

岩土类材料的多重势面弹塑性本构模型理论

杨光华

(广东省水利水电科学研究所, 广州)

一、前言

传统的增量塑性本构理论是以塑性公设为基础, 以屈服面的概念为前提而建立的, 其关键则是所谓正交法则。岩土力学的弹塑性本构理论, 目前主要是依据传统塑性本构理论的假设和概念而建立的, 如剑桥模型^[1], 黄文熙等的清华模型^[2,3], 其屈服面是依据正交法则来确定的, 而真正的土的屈服面是很难象金属材料那样, 由实验通过屈服的定义来确定的, 因为岩土类材料不象金属具有一个明确的屈服点。土一开始即有塑性变形的, 因此, 屈服面的概念严格说来是一种理想化的概念。把这种概念用于岩土类材料是存在不少困难的, 因而, 目前的一种观点是去发展一种不用屈服面概念作为其理论前提和基本假设的塑性理论。内时塑性理论就是这种设想的理论^[4]。由屈服面概念所引出的另一个问题则是所谓关联和非关联的流动法则问题。一些观点认为非关联概念是不合理的^[5], 但实际应用却不少, 如著名的 Lade-Duncan 模型^[6]等。对此, 笔者认为关键是屈服面的定义, 目前土力学中的一些屈服面, 很多是人为假定的, 如一些作者把 ϵ_v^p 等值线作为屈服面。因此, 人为假定的屈服面不同, 则无法保证正交关系成立。解决这一问题, 可以放弃屈服面的概念, 代之以塑性状态方程概念^[7]。塑性状态方程的函数形式可以人为选择, 可以选择与塑性势函数相同, 也可以不同。从数学角度, 拟合的结果是相同的, 由此而可以克服屈服面概念所带来的问题, 本文是这种思想的继续和发展。

土的塑性本构理论中的另一个问题是所谓塑性应变增量方向的唯一性问题。目前一些观点认为, 岩土类材料中, 塑性应变增量方向是与加荷方向有关的^[8], 不存在唯一性。如果是这样, 则与整体屈服面的正交性是不成立的, 传统的塑性理论也就不适用了。由此, 人们发展了所谓多重屈服面模型^[9-12], 以反映加荷方向的影响。然而, 多重屈服面模型仍沿用了传统塑性理论的屈服面概念和正交法则。只是这里的正交法则是分部塑性应变增量与各相应屈服面正交, 也有不用正交法则的^[11]。显然, 这种多重屈服面模型仍是在传统理论的概念上建立的, 缺乏坚实的数学基础。它只是为了使模型计算和试验结果更符合而采用的。目前岩土本构模型理论虽然很多, 但大多都是基于传统材料的理论框架和物理概念上建立的, 很少从数学角度上、从全新的概念上进行研究。笔者认为这是岩土本构模型理论发展缓慢的一个原因。由于传统理论中存在如上所述的种种缺陷, 笔者试图从数学角度上, 提出一套建立材料本构模型的新的体系^[7,13,14,15], 本文提出的方法, 则是从数学上的矢量代数角度出发, 提出多重势面的模型理论, 把多维空间中的单个势函数确定变为多个势函数来确定, 可以使问题的解决更为方便, 且多重屈服面模型也可以作为本文数学模型的特例。

二、线性空间中的矢量表示

由矢量代数理论可知, n 维空间中的任一矢量 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 可以用任意 n 个线性无关的 n

维矢量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ 来线性地表示。

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n \quad (1)$$

而 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 可以由以下方程组唯一地确定。

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $b_{ik} (i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, n)$ 为矢量 $\vec{b}_k$ 的第 i 个分量。

实际问题中, 有时可能只知道 $\vec{a}$ 中的部份分量, 如知道了 n 个分量中的前 $r (r < n)$ 个分量 $a_1, a_2, \dots, a_r$, 则为表示这 n 维空间中的这 r 个分量, 我们可以用 r 个线性无关的 n 维空间上的矢量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ 来线性地表示, 即

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_r \vec{b}_r \quad (3)$$

同理, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 可以由 $\vec{a}$ 中已知的 r 个分量和 $\vec{b}_i (i=1, 2, \dots, r)$ 中的前 r 个分量所得的 r 个方程来确定, 即

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

由于用 n 个 n 维空间矢量 $\vec{b}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 来线性地表示 n 维空间一个矢量 $\vec{a}$, 对这 n 个矢量 $\vec{b}_i$ 的唯一限制是要求这 n 个矢量线性无关, 为此, 我们可以选择 n 维空间中 n 个势函数 $\phi_i (i=1, 2, \dots, n)$, 用这 n 个势函数的梯度矢量 $\text{grad}(\phi_i)$ 来代替 n 个矢量 $\vec{b}_i$, 即

$$\vec{b}_i = \text{grad}(\phi_i) \quad (5)$$

我们选择的这 n 个势函数 ϕ_i , 必须使其各梯度矢量是线性无关的, 则由式(1)、(5)有

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{grad}(\phi_i) \quad (6)$$

由式(3)、(5)有

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{grad}(\phi_i) \quad (7)$$

待定系数 λ_i 即可以由以上的方法而确定。

必须注意的是, n 维空间中的一个矢量, 必须也仅需用 n 个线性无关的矢量唯一地线性表示。而当这个矢量仅知道其中的 $r (r < n)$ 个分量时, 则用 r 个线性无关的矢量即可唯一地线性表示已知的部分。而未知的部分可近似地用这 r 个矢量进行外推。外推的结果是否能真实地表示需拟合的矢量的 $(n-r)$ 个未知分量, 则是无法肯定的, 实质上是不能的, 除非这个矢量的真实维数是 r 维的。

把以上的数学思想应用于建立弹塑性本构模型, 即是本文所要叙述的多重势面模型理论。

三、真三轴试验条件下的三重势面弹塑性模型

一点的应力状态可以由三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 完全地表示。同样, 一点的应变状态可以由三个主应变 $\varepsilon_1,$

$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 完全地表示。因此, 一点的应力或应变状态完全可以在三维主空间上表示, 而材料本构特性中的应力与应变的关系, 同样可以在主空间上完全地表示出来。因此, 本构模型可以在主空间上建立, 然后通过坐标变换变为有限元计算所需的张量式本构模型^[14]。本文在此则采用势函数的方法来变换^[15]。对主空间上的三个主塑性应变增量 ($d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p$), 我们可以把其看作为一个三维空间上的矢量, 称其为主塑性应变增量矢量。这一矢量可以在主应力空间 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) 上表示, 也可以在主应变空间 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) 上表示。先讨论在主应力空间上的表示, 为此, 将主塑性应变空间 $\varepsilon_i^p (i=1, 2, 3)$ 和主应力空间 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ 的坐标重合, 由以上的矢量代数理论, 我们可以假设任意三个主应力空间的势函数 $G_1(\sigma_i), G_2(\sigma_i), G_3(\sigma_i)$, 要求这三个势函数的梯度矢量线性无关即可, 则主塑性应变增量矢量即可以由这三个线性无关的梯度矢量线性地表示

$$\vec{d\varepsilon_i^p} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \text{grad}(G_k) \quad (8)$$

$$\text{即 } \{d\varepsilon_i^p\} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_i} \right\} \quad (9)$$

其中 $\{d\varepsilon_i^p\} = [d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p]^T$, $\left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_i} \right\} = \left[\frac{\partial G_k}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_3} \right]^T$, λ_k 为待定系数, 可以通过拟合试验结果所得的塑性状态方程来求得^[7,13], 由真三轴的试验, 我们总可以得到三个主塑性应变 ε_i^p 与三个主应力 σ_i 关系的试验数据, 这些数据在几何空间上形成所谓试验曲线或试验曲面, 曲线或曲面方程总可以用数学方法来拟合这些试验数据而得^[16], 我们称其为塑性状态方程^[7], 用函数形式表示如下:

$$\varepsilon_i^p = f_i(\sigma_j) \quad (10)$$

$$\text{即 } \left. \begin{aligned} \varepsilon_1^p &= f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \varepsilon_2^p &= f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \varepsilon_3^p &= f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

注意这里的塑性状态方程的概念是与屈服面概念不同的, 塑性状态方程是塑性应变与应力所满足的方程, 是通过数学拟合试验数据而得的。其函数形式是多样的, 可人为选择的。如在式(10)或式(11)中, 当左边也取为三个 ε_i^p 的函数 $F_i(\varepsilon_j^p)$, 则此时等号两边的 F_i 或 f_i 中的一个可以任意选择, 另一个则由拟合试验结果而得。当 F_i 取不同形式, 则相应的 f_i 即要变化。因此, F_i 可以根据实际方便而人为地任意选定。式(10)或式(11)取 $F_i = \varepsilon_i^p$ 只是其中一种形式, 而作为屈服函数, 是作为判别材料是否屈服的一个准则。对于一定的材料在一定的条件下应是具有唯一性的, 且如上述, 对于无明显屈服极限的岩土类材料, 屈服面的确定是一个困难的工作。显然, 塑性状态方程的确定则相对要容易得多, 它不受屈服概念的限制, 当然, 屈服函数也可以作为其中的一种塑性状态方程。

微分式(10)得

$$d\varepsilon_i^p = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} \quad (12)$$

若式(10)中的主应力用应力不变量或坐标应力分量表示, 则 $\{d\sigma\}$ 是相应的增量, 由式(9)代入式(12), 则得

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_i} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (13)$$

另一方面, 由主应力和坐标应力分量的关系以及坐标变换的关系, 当主塑性应变增量 $d\varepsilon_k^p (k=1, 2, 3)$ 的三个主方向与主应力 $\sigma_k (k=1, 2, 3)$ 的三个主方向相同时, 则有^[15]

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\varepsilon_k^p \cdot \frac{\partial \sigma_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (14)$$

把式(9)代入, 则得

$$|d\epsilon^p| = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma} \right\} \quad (15)$$

式中 $|d\epsilon^p| = [d\epsilon_x^p, d\epsilon_y^p, d\epsilon_z^p, d\gamma_{xy}^p, d\gamma_{yz}^p, d\gamma_{zx}^p]^T$, $\left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma} \right\} = \left[\frac{\partial G_k}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{zx}} \right]^T$,

进一步象传统塑性本构理论那样, 把总应变 $|d\epsilon|$ 分解为弹性应变 $|d\epsilon^e|$ 和塑性应变 $|d\epsilon^p|$, 即

$$|d\epsilon| = |d\epsilon^e| + |d\epsilon^p| \quad (16)$$

弹性应变符合弹性本构关系

$$|d\sigma| = [D]|d\epsilon^e| \quad (17)$$

$[D]$ 为弹性矩阵, 则由式(16)、(17)有

$$|d\sigma| = [D]|d\epsilon| - [D]|d\epsilon^p| \quad (18)$$

由式(15)代入式(18), 然后再代入式(13), 则得

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_k \left(\frac{\partial G_k}{\partial \sigma_i} + \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma} \right\} \right) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T [D] |d\epsilon| \quad (i=1, 2, 3) \quad (19)$$

解此三个方程组成的联立方程组, 求得三个待定系数为

$$\lambda_k = \frac{1}{|A|} \left(\sum_{i=1}^3 A_{ik} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \right) |d\epsilon| \quad (20)$$

式中

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{ik} = \frac{\partial G_k}{\partial \sigma_i} + \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma} \right\}$$

A_{ik} 为 $|A|$ 中 a_{ik} 相应的代数余子式。

由式(20)代回式(15), 再代入式(18), 即得到可用于有限元等数值分析所需的多重势面弹塑性本构方程为

$$|d\sigma| = \left([D] - \frac{1}{|A|} [D] \cdot \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial G_k}{\partial \sigma} \right\} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 A_{ik} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D] \right) \right) |d\epsilon| \quad (21)$$

显然, 式(21)的关键是三个塑性状态方程 f_1, f_2, f_3 , 这可以根据真三轴的试验结果, 用数学拟合法求得。而三个势函数 G_1, G_2, G_3 则在要求其梯度矢量线性无关的条件下, 可任意假定。最简单的则是直接取三个不变量作为三个势函数, 如取 $G_1 = \sigma_1, G_2 = \sigma_2, G_3 = \sigma_3$ 或 $G_1 = p, G_2 = q, G_3 = \theta$, 或取 $G_1 = I_1, G_2 = I_2, G_3 = I_3$ (I_1, I_2, I_3 为三个应力不变量), 因此, 多重势面模型是比较方便的, 且数学原理很明确。

四、常规三轴试验条件下的双重势面模型

在常规三轴试验条件下, 只能得到二维空间上的应力-应变关系, 通常表示为 (p, q) 和 $(\epsilon_v, \bar{\epsilon})$ 的关系, 此时表示一点的应力状态只有两个独立量, 即两个独立的主应力或不变量, 为表示任一点的应力状态必须要有三个独立的主应力。因此, 常规三轴试验的结果, 可以看作为一个三维矢量已知二个分量, 实质上可以把它看作为一个二维矢量。两个塑性应变分量 $d\epsilon_v^p, d\bar{\epsilon}^p$ 组成的矢量, 可以用两个线性无关的势函数梯度矢量来完全地表示出来。设应力空间中的两个势函数分别为 $\phi_1(p, q), \phi_2(p, q)$, 令 ϵ_v^p 与 p 轴, $\bar{\epsilon}^p$ 与 q 轴重合, 则有

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial p} \\ d\bar{\varepsilon}^p &= \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 λ_1, λ_2 为两个待定系数, 可由数学拟合试验结果所得的两个塑性状态方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v^p &= f_1(p, q) \\ \bar{\varepsilon}^p &= f_2(p, q) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

来确定, 微分上式得

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma \\ d\bar{\varepsilon}^p &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

代入式(22), 则得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial p} &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma \\ \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q} &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

当势函数仅为 p, q 的函数时, 由式(15)得

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \\ d\varepsilon_{ij}^p &= d\varepsilon_v^p \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\bar{\varepsilon}^p \cdot \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (26)$$

由式(22)代入得

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (27)$$

用矩阵形式表示为

$$[d\varepsilon] = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \cdot \left\{ \frac{\partial \phi_k}{\partial \sigma} \right\} \quad (28)$$

由式(28)代入式(18), 再代入式(25), 则得到

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial p} + \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma} \right\} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial p} + \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma} \right\} \right) &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T [D] [d\varepsilon] \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q} + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma} \right\} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial q} + \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma} \right\} \right) &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T [D] [d\varepsilon] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

或简记为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} &= [b_1]^T [d\varepsilon] \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} &= [b_2]^T [d\varepsilon] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

其中系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, [b_1]^T, [b_2]^T$ 可由式(30)和式(29)相比较得到, 解式(30), 可得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{|A|} (a_{22} [b_1]^T - a_{12} [b_2]^T) [d\varepsilon] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{|A|} (a_{11} [b_2]^T - a_{21} [b_1]^T) [d\varepsilon] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

由式(31)代回式(28), 再代回式(18), 则得

$$|d\sigma| = \left([D] - \frac{1}{|A|} \left(\left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma} \right\} (a_{22}|b_1|^T - a_{12}|b_2|^T) + \left\{ \frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma} \right\} \cdot (a_{11}|b_2|^T - a_{21}|b_1|^T) \right) \right) |d\epsilon| \quad (32)$$

$$\text{或简记为} \quad |d\sigma| = [D_{ep}] |d\epsilon| \quad (33)$$

$[D_{ep}]$ 可比较式(33)和式(32)而得, 此即为可直接用于有限元等数值分析的弹塑性本构关系, $[D_{ep}]$ 即为弹塑性矩阵。实际中, 若已知弹性矩阵 $[D]$, 并通过常规三轴的试验结果求得了塑性状态方程式(23), 然后假定两个与其梯度矢量线性无关的任意势函数 ϕ_1, ϕ_2 , 则可以由以上各式求得 $[D_{ep}]$, ϕ_1, ϕ_2 的最简单形式为取 $\phi_1 = p$, $\phi_2 = q$ 。

五、模型参数的确定问题

以常规三轴的试验条件为例说明如下:

(一) 弹性矩阵 $[D]$ 的确定

弹性矩阵 $[D]$ 可按广义Hooke定律所定义的参数来确定, 如可以用 K, G 两个参数来表示, 这两个参数可以用回弹试验来确定, 如可以采用文献[15]的试验方法, 用等向固结下的 $\lg p - \epsilon_v$ 回弹曲线来确定 K , 用 $\sigma_3 = \text{const}$ 时 $q - \bar{\epsilon}$ 的回弹曲线确定 G 。 K, G 一经确定, 则 $[D]$ 即可知。

(二) 塑性状态方程的确定

$[D]$ 已知, 即可以分解总应变得到塑性应变 $(\epsilon_v^p, \bar{\epsilon}^p)$ 与应力状态 (p, q) 关系的试验曲线, 在 $\sigma_3 = \text{const}$ 的常规三轴试验条件下, 可以得到 $\epsilon_v^p - (p, q), \bar{\epsilon}^p - (p, q)$ 关系的试验曲面, 通常 $\bar{\epsilon}^p - (p, q)$ 的关系表示为 $q - (\bar{\epsilon}^p, \sigma_3)$ 的试验曲面, 试验曲面如图1, 2所示^[17], 由一般的数学拟合法^[18]即可拟合试验曲面, 得到拟合函数, 设为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v^p &= f_1(q, \sigma_3) \\ q &= f_2(\bar{\epsilon}^p, \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

此即为所求的两个塑性状态方程, 考虑到此时 $\sigma_3 = p - \frac{1}{3}q$, 微分上式即可得到

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_v^p &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\}^T |d\sigma| = \left(\frac{\partial f_1}{\partial p} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T + \frac{\partial f_1}{\partial q} \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T \right) |d\sigma| \\ d\bar{\epsilon}^p &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\}^T |d\sigma| = \frac{1}{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{\epsilon}^p}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial p} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\}^T + \frac{\partial f_2}{\partial q} \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T \right) |d\sigma| \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

则式(35)即可代替式(24)。同时实际上式(35)的关键是从式(34)中得到两个试验曲面的四个导数值。因此, 为适用于数值计算机和具有更广的适应性, 可以由数值方法或样条函数法直接由试验曲面确定四个导数值的数值关系, $\frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3}, \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\epsilon}^p}, \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3} - (p, q)$ 。从而在实际应用时, 可以直接根据各单元应力 (p, q) 而得到四个导数值, 不需显式表示式(34)。

(三) 势函数的假定及与多重屈服面模型的关系

最简单的两个势函数为 $\phi_1 = p, \phi_2 = q$, 当然也可以假定为其他的任何形式, 只要梯度矢量线性无关即

可以。

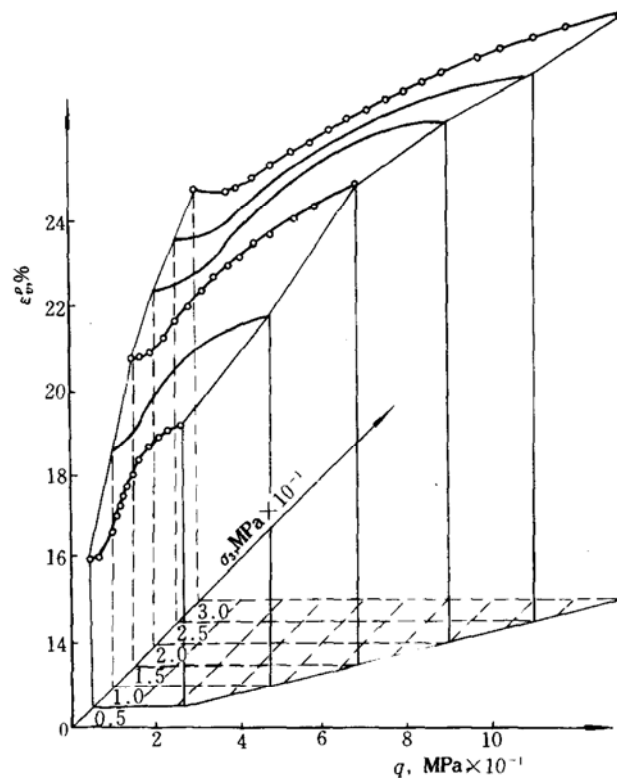


图1

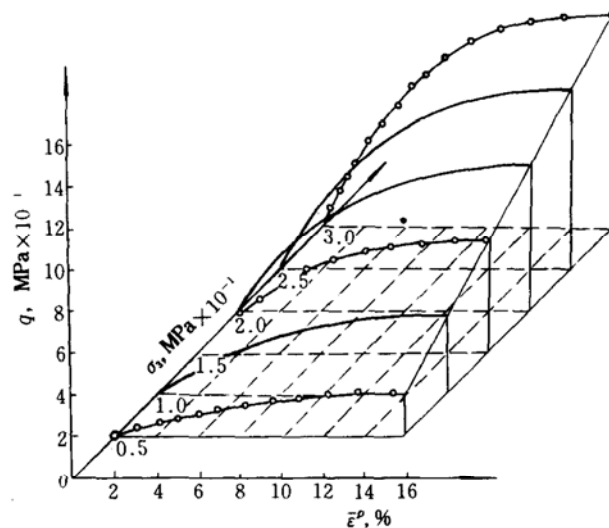


图2

由上可知, 本文的模型数学原理清楚而又并不涉及屈服面的概念, 这与从传统塑性本构理论框架上的多重屈服面是不同的。而当这里的模型中, 取两个势面方程为两个塑性状态方程, 且两个塑性状态方程刚好又是两个屈服面方程时, 则所得到的结果即与目前的双重屈服面模型相同^[12]。因此, 可以把这种情况作为本文理论模型的一种特殊情况, 而本文模型则可以认为是从矢量拟合的角度来揭示多重屈服面理论的数

学实质。

(四)关于模型计算结果与试验结果的比较问题

由以上可见,模型参数是由满足塑性状态方程这一条件确定的,因此,由模型计算所得的结果是与塑性状态方程的计算结果一致的。而塑性状态方程是拟合试验曲面的方程,故模型计算的结果与试验曲面的符合程度完全取决于塑性状态方程拟合试验曲面的精度。若塑性状态方程完全拟合了试验结果,则模型计算的结果必与试验结果完全一致。这在数学理论上是明确的,而试验所需验证的应仅是模型所引入的假设。

六、结 论

本文直接从数学原理出发,提出了建立弹塑性本构关系数学模型的新的理论和方法,其特点是数学原理清楚、明确,物理假设少,易于理解,没有传统理论中由于涉及到屈服面的概念所存在的困难。其出发点和理论基础与目前的多重屈服面理论都不同。以上的方法同样可以象文献[13]那样用于建立应变空间上的系列模型,同样可用于建立本构关系矩阵是满阵的增量非线性本构关系。因此,本文的数学思想方法对于建立材料本构关系具有一般性。最后,笔者认为,从数学角度出发,突破以物理假设或公设为基础而建立的传统本构理论的框架和概念,建立新的、更一般的数学本构理论体系,使在传统的物理假设下又可以得到传统理论体系作为其特例。各种材料的本构模型可通过其力学特性的数学反映而提出数学约束条件,从一般数学本构理论中符合这一约束条件而得到。这可能是材料宏观本构理论发展的一个突破口。限于篇幅,本文仅是数学本构理论内容的一部分,且尚属初步的理论性工作,谬误和不确切之处欢迎专家、同行讨论或指正,以进一步发展和完善土的本构理论。

参 考 文 献

- [1] Roscoe, K. H., Schofield, A. N., Thurairajah, A., Yielding of Clays in States Wetter than Critical, *Geotechnique*, 13, 3, 1963, pp. 211—240.
- [2] 黄文熙, 硬化规律对土的弹塑性应力-应变模型影响的研究, *岩土工程学报*, Vol.2, No.1, 1980, pp.1—11.
- [3] 黄文熙、濮家骝、陈愈炯, 土的硬化规律和屈服函数, *岩土工程学报*, Vol.3, No.3, 1981, pp.19—26.
- [4] Valanis, K. C., A Theory of Viscoplasticity Without a Yield Surface, *Arch. Mech.*, Vol. 23, 1971, pp. 517—551.
- [5] 沈珠江, 土的弹塑性应力应变关系的合理形式, *岩土工程学报*, Vol.2, No.2, 1980, pp.11—19.
- [6] Lade, P. V., Duncan, J. M., Elasto-plastic Stress-strain Theory for Cohesionless Soil, *J. G. E. D.*, ASCE, Vol. 101, No. GT10, 1975, pp.1037—1053.
- [7] 杨光华, 土的弹塑性本构模型理论中的若干问题, 第五届全国土力学与基础工程学术会议论文, 1987年11月, 厦门。
- [8] Prevost, J. H., Hoeg, K., Effective Stress-strain Strain Model for Soils, *J. Geot. Eng. Div.*, ASCE, 101, 3, 1975, pp. 257—278.
- [9] Lade, P. V., Elasto-plastic Stress-strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surface, *Int. J. Solids str.*, 13, 11, 1977, pp. 1019—1035.
- [10] Vermeer, P. A., A Double Hardening Model for Sand, *Geotechnique*, 28, 4, 1978, pp. 413—473.

- [11] 沈珠江, 土的三重屈服面应力应变模式, 固体力学学报, 1984年第2期, pp. 163—174.
- [12] 殷宗泽, 一个土体的双屈服面应力-应变模型, 岩土工程学报, Vol.10, No.4, 1988, pp.64—71.
- [13] 杨光华, 建立弹塑性本构关系的广义塑性位势理论, 第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集(1), 广东珠海, 1988年11月, pp. 140—148.
- [14] 杨光华, 岩土类材料应力-应变本构理论的基本数学问题, 《岩土力学数值方法的工程应用》, 第二届全国岩石力学数值计算与模型试验学术研讨会论文集, 同济大学出版社, 1990年11月, pp.214—219.
- [15] 杨光华, 岩土类工程材料本构关系的势函数模型理论, 第四届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集, 武汉测绘科技大学出版社, 1990年4月, pp. 77—84.
- [16] 黄友谦, 曲线曲面的数值表示和逼近, 上海科学技术出版社, 1984年.
- [17] 陆培炎、陈韶永、熊丽珍、陈名卿、水坠坝冲填土弹塑性本构方程, 岩土工程学报, Vol.6, No.2, 1984, pp.23—39.