

非均质堤坝渗流计算的坐标变换法

曾 平 李鉴初

(大连理工大学土木系, 116024)

1. 前 言

采用Thompson^[1]的坐标变换方法计算堤坝渗流问题具有精度高、工作量小、易于编程且有利于处理无压渗流面变动边界等优点。然而, 尽管该方法应用于均质或接近均质的较简单渗流问题时非常方便而又有效^[2], 但解决非均质渗流以及渗流场中具有诸如排渗井等设施的较复杂问题时往往出现困难。这主要有以下两个因素: ①渗透的非均质特性意味着描述渗流的长度尺度的不同, 当各分区间的渗透系数值不在同一数量级时, 以具有几乎同等数量级长度尺度的坐标变换系统来描述渗流区域, 至少将在非均质分区边界导致数值计算的不确定; ②由于渗透性能的不同, 在非均质分区边界处往往存在大的渗流变化梯度, 而通常的坐标变换系统难以“捕捉”到这一特性, 导致严重的数值振荡。

本文利用对接组合型坐标变换系统处理非均质渗流场, 使各子区域在具有相对的均质特性的基础上对接组合成非均质渗流区域, 从而使数值计算既能保持坐标变换的优点又能克服以上的不利因素。

2. 基本公式

2.1 非恒定渗流计算

假设渗流满足达西定律, 非恒定渗流的基本控制方程为^[3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

式中 h 为水头; x 为水平方向, y 为垂直方向; k_x , k_y 分别为 x , y 方向的渗透系数; S_s 为单位贮水量或贮水率; t 为时间。

基本方程(1)的边界条件为

$$h(x, y, t)|_{\Gamma_1} = h_0(x, y, t) \quad (2)$$

$$k_n \frac{\partial h}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q_0(x, y, t) \quad (3)$$

其中, Γ_1 为第一类边界条件, Γ_2 为第二类边界条件; n 为边界 Γ_2 的外法向; h_0 , q_0 为水

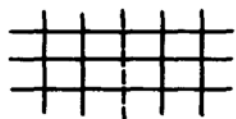
头函数与流量函数。

在无压渗流面边界上同时必须满足

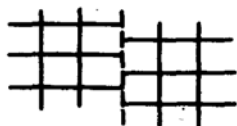
$$h(x, y, t) = y(t) \quad (4)$$

2.2 对接组合型坐标变换

构造组合型坐标变换的方法有对接与非对接两种。对接方法生成组合子域间一一对应连接的变换网格,而非对接方法生成子域间的并不对应相连的变换网格(如图1(a)所示)。为避免渗流计算时由于相互错开的节点而需要的组合边界上的附加插值工作,本文仅研究对接组合型的坐标变换。

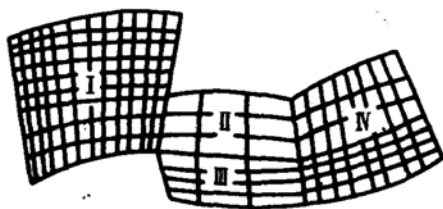


对接



非对接

(a) 组合方法



(b) 对接组合型坐标变换网格

图1 坐标变换示意图

坐标变换采用Thompson的Laplace方程法^[1],基本控制方程为

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6)$$

其中 ξ, η 为变换坐标; $\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$, $\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}$, $\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$ 。

计算坐标变换时直接在各子区域内分别求解独立的边值问题,但子域间需共用组合边界条件,以便构造对接组合型坐标变换。

较为复杂的对接组合型坐标变换系统如图1(b)所示。

3. 计算方法

3.1 控制体法计算非恒定渗流

非均质堤坝渗流的对接组合型坐标变换网格在组合边界上并不要求具有充分的连续、光滑特性。实际上,由于堤坝的不一定规则的边界以及非均质渗流区域的各子区域的任意形状,满足这种要求的对接组合型坐标变换常常难以获得。因此,渗流计算时不适宜应用差分方法。本文采用适应性较好的控制体法,即将坐标变换网格作为一系列控制体,在各控制体内对控制方程(1)体积分,从而导出离散方程。

选取如图2所示的计算网格系统。考虑各向同性渗流的情况,利用控制体的渗流水量局

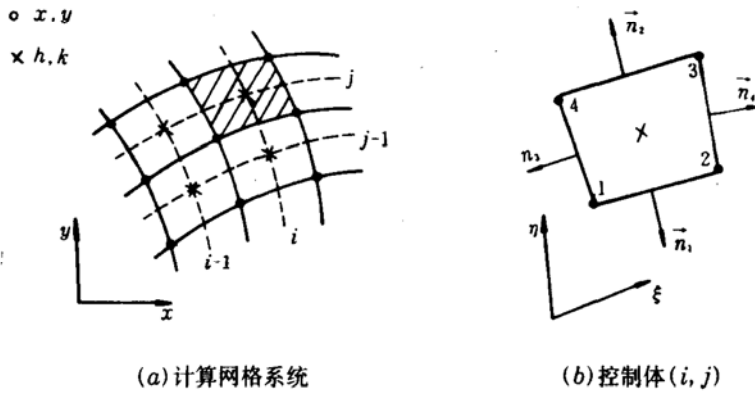


图2 渗流计算的控制体网格

部均衡关系可导出用于求解水头 h 的离散方程如下:

对于渗流区域内部 $j=2, J-1$ 层的控制体:

$$k_{12} \frac{\partial h}{\partial n_1} l_{12} + k_{34} \frac{\partial h}{\partial n_2} l_{34} + k_{14} \frac{\partial h}{\partial n_3} l_{14} + k_{23} \frac{\partial h}{\partial n_4} l_{23} = 0 \quad (7)$$

对于邻接不穿透地基边界的 $j=1$ 层的控制体:

$$k_{34} \frac{\partial h}{\partial n_2} l_{34} + k_{14} \frac{\partial h}{\partial n_3} l_{14} + k_{23} \frac{\partial h}{\partial n_4} l_{23} = 0 \quad (8)$$

对于浸润表面 $j=J$ 层的控制体:

$$k_{12} \frac{\partial h}{\partial n_1} l_{12} + k_{14} \frac{\partial h}{\partial n_3} l_{14} + k_{23} \frac{\partial h}{\partial n_4} l_{23} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} l_{34} \quad (9)$$

其中, k_{ij} 为各向同性渗透系数; J 为 η 方向的控制体总数; l_{ij} 为控制体的边长。

在坐标变换系统中有

$$\frac{\partial h}{\partial n_1} = -\frac{1}{J\sqrt{\gamma}} \left(\gamma \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n_2} = \frac{1}{J\sqrt{\gamma}} \left(\gamma \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n_3} = -\frac{1}{J\sqrt{\alpha}} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n_4} = \frac{1}{J\sqrt{\alpha}} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \quad (13)$$

其中 α, β, γ 意义同前; $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ 。

根据(7)~(13)式, 利用变换域空间上的二次中心差分与时间上的向前差分格式可得出渗流区域内各控制体的水头间的数值关系, 从而隐式求解各时段的水头。

3.2 边界的处理及对接组合型坐标变换的生成

非恒定渗流的上、下游水位变化过程第一类边界条件可分别从第0排与第 $I+1$ 排(I 为 ξ 向的控制体总数)控制体赋给计算区域。

由于渗流的计算在整个组合域内进行, 因此对接组合型区域的组合边界点作为计算域的

内部未知点处理而不应再加任何边界条件。不过,组合边界上的渗透系数 k 的选取对数值计算有一定影响。本文根据组合边界两侧的控制体的水头 h 的值选取边界上的 k 值,并使 k 等于水头 h 值较大一侧的渗透系数值。实际上,这种处理方法类似于对流计算的迎风格式。

浸润线上应满足边界条件(4)。非恒定浸润边界线可由第 J 层(表层)控制体的水头插值推求,同时,由于浸润线在渗流域的分区边界处将出现拐点,因此应作适当处理。如图3所示,利用不同分区的渗透的当量长度的概念,将不同的渗透系数条件下的各分区折算为同一渗透系数条件,在分界点 $(i+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2})$ 上可得

$$y_{i+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}} = \frac{b'_2}{b_1 + b'_2} (h_{i,J} - h_{i+1,J}) + h_{i+1,J} \quad (14)$$

其中 J 为 η 向控制体总数; b'_2 为经长度折算后的当量厚度, $b'_2 = b_2 \cdot k_1/k_2$; k_1, k_2 分别为左、右分区的渗透系数。

为尽量减少由于坐标变换网格分布的不合理而造成的渗流数值计算的误差,对接组合型坐标变换的各子域边值条件应随非恒定渗透区域的变化而相应地逐时段合理插值调整。各子区域的坐标变换应逐时段以新的变换边界在前一时段变换网格的基础上重生成。由于非恒定渗流的数值计算时间步长 Δt 的大小限制了非恒定渗透区域在每一个时段中的坐标变化幅度,因此对接组合型坐标变换的再生成工作量相对渗流计算本身来说通常比较小。

对接组合型坐标变换系统使非均质渗流域的各分区中的控制体始终保持相对固定,而各分区的数值计算通过水量局部均衡关系在组合边界上联系起来,从而将变动边界的复杂的非均质渗流问题变换为固定边界的相对均质的较简单问题,大大增加了渗流数值计算的稳定性。

4. 应用研究

计算模型如图4所示。图中为一略经简化的第I梯级50m干滩灰坝断面。由灰体、初期坝、子坝、滤水堆石体与排渗井组成。子坝1、子坝2及初期坝的渗透系数为 $k_2 = 7 \times 10^{-5} \text{cm/s}$,子坝3及灰体的渗透系数为 $k_1 = 1 \times 10^{-3} \text{cm/s}$ 。单位贮水量 $S_s = 0.005$ 。计算工况如下:下游水位保持62.00m;上游水位自108.85m在1h内上升至109.00m并停留24h,然后自109.00m在1h内下降至108.85m并停留24h。

取坐标变换网格为 50×20 ,时间步长 Δt 为600s。非恒定渗流的数值计算结果如图5,6所示,其中图5为非恒定对接组合型坐标变换网格,图6为非恒定渗流的等水头线。本文对模型在以上工况的 $t = 50\text{h}$ 时刻渗流作了电模拟实验,但对工况的整个非恒定过程未能作实验。图6中, $t = 50\text{h}$ 的“■”标记点为电模拟实测值。图6的结果表明, $t = 50\text{h}$ 的浸润线计算值与实验值吻合,并且尽管缺乏完整的非恒定实验过程资料加以验证,但数值计算的非恒定渗流过程是合理的。

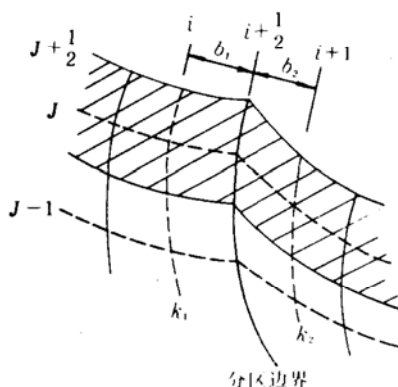


图3 浸润线在分区边界的插值

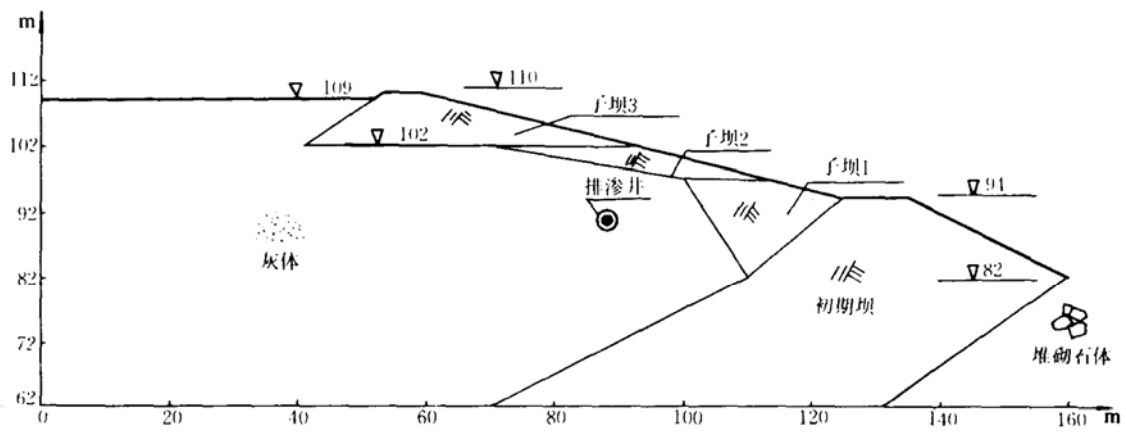


图 1 应用研究的计算模型

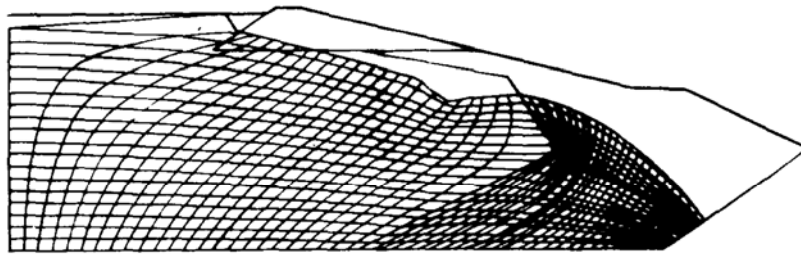
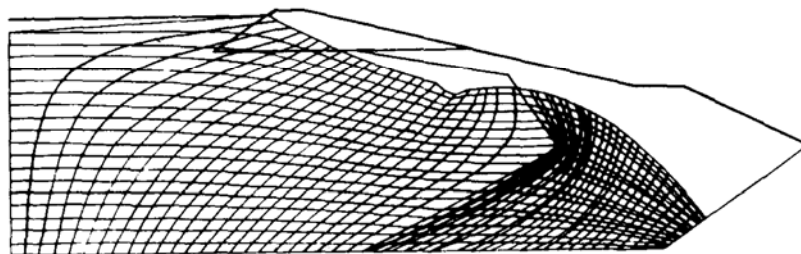
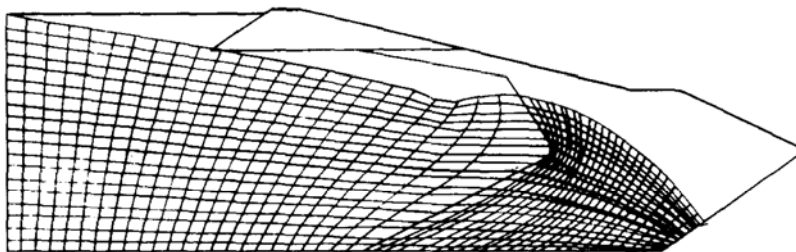
 $t = 0.5h$  $t = 25h$  $t = 50h$ 

图 3 对接组合型坐标变换网格

为比较本文推出的对接组合型坐标变换系统与未采用对接组合的一般的坐标变换系统在渗流计算中的差异, 分别利用两者计算图4的计算模型在不同的 k_1/k_2 情况下的恒定渗流。数值计算在SUN-4小型计算机上进行, 计算的比较见表1。

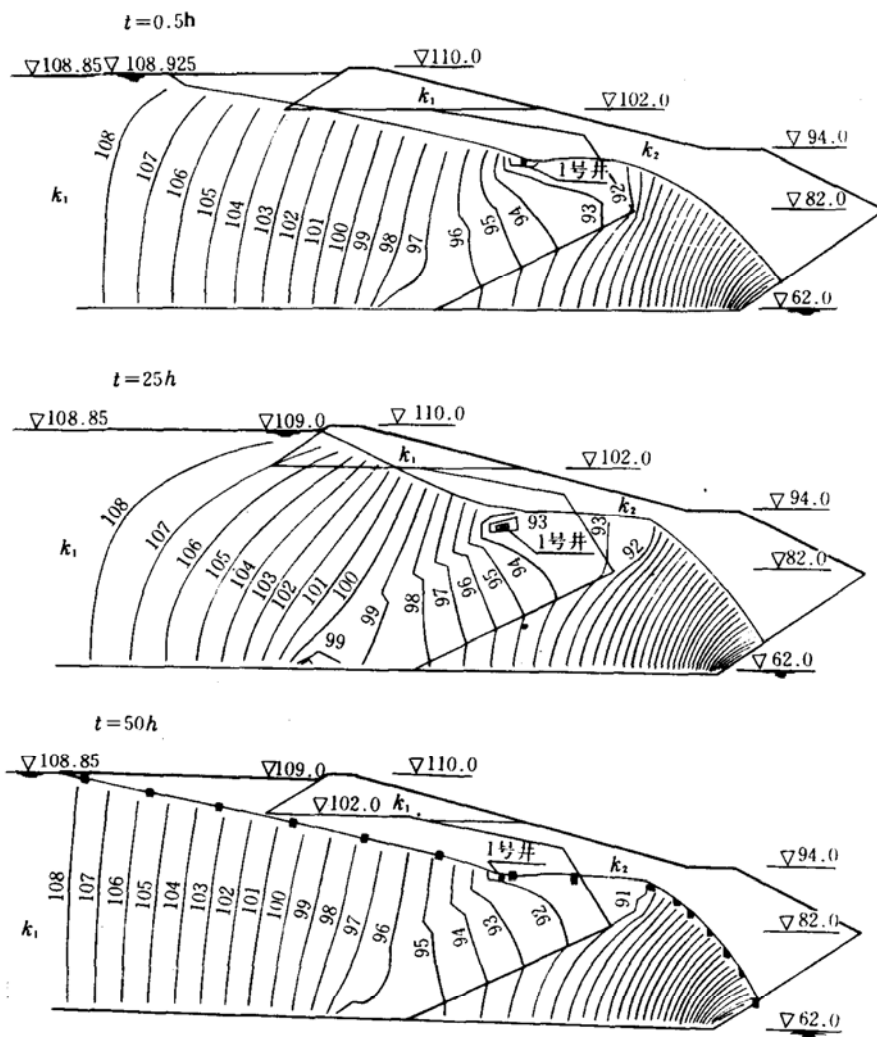


图6 非恒定渗流等水头线

表1

两种坐标变换系统在渗流计算中的比较

k_1/k_2	一般的坐标变换系统			对接组合型坐标变换系统		
	迭代步数	平均每步费时 (s)	其中坐标变换费时 (s)	迭代步数	平均每步费时 (s)	其中坐标变换费时 (s)
1.0	18	3.9	0.4	20	4.5	0.7
2.0	47	4.3	0.7	22	5.0	1.1
5.0	88	8.5	4.7	26	5.2	1.2
10.0	101	14.8	11.0	29	5.4	1.3
15.0	135	18.1	14.3	33	5.8	1.8
20.0	∞	—	—	36	5.9	2.0

5. 结 语

(1) 利用对接组合型坐标变换系统计算非均质堤坝渗流时, 数值稳定性好、收敛快、工作量小、精度高, 具有实用价值。

(2) 本文主要就分层非均质堤坝渗流问题而推出的二维计算方法同样可应用于复杂的任意分区非均质渗流问题, 并可推广至三维复杂渗流的计算。

参 考 文 献

1. Thompson J F. Numerical Solution of Flow Problems Using Body-fitted Coordinate Systems. Computational Fluid Dynamics, ed by Kollman W. 1980.
2. 程 亮, 李鉴初, 罗远铨. 渗流问题数值模拟计算的新方法. 大连理工大学学报, 1990, 30(2).
3. 陶同康. 堤坝非稳定渗流数学模型. 水利学报, 1980, (3).

简 讯

计算机方法在岩土力学及工程中的应用

国际学术讨论会在西安召开

计算机方法在岩土力学及工程中的应用国际学术讨论会于1993年5月24日至28日在西安召开。本次会议由国际岩土力学计算机方法及发展学会(前身为岩土力学数值方法国际委员会)主办, 西安矿业学院和清华大学联合承办。出席会议的国外代表约30人, 他们分别来自美国、英国、德国、西班牙、法国、澳大利亚、奥地利、瑞典、瑞士, 以色列、日本等十多个国家和地区。另外有台湾省和中国在国外留学或从事研究的学者及国内代表100多人参加了会议。

本次会议是第七届和第八届国际岩土力学计算机方法及发展会议之间的一次专题性学术讨论会, 会议的宗旨是促进本学科的研究与工程应用之间更好的结合。国际著名岩土力学专家, 国际岩土力学计算机方法及发展学会主席C.S.Desai 教授等5位中外学者在会上作了特邀报告, 50多位学者在会上宣读了论文, 近200篇论文分成如下11个专题编入会议论文集, 即①理论、模型及本构关系, ②数值计算及耦合方法, ③岩石断裂及损伤, ④反分析问题, ⑤动力、地震及爆炸问题, ⑥实验室试验及现场量测, ⑦边坡和堤坝, ⑧隧道及地下工程, ⑨采矿工程, ⑩模糊、随机及可靠性问题, ⑪计算机软件及其它。会议还就岩土力学中本构关系、边坡工程专题进行了重点讨论。

(本刊通讯员 徐千成)