

双剪弹塑性模型及其在土工问题中的应用*

俞茂宏

孟晓明

(西安交通大学)

(四川省建筑科学研究院, 成都)

一、前言

在土的弹塑性模型中,最著名并广为应用的为 Mohr-Coulomb 模型(以下简称M-C模型)和Drucker-Prager 模型(以下简称 D-P模型),近年又提出了 Lade-Duncan 模型(以下简称 L-D模型)。它们都具有各自的特点,也分别存在一些不足^[1,2]。

1.M-C模型:没有考虑中间主应力 σ_2 的影响,求得的极限载荷偏小,根据D-C模型计算的变形过大,与实验不符^[1,2]。

2.D-P模型:没有考虑应力偏量第三不变量的影响,不能反映土的屈服面在拉压子午线上的不同,与真实情况不符^[1,2]。

3.L-D模型:缺少物理意义,当 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中任一主应力为零时,准则表达式中将出现无穷大项。

M-C模型的主要问题是没考虑 σ_2 效应,为此已进行了近百年的研究,但没有得到一个理论上的说明,成为有关学科多年未决的难题之一。近年来的很多研究指出:对岩土类材料,中间主应力效应是一个基本特性^[4],"中间主应力效应问题应该给以解决,这是具有巨大实际重要性的事"^[5]。"增加中间主应力的效应是从三轴应力条件下所得到的强度增加到较高的值。这种转变的解释是如此之复杂,以至于它的意义还是不明确的"^[5]。

二、双剪弹塑性本构模型

中间主应力 σ_2 效应的研究,多年来一直是力学和工程实际中所注意而没有解决的重要问题。为了解决这一问题,必须对应力状态的基本理论作进一步深入的研究。单元体的主应力状态如图1(a)所示。中间主应力 σ_2 是一个客观存在,即使是平面应力状态,也存在 σ_2 (三种情况为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 = 0$; $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$; $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$)。对于 $\sigma_2 = 0$ 的一拉一压状态,虽然 σ_2 的数值等于零,但中间主应力仍然在起作用。从主应力状态看,这是使人难以理解的。多年的研究也表明,直接从 σ_2 研究 σ_2 效应,碰到了困难。

对主应力状态进行转换,第一作者提出正交八面体单元体模型^[3,6],如图1(b)和(c)所示。图1中的三种单元体是完全等效的。考虑正交八面体模型上的所有应力分量以及它们对材料屈服和破坏的不同贡献,可建立一个强度理论为^[3]

*国家自然科学基金资助项目。

到稿日期:1990-05-07。

$$F = \tau_{13} + \tau_{12} + \beta_T(\sigma_{13} + \sigma_{12}) = C_T, \text{ 当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23} \text{ 时} \quad (1)$$

$$F' = \tau_{13} + \tau_{23} + \beta_T(\sigma_{13} + \sigma_{23}) = C_T, \text{ 当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \leq \tau_{23} + \beta\sigma_{23} \text{ 时} \quad (1')$$

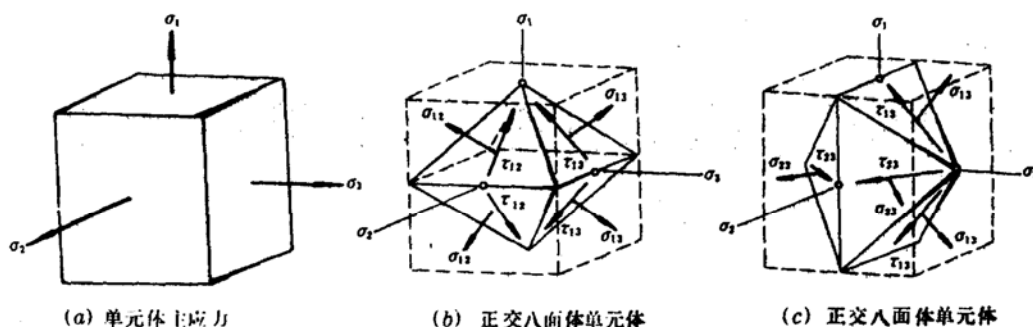


图1 双剪单元体模型

式中

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \tau_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad (2')$$

式(1)中的二个强度参数 β_T 和 C_T 可用另二个参数代替, 如用拉伸强度 σ_t 和压缩强度 σ_c 表示, 可求得

$$\beta_T = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad C_T = \frac{2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} = \frac{2}{1 + \alpha}\sigma_b, \quad \alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \quad (3)$$

代入式(1)(1'), 得到双剪强度理论的主应力表达式为

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b, \quad \text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \text{ 时} \quad (4)$$

$$F' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_b, \quad \text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha} \text{ 时} \quad (4')$$

如用土力学中的强度参数 c 和 φ 表示, 则双剪强度理论可写为

$$F = \sigma_1(1 + \sin\varphi) - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)(1 - \sin\varphi) = 2c\cos\varphi, \quad \text{当 } F \geq F' \text{ 时} \quad (5)$$

$$F' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 - \sin\varphi) = 2c \cdot \cos\varphi, \quad \text{当 } F \leq F' \text{ 时} \quad (5')$$

双剪强度理论的应力张量不变量 I_1 和应力偏量不变量 J_2 和 $J_3(\theta)$ 的表达式则为

$$F = (1 - \alpha)\frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\theta \cdot (1 + \frac{\alpha}{2}) = \sigma_b, \quad \text{当 } F \geq F' \text{ 时}, \quad (6)$$

$$F' = (1 - \alpha)\frac{I_1}{3} + (\alpha + \frac{1}{2})\sqrt{J_2}(\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta) = \sigma_b, \quad \text{当 } F \leq F' \text{ 时} \quad (6')$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad (7)$$

在双剪强度理论式(1)(1')中, 如不考虑中间剪应力 τ_{12} 或 τ_{23} 以及它们作用面上的正应力 σ_{12} 或 σ_{23} , 则双剪强度理论的两个表达式合并为一式 $F = F' = \tau_{13} + \beta_T\sigma_{13} = C_T$, 由此可得 $F = F' = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 = \sigma_b$, 以及 $\sigma_1(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 - \sin\varphi) = 2c\cos\varphi$, 此即为著名的莫尔库仑强度理论。由此也可见, 莫尔库仑强度理论为双剪强度理论的一个特例。

基于双剪强度理论的双剪弹塑性本构方程采用相关联的正交法则, 弹塑性增量应力-应变关系为

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}]\{d\varepsilon\} \quad (7)$$

$$[D_{ep}] = [D_e] - [D_p] = [D_e] - \frac{[D_e]\{q\}([D_e]\{q\})^T}{\{q\}^T[D_e]\{q\} + \{p\}^T\{q\}} \quad (7')$$

式中 $[D_{ep}]$ 为弹塑性矩阵; $[D_e]$ 为弹性矩阵, $[D_p]$ 阵中的列向量为

$$\{q\}^T = [q_1, q_2, q_3, 2q_{12}, 2q_{23}, 2q_{31}] \quad (8)$$

$$\{p\}^T = [p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{23}, p_{31}] \quad (8')$$

$$q_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad p_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \quad (9)$$

它们均与莫尔库仑弹塑性本构关系相同^[7], 但式(9)中的屈服函数 F 采用双剪强度理论式(4) (4')或(5) (5')或(6) (6'), 并且在运算过程中需根据各点的应力状态和判别条件 $F \geq F'$ 或 $F \leq F'$ 来决定选用 F 或 F' 式。这一点比一般常用的 $Mises$ 准则、 $D-P$ 准则或 $M-C$ 准则复杂, 但在计算机处理中相差甚微。式(9)中的硬化参数由城墙土的三轴试验确定, 加载面采用等向强化规律, 并编制了相应的平面问题有限元计算程序。

三、古城墙夯土的三轴试验结果

城墙南含光门遗址修复发掘过程中, 发现有唐代夯土和外包的明代夯土。配合修复工程分别取唐代土和明代土大量试样进行了四个围压下的三轴试验和其它参数测定。明代土的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ 曲线无明显硬化, 硬化参数 H 取为零; 唐代土用双线性硬化规律简化, 试验曲线分别如图2(a), (b)所示。计算参数如表1所示。

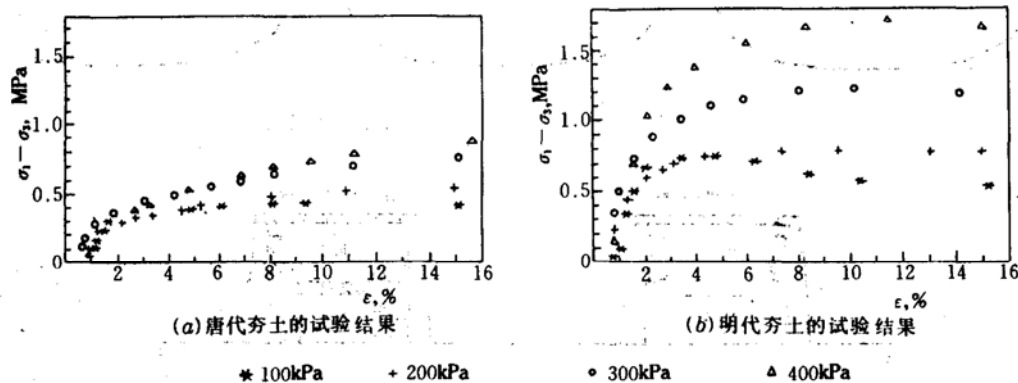


图2 不同围压下的应力应变曲线

表1

		唐代土	明代土	明城砖
1	弹性模量 E (MPa)	48.4	69.0	2225
2	泊松比 ν	0.392	0.347	0.1
3	容量 ρ	1.87	1.91	1.54
4	c	1.18	0.35	4.83
5	φ	20.0°	40.0°	56.7°
6	硬化参数 H'	0.248	0	0

四、平面问题有限元弹塑性分析

根据西安古城墙实例, 取有限元单元划分如图3所示。土与砖砌体交界面采用六节点的接触面单元如图中左右二小图所示。其余部分采用四边形八节点的二次等参数单元。方程组的求解采用波前法。图4和图5为计算实例。

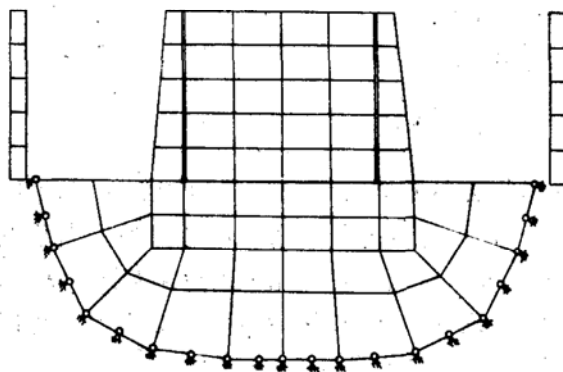


图3 西安古城墙计算单元图

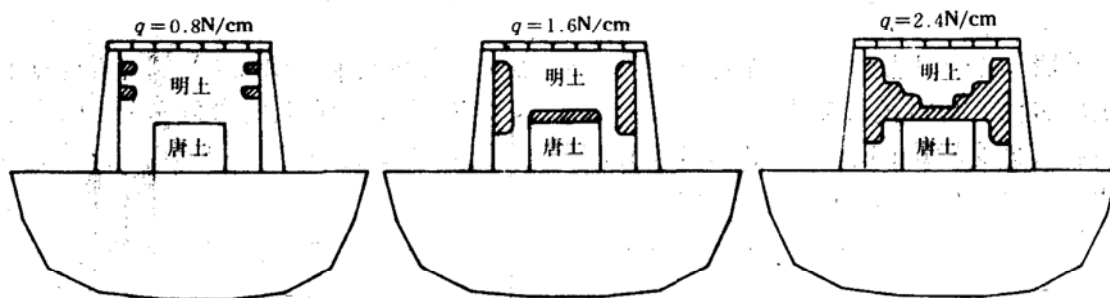


图4 均布载荷下的塑性区扩展(双剪弹塑性模型)

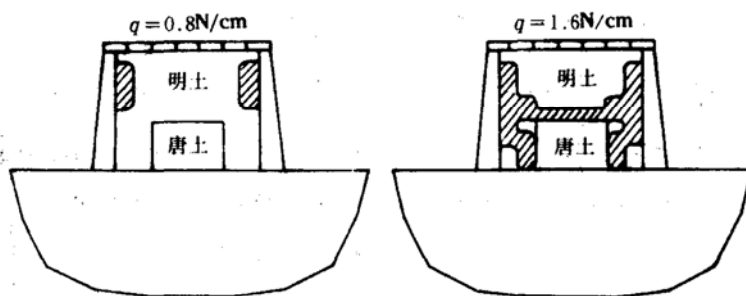


图5 均布载荷下的塑性区扩展(M-C模型)

图4为双剪弹塑性模型计算得出的塑性区扩展过程; 图5为采用M-C理论及相应的流动法则所得出的结果。可见两者在同样载荷下的塑性区以及最终的极限载荷均不同。双剪弹塑性模型考虑了中间主应力效应, 将提高结构的承载能力。

此外还进行了各种载荷(均布、集中、组合等)、有孔洞、地下防空洞引起的塌落等情况的分析, 得出的结果与实际情况相符合。这些结果较多, 均已提交有关部门供古城墙保护和开发参考, 并将另文发表, 这里不再赘述。

五、结 论

1. 本文提出的双剪弹塑性本构模型考虑了单元体的所有应力分量, 反映了中间主应力效应。M-C模型为其特例。

2. 采用双剪弹塑性模型, 编制出相应的有限元计算程序, 并将它们应用到工程实际问题分析, 是切实可行的。程序中也可选择M-C模型和D-P模型, 以作比较。

3. 采用双剪弹塑性模型算得的塑性区比用M-C模型的塑性区小, 即用双剪弹塑性模型得出的极限载荷比用M-C准则得出的极限载荷大, 证明了M-C理论要比双剪弹塑性模型早屈服的理论推断, 也与采用双剪强度理论所得到的结果一致, 充分发挥了应用M-C模型后尚存的材料强度潜能。可取得较好的经济效果。

本文研究配合西安古城墙含光门遗址修复工程和北门箭楼抢险工程进行, 研究工作得到西安环城建设委员会和北门箭楼抢险指挥部的大力支持, 特致衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] Chen W F, Baladi G Y. Soil Plasticity—Theory and Implementation. Elsevier, 1985.
- [2] Gudehus G ed. 有限元法在岩土力学中的应用. 张清, 张弥译. 中国铁道出版社, 1983: 122.
- [3] 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广. 中国科学, A辑, 1985, 28(12).
- [4] Michelis P. Int J Plasticity. 1987, 3: 249~270.
- [5] Jaeger J C, Cook N G W. 岩石力学基础. 工程力学研究所译, 科学出版社, 1981: 130.
- [6] 俞茂宏. 复杂应力状态下材料屈服和破坏的一个新模型及其系列理论. 力学学报, 1989, 21增刊: 42~49.
- [7] Owen D R J, Hinton E. Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice. Pineridge Press Limited, 1980.