

岩石和混凝土类脆性材料强度理论探讨

段亚辉 陆述远

(武汉水利电力学院水力发电工程系)

提 要

本文从材料构成的基本物理概念出发, 简要说明了材料的屈服是受三向应力、荷载历史、外界环境等的作用, 材料内部紧密相连的质点间的距离增大到某临界值 K_0 所致。由此提出了最大分离位移 (MAXSD) 屈服准则。并与岩石真三轴压缩试验和混凝土双轴试验结果, 以及莫尔-库仑等屈服准则进行了比较, 证实了其合理性和适用性。

一、前 言

鉴于人们对岩石、混凝土类脆性材料性能了解的程度直接关系到土木建筑物的造价和安全性, 因而很有必要对这些材料性能, 特别是复杂应力条件下的强度特性进行深入的研究。

尽管国内外曾进行了大量的研究工作, 并且提出了众多的强度理论^[1], 但终因岩石、混凝土类材料强度的离散性、以及基本物理力学性质(如单轴抗拉、压强度, 变形模量等)对强度的影响, 以致至今仍未得到一个能在三向拉伸到三向压缩的全过程都与试验结果吻合的强度理论。本文力图在这方面做点有益的探讨。

二、岩石和混凝土类脆性材料的 MAXSD 屈服准则

材料是物质组成的, 其内部各质点间的相互联系是由吸引力和排斥力决定的。这种属于材料特性的吸引力和排斥力都是质点间距离的函数。质点间距离的变化, 反映了互相作用力的大小。而质点间的距离是由材料的应力状态、荷载历史 and 环境影响所决定的。因此, 质点间的距离是决定材料强度和断裂的基本变量。即可以用质点间的距离 r 达到某临界值 K_0 , 即

$$r = K_0 \quad (1)$$

作为判断材料屈服的准则, 可称为最大分离位移 MAXSD 屈服准则。

对处于三向应力状态的某物体(图1(a)), 假设在三向应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 作用下, 最终屈服时将产生一个破裂面。破裂面的法线与主应力的方向余弦为 (l, m, n) , 破裂面上的应力为 σ_n, τ_n 。在利用式(1)推导屈服准则的应力表达式时, 过去多假设破裂面垂直于质点间距离最先达到 K_0 的两质点的连线, 即破裂面法线与该两质点连线的夹角 $\theta=0^\circ$, 从而得到最大拉应变屈服准则。笔者则认为, 产生破裂面的原因, 是破裂面上的应力 σ_n, τ_n 共同作用的结果。在此应力作用下, 材料的屈服将从所有处于截面两侧且紧密结合在一起的两质点中, 择其间

距最先达到 K_0 的部位开始, 而且会随荷载的增加进而扩展形成最终的破裂面。由于质点的排列是任意的, 即截面两侧紧密结合的质点连线与破裂面法线的夹角是随机的, 可能是一 $90^\circ \sim 90^\circ$ 间的某个角度。所以, 最先屈服部位的两质点的连线与破裂面法线的夹角可能是 0° , 也可能是某个角度 θ_0 。什么角度上两质点间距离最易达到 K_0 就最先屈服。 θ_0 的大小, 取决于应力 σ_n 与 τ_n 的相对比值。

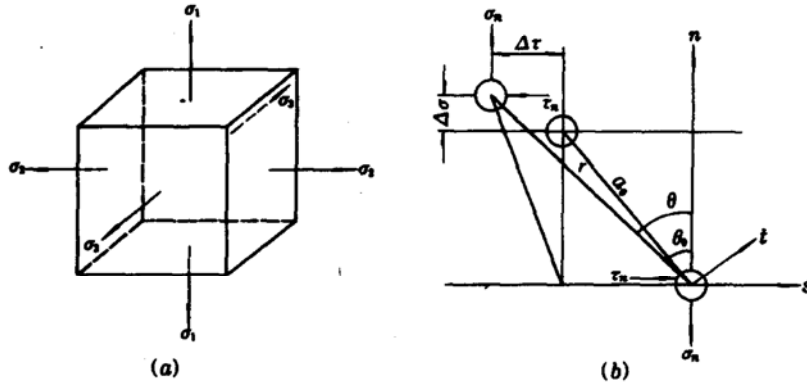


图1 三向应力状态下质点位移

如果破裂面两侧紧密结合的两质点, 在受力前的间距及其连线与破裂面法线的夹角 a_0, θ_0 在应力 σ_n, τ_n 作用下产生了相对位移 $\Delta\sigma, \Delta\tau$ 之后变为 r, θ 如图1(b),

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma &= \frac{\sigma}{E} a_0 \cos \theta_0 \\ \Delta\tau &= \frac{\tau_n}{G} a_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$r^2 = (a_0 \cos \theta_0 + \Delta\sigma)^2 + (a_0 \sin \theta_0 + \Delta\tau)^2$$

其中 $\sigma = \sigma_n - \mu(\sigma_s + \sigma_t) = (1 + \mu)\sigma_n - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \text{ (应力均以拉为正)}$$

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \sigma_n^2;$$

式中 σ_s, σ_t 分别为垂直 σ_n 两侧平面上的正应力; E, G, μ 分别为材料至屈服的割线模量、剪切模量和泊松比。

据以上分析, 材料的屈服将从质点间距离最易达到 K_0 , 即 θ_0 为最不利的角度的两质点间开始。因此, 可将式(2)代入式(1), 令其左端关于 θ_0 的导数等于零, 取极大值, 得到用 σ_n, τ_n 表示的屈服准则及最不利角度 θ_0 的计算式

$$\left(\frac{\tau_n}{G}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{E} + 1\right)^2 + \sqrt{\left[\left(\frac{\tau_n}{G}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{E} + 1\right)^2 - 1\right]^2 + 4\left(\frac{\tau_n}{G}\right)^2} = 2\left(\frac{K_0}{a_0}\right)^2 - 1 \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = 2 \frac{\tau_n}{G} \cdot \left[\left(\frac{\sigma}{E} + 1\right)^2 + \left(\frac{\tau_n}{G}\right)^2 - 1 \right]^{-1} \quad (4)$$

一般 $\left(\frac{\tau_n}{G}\right)^2 \ll \frac{\tau_n}{G}$, $\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 \ll \frac{\sigma}{E}$ 可以忽略不计。取 $E \approx 2(1 + \mu)G$, 则上面两式简化为

$$\sqrt{\sigma^2 + 4(1 + \mu)^2 \tau_n^2} + \sigma = \left[\left(\frac{K_0}{a_0}\right)^2 - 1 \right] E = C_0 \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = 2(1 + \mu) \frac{\tau_n}{\sigma} \quad (6)$$

由以上两式可知, 在 $\sigma > 0, \tau_n = 0$ 的拉伸断裂情况, $\theta_0 = 0^\circ$, 破裂面与最易屈服部位的两质点连线垂直, 式(5)即为最大拉应变屈服准则; 在 $\sigma < 0$ 的受压屈服情况, 破裂面上的 τ_n 必不等于零, 即破裂面必定与最大主应力和最小主应力斜交。否则, 由式(5)将得出材料不会屈服的错误结论。交角的大小和用主应力表示的屈服准则, 同样可以按最不利原则求解。即令式(5)左端关于斜截面法线的方向余弦(l, m, n)的导数等于零($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), 取其极大值。在 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 的条件下, 屈服准则和破裂面的方向可依不同情况表示如下:

受压屈服时

$$F = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)C - \frac{3}{4}C^2 - \frac{2\mu}{1+\mu}C(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad (7)$$

$$l^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{\sigma_1 - \sigma_3} \right) \quad m = 0 \quad n^2 = 1 - l^2 \quad (8)$$

受拉断裂($\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$)时

$$F = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) - b = 0 \quad (9)$$

$$l = 1 \quad m = n = 0 \quad (10)$$

式中 $C = C_0/(1+\mu) = f(\mu, K_0)E_c$, $b = \frac{1}{2}C_0 = g(K_0)E_t$; E_c, E_t 分别为三轴压缩和三轴拉伸时材料至屈服的割线模量。

显然, 式(9)即为最大拉应变屈服准则的表达式。笔者认为它仅适于 $\sigma > 0$ 的受拉断裂情况。即最大拉应变屈服准则是 MAXSD 屈服准则的一部分。

三、MAXSD 屈服准则的屈服面

MAXSD 屈服准则的屈服面是由式(7)和式(9)确定的内接曲面。两式中的参数 b, C , 是与包括割线模量 E_t 和 E_c 在内的基本物理力学参数有关的参变量, 必须由试验确定。考虑到割线模量 E_c 是围压应力 σ_1, σ_2 的函数, 而 E_t 是 σ_2, σ_3 的函数, 且为非线性关系^[2,3], 因此 b, C 也是主应力的非线性函数。为了应用方便, 并且能有较好的精度起见, 近似假设

$$C = c_1 + a_1\sigma_1 + b_1\sigma_1^2 + d_1\sigma_2 + e_1\sigma_2^2 + f_1\sigma_1\sigma_2 \quad (11)$$

$$b = c_2 + a_2\sigma_3 + b_2\sigma_3^2 + d_2\sigma_2 + e_2\sigma_2^2 + f_2\sigma_2\sigma_3 \quad (12)$$

下面, 我们将讨论该假设的合理性和近似程度及其对理论屈服面与试验曲线的吻合程度的直接影响。

式(11), (12)中的常数 c_1, c_2 , 可由单轴压缩和单轴拉伸试验确定。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{3} \left[\sqrt{\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 + 3} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \right] R_c \\ c_2 &= R_t \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 R_c, R_t 分别为单轴抗压强度和单轴抗拉强度。

其余常数, 比如式(11)中的5个常数, 可由三轴压缩试验结果中取5组试验数据($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)代入式(7)和式(11)联立求解; 式(12)中的5个常数, 则由5组三轴拉伸和拉压试验数据代入式(9)和式(12)联立求解。显然, 基本物理力学参数和性质不同的材料, 各组试验值一般不会相同, 求解得到的各常数也不会全相等。如单轴抗压、抗拉强度不同的材料, 其 c_1 和 c_2 不会相等。因此, 屈服面也将各异。

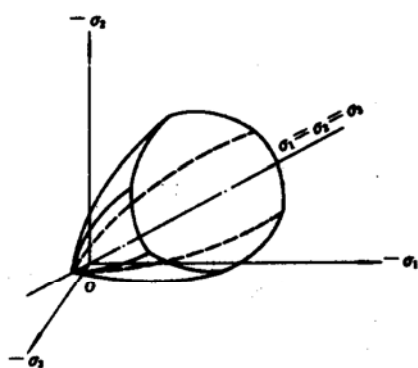


图2 MAXSD 准则屈服面

为便于在主应力空间表示MAXSD 屈服准则, 可将其用 π 平面上极坐标 r_σ, θ_σ 表示

受压屈服时

$$2r_\sigma^2 \cos^2 \theta_\sigma - \sqrt{\frac{2}{3}} C r_\sigma \sin \theta_\sigma + \frac{2}{3} \frac{1-2\mu}{1+\mu} C I_1 - \frac{3}{4} C^2 = 0 \quad (14)$$

受拉断裂时:

$$\frac{2}{3} r_\sigma \left[\sin \left(\theta_\sigma + \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\mu}{2} (\sin \theta_\sigma - \sqrt{3} \cos \theta_\sigma) \right] + \frac{1-2\mu}{3} I_1 - b = 0 \quad (15)$$

式中 I_1 为应力张量的第一不变量。

MAXSD 屈服准则的屈服面, 是一个曲边六角形截面的曲线锥形体(图2)。

四、MAXSD 屈服准则与试验结果的比较

(一) 与岩石真三轴压缩试验的比较

三轴压缩情况的屈服面由式(7)确定。图3和图4分别是中细砂岩^[2,3]和白云岩^[4]真三轴压缩试验曲线, 及相应的 MAXSD 屈服准则的理论曲线。在求解理论曲线和参数 C 时, 从各试验曲线中所取的5组试验值及计得相应点的 C 值列于表1。在计算中近似取 $\mu = 0.25$ (因未能找到具体数值), 因为 C 是反映材料基本物理力学性质综合影响的函数, 这样近似取值对最终的屈服面估计影响不大(曾取 $\mu = 0.17$ 计算; 屈服曲线变化极小)。求得 C 的表达式

中细砂岩

$$C = 23.84 - 2.355\sigma_1 - 0.99887\sigma_1^2 - 1.879\sigma_2 - 0.3285\sigma_2^2 + 1.1537\sigma_1\sigma_2 \quad (16)$$

白云岩

$$C = 237.47 - 2.2023\sigma_1 - 0.0119\sigma_1^2 - 0.9247\sigma_2 - 0.00122\sigma_2^2 + 0.00294\sigma_1\sigma_2 \quad (17)$$

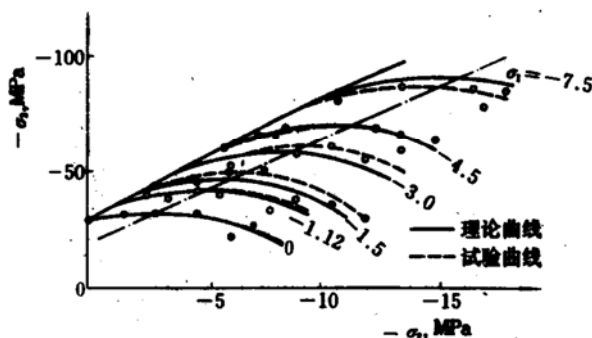
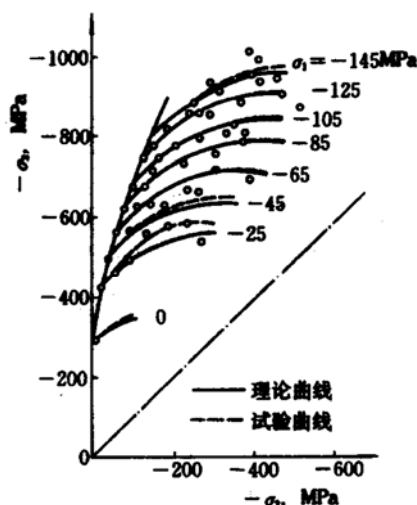
图3 中细砂岩 σ_3 随 σ_2 增加的变化图图4 白云岩 σ_3 随 σ_2 增加的变化图

表1 参数C计算简表(应力: MPa)

序号		1	2	3	4	5
中 细 砂 岩	σ_1	0	0	-4.5	-4.5	-1.12
	σ_2	-1.5	-7.0	-5.83	-10.42	-5.7
	σ_3	-31.2	-23.83	-60.0	-68.7	-40.3
	C	25.92	20.90	44.27	52.225	32.63
白 云 岩	σ_1	-65	-65	-65	-125	-125
	σ_2	-100	-200	-400	-159	-300
	σ_3	-608	-678	-726	-780	-877
	C	429.74	504.80	581.82	501.48	604.90

(二)与混凝土双轴试验结果的比较

图5虚线是混凝土双轴试验所得极限包络线^[5]。在 $\sigma_1=0$ 的平面内,对于双轴压缩的情况,在式(7)中取 $\sigma_1=0$;对于双轴拉伸和拉压($\sigma_2>0$)的情况,采用下述与式(9)类似的公式

$$F = \sigma_2 - \mu\sigma_3 - b = 0 \quad (18)$$

此时,参数 b, C 可按上述同样的方法,取 $\mu=0.167$ 求得。

对双轴压缩情况:取试验值 $(\sigma_2, \sigma_3)=(-0.4, -1.2)R_c$,
 $(-1.0, -1.11)R_c$,得

$$C = 0.773R_c - 0.7048\sigma_2 - 0.4899\frac{1}{R_c}\sigma_2^2 \quad (19)$$

对双轴拉伸和拉压($\sigma_2>0$)情况:取试验值 (σ_2, σ_3)
 $= (0, -1.0)R_c, (0.6R_c, -0.5R_c)$,得

$$b = R_t + \left(0.6\frac{R_t}{R_c} - 0.167\right)\sigma_3 - 0.4\frac{R_t}{R_c}\sigma_3^2 \quad (20)$$

将式(19)及(20)分别代入式(7)和(18),即得到双轴情况相应的MAXSD理论屈服曲线,如图5中实线所示。

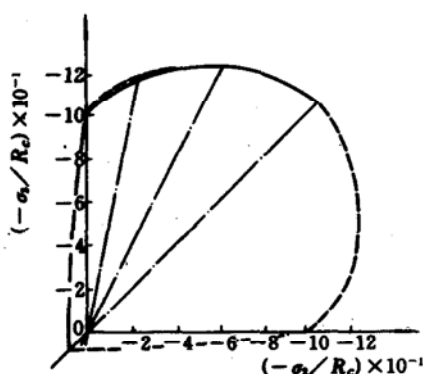


图5 混凝土双轴极限包络线

(三)岩石真三轴压缩屈服时的破裂角

所谓“破裂角”,即是破裂面与主拉应力 σ_3 的夹角 β 。按MAXSD屈服准则计算,在受拉($\sigma_1>0$)断裂时, $\beta=0^\circ$ 破裂面与最大主拉应力 σ_1 垂直,在受压屈服时,破裂角随围压而变化,由式(8)计算。图6是岩石真三轴压缩情况下的理论破裂角 β 随围压应力 σ_1, σ_2 的变化曲线。图6

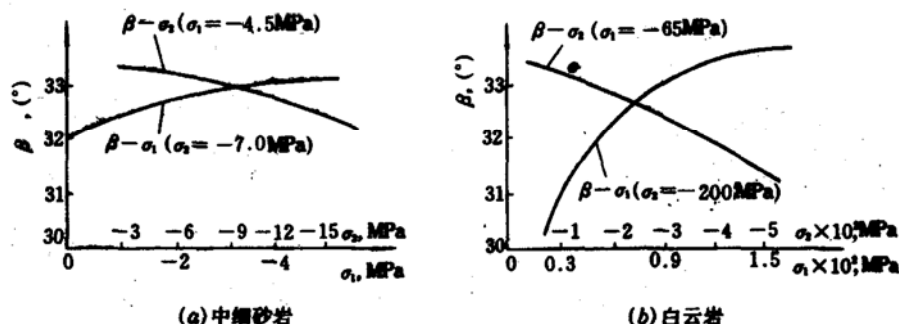


图6 破裂角与围压应力的关系(MAXSD)准则

说明, 岩石受压屈服时的破裂角随着最大主应力 σ_1 的减小(即最小主压应力增大)而增大, 随着中间主应力 σ_2 的减小而减小; σ_2 对破裂角的影响要比 σ_1 小得多。

五、与莫尔-库仑等屈服准则的比较分析

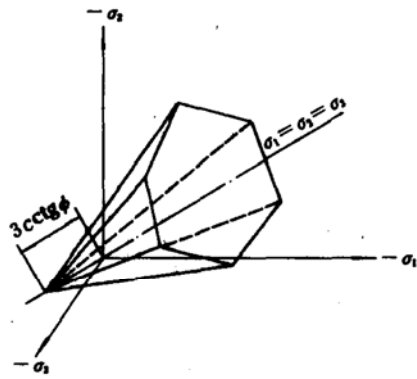


图7 莫尔-库仑屈服面

莫尔-库仑屈服准则的屈服面是一个不规则六角形截面的角锥体(图7)。在 π 平面上的投影如图8所示。相应地, 内摩擦角 φ 和凝聚力 c 是采用白云岩在单轴压缩和静水压力 $\sigma_m = -300.7\text{MPa}$, $\theta_\sigma = 30^\circ$ (即 $\sigma_1 = \sigma_2 = -105\text{MPa}$, $\sigma_3 = -692\text{MPa}$)条件下的试验值经反演得到的: $\varphi = 36.1^\circ$, $c = 72.72\text{MPa}$ 。在图8中还示出了不同屈服准则在 π 平面上的屈服曲线和白云岩的试验值。

由图2~8, 可以从如下几方面对MAXSD屈服准则与莫尔-库仑等屈服准则进行简单的分析比较。

1. π 平面上的几何图形, 在莫尔-库仑等屈服准则情况下, 均随静水压力 σ_m 线性扩大; 而MAXSD屈服准则, 则呈曲线变化, σ_m 较小时随 σ_m 迅速扩大, σ_m 较大时随之扩大缓慢(图2)。常规三轴拉伸($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$)与三轴压缩($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$)强度之比, 莫尔-库仑等屈服准则均为常数(推广的屈列斯卡和米赛斯屈服准则, 其比值为1); 而MAXSD屈服准则是随 σ_m 增大而变化, 与试验结果较吻合, 如图8所示。

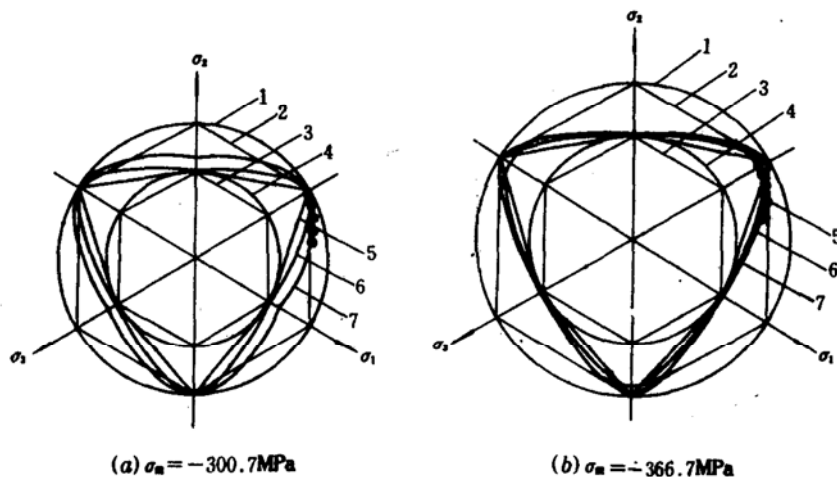


图8 不同屈服条件下 π 平面屈服曲线(白云岩)

1—外角圆锥, 2—外角正六边形, 3—内角正六边形, 4—内角圆锥,

5—莫尔-库仑, 6—辛克维兹-潘迪, 7—MAXSD

2. 莫尔-库仑屈服准则与第二主应力 σ_2 无关。MAXSD屈服准则反映了 σ_2 的影响, 在任意的三向应力状态均与试验结果较吻合。图3~5中, 理论曲线有时与试验曲线有点偏差, 主要是式(9), (10)采用的是主应力的二次函数, 而且是各取5组试验数据求解式中常数之故。如果采用更高次的曲线和最小二乘法拟合曲线, 那么效果会更好。

3. 在 π 平面上, MAXSD屈服准则与试验曲线吻合最好, 其次是辛克维兹-潘迪和莫尔-库仑屈服条件。但如果抗剪参数 φ 和 c 不是按本文的方法经反演得出, 而是由通常在低围压

情况的抗剪试验得到, 则后者可能误差更大。

4. 材料的破裂角在采用莫尔-库仑准则时为常数, 即 $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。它不能反映不同应力状态的影响。推广的屈列斯卡和米赛斯准则不能给出破裂角。MAXSD 屈服准则能反映不同材料和不同应力状态的影响, 在受拉时 $\beta = 0^\circ$, 受压屈服时, 随 σ_1 减小而增大, 随 σ_2 减小而减小。这一规律与试验结果较为相符, 至于计算值是否十分准确, 还有待今后进一步试验研究。

六、结 论

MAXSD 屈服准则能反映众多基本物理力学性质 (R_c, R_t, E, μ 等) 对材料强度的影响。同时, 它还包含了最大拉应变屈服准则。根据与岩石真三轴压缩试验和混凝土双轴 (拉伸、拉压和压缩) 试验结果的比较来看, 在任意的三向应力状态均与试验结果较吻合, 且比莫尔-库仑等屈服准则的吻合程度更好。初步说明了 MAXSD 屈服准则对判断岩石、混凝土类脆性材料屈服的适用性, 有可能在生产实践中广泛应用。但关于破裂角计算的准确性有待今后进一步试验研究。

最后必须着重指出的是, 本文关于 MAXSD 屈服准则的研究仅是一个初步的探讨。如果能对今后关于脆性材料强度的研究起到一点促进作用, 笔者就感到十分欣慰了。

参 考 文 献

- [1] 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础. 中国建筑工业出版社, 1989: 52~83.
- [2] 陶振宇主编. 岩石力学的理论与实践. 水利出版社, 1981: 101~103.
- [3] 张金铸, 林天健. 岩石三轴试验中应力状态和破坏性质的转变. 力学学报, 1979, (2).
- [4] 茂木清夫. 岩石破壊と地震予知. 材料(日本), 1974, 23(248): 320~331.
- [5] Ebrahim Tasuji M, Floyd Slate O, Arthur Niloson H. The Deformation and the Rupture of Solids Subjected to Multiaxial Stresses, 1, Beton-Concrete, 1972: 71~78.

An Exploration of the Strength Theory on the Rock and Concrete Brittle Materials

Duan Ya-hui, Lu Shu-yuan

(Wuhan University of hydraulic and electric engineering)

Abstract

The materials be yielded due to its particles separated to a critical value K_0 which is effected by the factors of three-dimensional stress, loading history, external environment etc. From the fundamental physical concepts of the materials composition, the yield criterion of the maximun separate displacement (MAXSD) is put forward. The MAXSD is compared with the result of the rock true triaxial compression test and that of the concrete twin-shaft, and is compared with Mohr-Coulomb's yield criterion to prove its reasonable and suitable for the rock and concrete brittle materials.