目; l_c 为雁型断裂区最长的裂纹尺寸; N_0 为材料常数。

在长度范围 l_i 和 $l_i + dl_i$ 之间, 裂纹数目的增加为

$$dN(l_i) = -N_0 D(l_i/l_c)^{-(D+1)} dl_i/l_c \quad (17)$$

使用式(15), 在尺寸范围 l_i 到 $l_i + dl_i$ 之间, 相应的能量耗散增量为

$$dE_s(l_i) = -2N_0 \gamma_s t D(l_i/l_c)(l_i/l_c)^{-(D+1)} dl_i = -2N_0 \gamma_s t D(l_i/l_c)^{-D} dl_i \quad (18)$$

积分上式可得到雁型断裂系统的总能量耗散为

$$E_s(l_i) = \int_0^{l_i} 2N_0 \gamma_s t D(l_i/l_c)^{-D} dl_i = (2N_0 \gamma_s t l_c) \left[\frac{D}{(1-D)} (l_i/l_c)^{1-D} \right] \quad (19)$$

式(19)表明, Riedel剪切或整个雁型断裂系统的能量耗散是从成核到不稳定破坏过程区的分维 D 和裂纹长度 l_i 的函数。这个结果与 Ohnaka 和 Kuwahara^[21] 的分析一致。图5给出了当 $l_i/l_c = 0.01, 0.1$ 和 1.0 时系统能量耗散随分维 D 的变化趋势。能量耗散随 D 的增加而增加。因为分维 D 反映了雁型裂纹分布的不规则性, 平均间距越小, N 越大, 分维值也越大。这表明能量耗散随雁型裂纹平均间距的减小而增加, 这个结论一致于 Chung^[11] 和 Scholz^[8] 的描述。当 $D=1$, 雁型裂纹开始连通形成断层。在理论上, 当 D 接近1时, 裂纹(点事件)连通形成断层(线事件), 系统所需能量耗散趋于无穷(见式(19)), 对应一个不稳定性破坏。这样, $D=1$ 是雁型断裂过程中不稳定性临界值^[14]。这些结论与 Scholz^[8] 对现场和实验室观察的分析结果吻合。

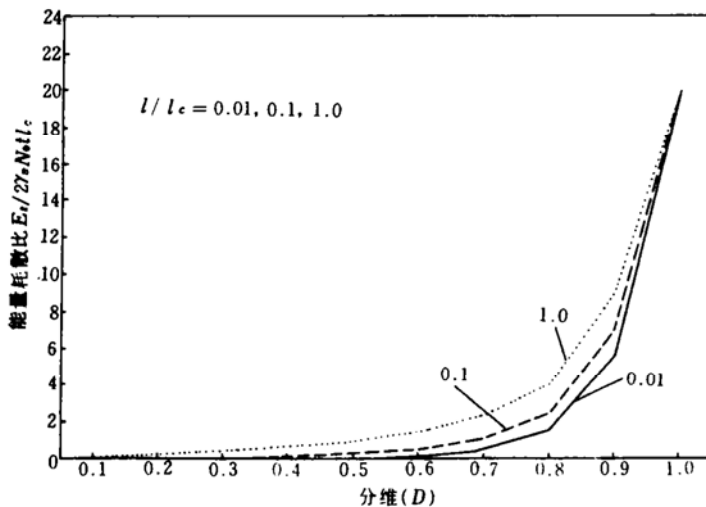


图5 耗散能量比 $E_s/(2\gamma_s N_0 t l_c)$ 随分形 D 的变化曲线

5. 结 语

本文给出了用雁型断裂系统的分形模型来估算其分形维数和总能量耗散的方法。使用这个分形模型能得出Riedel几何结构的定量描述。应用剪切裂纹位错堆积模型对雁型断裂形成的拉破坏机理进行了描述。

雁型断裂系统的能量耗散是断裂尺寸和分维的函数。分形维数表征了断裂区裂纹分布的不规则性程度。随着裂纹之间间距的减小, 分维和系统所需的能量耗散将随之增加。

参 考 文 献

1. Tchalenko J S. Similarities between Shear Zones of Different Magnitudes. *Geol Soc Am Bull.* 1970, **86**: 1625~1640.
2. Xie H. *Damage Mechanics of Rock and Concrete Materials*. China CUMT press (in Chinese), 1990.
3. Xie H. The Tensile Failure of Local Damage of Rocks. *Chinese J Rock Mech Engng*, 1988, **7**: 56~72.
4. Horii H, Nemat-Nasser S. Compression-induced Microcrack Growth in brittle solids: Axial Splitting and Shear Failure. *J Geophys Res*, 1985, **90**: 3105~3125.
5. Cox S J D, Scholz C H. Rupture Initiation in Shear Fracture of Rocks: an Experimental Study. *J Geophys Res* 1988, **93**: 3307~3320.
6. Deng Q, Zhang P. Research on the Geometry of Shear Fracture Zones. *J Geophys Res* 1984, **89**: 5699~5710.
7. Riedel W. Zur Mechanik Geologischer Brucherscheinungen. *Centralbl. Mineral Geol. u. Pal.* 1929, **V1929B**: 354~368.
8. Scholz C H. *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press, London, 1990.
9. Mandelbrot B B. *Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company. 1983.
10. Xie H. *Fractals in Rock Mechanics*. A A Balkema Publishers, Rotterdam, 1993.
11. Chung S K. Fracture Characterization of Armor Ceramics. *America Ceramic Bulletin*, 1990, **69**: 358~366.
12. Karihalo B L. On Crack Kinking and Curving. *Mech Mater* 1982, **1**: 189~201.
13. Kachanov M L. A Microcrack Model of Rock Inelasticity, Part II: Propagation of Microcracks. *Mech Mater* 1982, **1**: 29~41.
14. Main I G. A Modified Griffith Criterion for the Evolution of Damage with A Fractal Distribution of Crack Lengths: Application to Seismic Event Rates and B-Values. *Geophys J Int*, 1991, **107**: 353~362.
15. Main I G, Meredith P. G Sammonds P R. Temporal Variations in Seismic Event Rate and B—Values from Stress Corrosion Constitutive Laws. *Tectonophysics*, 1992, **211**: 233~246.
16. Xie H. Fractal Effect of Irregularity of Crack Branching on Fracture Toughness of Brittle Materials. *Int J Fracture*, 1989, **41**: 267~274.
17. Xie H. Studies on Fractal Models of the Microfractures of Marble. *Chinese Science Bulletin*. 1989, **34**:

1292~1296.

18. Xie H. Fractal Nature of Damage Evolution of Rock Materials. Proc. 2nd Int. Symp. Min. Sci. Tech. 1991, 2: 765~772.
19. Xie H, Chen Z D. Fractal Geometry and Fracture of Rock. Acta Mechanica Sinica 1988, 4 (3): 255~264.
20. King G C P. Speculations on the Geometry of the Initiation and Termination Processes of Earthquake Rupture and its Relation to Morphology and Geological Structure. Pure Appl. Geophys. 1986, 124: 567~585.
21. Ohnaka M, Kuwahara Y. Characteristic Features of Local Breakdown Near a Crack-Tip in the Transition Zone from Nucleation to Unstable Rupture during Stick-Slip Shear Failure. Tectonophysics. 1990, 175: 197~220.
22. Gamond J F. Bridge Structures as Sense of Displacement Criteria in Brittle fault Zones. J. Struct. Geol. 1987, 9: 609~620.

A Fractal Model and Energy Dissipation for En Echelon Fractures

Xie He-ping

(Chinese University of Mining and Technology, Xuzhou)

(Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, CAS, Beijing)

D. J. Sanderson and D. C. P. Peacock

(Department of Geology, University of Southampton, UK)

Abstract Field and laboratory observations showed that en echelon fractures within fracture zones have a Riedel within Riedel structure. The tensile failure mechanism of formation of en echelon fractures can be described by the pile-ups of shear crack-dislocations. A fractal model can be used to simulate the Riedel within Riedel geometry, allowing the direct measurement of the fractal dimensions of en echelon fracture systems. The energy dissipation of the en echelon fracture system can be deduced by using a fractal damage evolution model which explains the evolution process of en echelon fracture systems. The fractal nature of the fractures can be used to derive an accurate estimation of total energy dissipation.

Key Words En echelon fracture system, Riedel geometry, fractal model, energy dissipation.