

桩基-土共同作用的连续化分析

金问鲁 骆敏
(杭州市城建设计院)

一、前言

当前缺少有效的桩基理论性分析,不易正确地作出桩基的选型和设计。本文按连续化假定,将群桩和相邻土体折算成等效连续体,决定连续体的弹性系数和渗透系数。并以 Laplace 变换形式的固结变分原理,运用有限元的基本思想,分析任何基础平面在不同桩型、桩长以及天然地基中各点、各时刻的变位和应力。

二、连续化假定

如图1所示的桩位图,可能是钢筋混凝土桩、灰桩或砂桩。考虑桩仅受垂直力,砂桩仅增加垂直方向的渗透系数,由此可得连续体的折算弹性系数和渗透系数。图2为所用的桩坐标图。首先按文献[1]写出轴对称问题的表达式:

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}]^T \quad (1)$$

$$\epsilon = [\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{rz}]^T \quad (2)$$

或
$$\epsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]^T \quad (3)$$

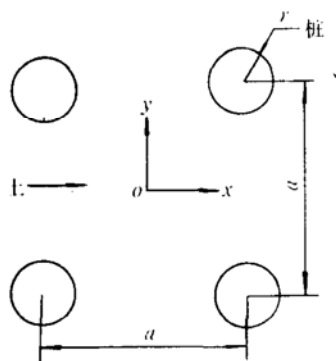


图1

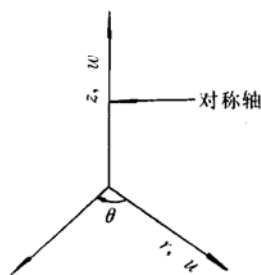


图2

考虑土为各向同性体,桩仅承受垂直力。设桩和土的截面积比 λ =桩面积/土面积,则

弹性系数矩阵 D 为 D_1 , D_2 之和。 D_1 对应于土体, D_2 对应于桩。今有

$$D_1 = \frac{E_1(1-\lambda)(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D_2 = E_2 \lambda \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & \text{SYM} & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

E_1, E_2 分别为土体和桩的弹性系数; μ 为泊松比; 全部弹性系数矩阵为

$$D = D_1 + D_2 \quad (6)$$

设土的渗透系数为 k_1 , 桩的渗透系数为 k_2 , 则 r 和 z 方向的渗透系数分别为

$$k_r = k_1, \quad k_z = (1-\lambda)k_1 + \lambda k_2 \quad (7)$$

三、Laplace变换形式的固结变分原理

在直角坐标系中, 对均质土体, Laplace变换形式的固结变分原理是⁽²⁾:

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_v \left\{ \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2}{3} \phi \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right)^2 + \phi \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} \phi \left[\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & - \tilde{\sigma}_w \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2P} \left[k_x \left(\frac{\partial \sigma_w}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \sigma_w}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \sigma_w}{\partial z} \right)^2 \right] \Big\} dx dy dz \\ & + \iint_{c_F} (\tilde{X} \tilde{u} + \tilde{Y} \tilde{v} + \tilde{Z} \tilde{w}) ds + \iint_{c_a} \frac{1}{P} \tilde{Q} \tilde{\sigma}_w ds \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta \Pi = 0 \quad (9)$$

现将以上原理推广到曲线坐标和非均质材料情况, 则有

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_v \left[\frac{1}{8} E^{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{u}_{\alpha/\beta} + \tilde{u}_{\beta/\alpha}) (\tilde{u}_{\gamma/\delta} + \tilde{u}_{\delta/\gamma}) \right. \\ & - \tilde{\sigma}_w g^{\alpha\beta} \tilde{u}_{\alpha/\beta} - \frac{1}{2P} k^{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_{w/\alpha} \tilde{\sigma}_{w/\beta} + \tilde{P}^{\alpha} \tilde{u}_{\alpha} \Big] dv \\ & + \iint_{c_F} \tilde{P}^{\alpha} \tilde{u}_{\alpha} ds + \iint_{c_a} \frac{1}{P} \tilde{Q} \tilde{\sigma}_w ds \end{aligned} \quad (10)$$

$$\delta \Pi = 0 \quad (11)$$

在柱坐标系中轴对称情况下变分原理是

$$\begin{aligned} \frac{\Pi}{2\pi} = & \iint \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^T D \tilde{\epsilon} - \tilde{\sigma}_w \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\tilde{u}}{r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2P} \left[k_r \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_w}{\partial r} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_w}{\partial z} \right)^2 \right] + \tilde{P} \tilde{w} \right\} r dr dz + \int_{c_F} \tilde{P} \tilde{w} r dr \end{aligned} \quad (12)$$

$$\delta\left(\frac{\Pi}{2\pi}\right)=0 \quad (13)$$

式中 $\tilde{\epsilon}$ 和 $\tilde{D}$ 的表示式见式(3)和式(6)。波号 $\sim$ 表示其 Laplace 变换, P 是 Laplace 变换中的参数。式(12)中仅考虑垂直荷载。

四、有限元构式

为了避免在对称轴 $r=0$ 处应变的奇异性, 令

$$u = \frac{rv}{a} \quad (14)$$

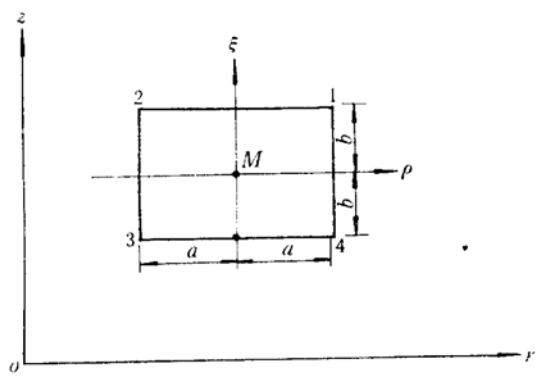
采用矩形单元, 如图3。单元的结点是1, 2, 3, 4; 中点 M 坐标为 r_m, z_m ; 单元内变量为 v, w, σ_w ; 结点处变量为 $V_\sigma, W_\sigma, \sigma_{w\sigma}$; 插入函数为行矩阵 N 。有

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \\ \sigma_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_\sigma \\ W_\sigma \\ \sigma_{w\sigma} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$N = \frac{1}{4ab} [(a+\rho)(b+\xi), (a-\rho)(b+\xi), (a-\rho)(b-\xi), (a+\rho)(b-\xi)] \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} V_\sigma &= [v_1, v_2, v_3, v_4]^T \\ W_\sigma &= [w_1, w_2, w_3, w_4]^T \\ \sigma_{w\sigma} &= [\sigma_{w1}, \sigma_{w2}, \sigma_{w3}, \sigma_{w4}]^T \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由式(3)可以得到



$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{W} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{1}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r})N & 0 \\ \frac{1}{a}N & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{r}{a} \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_\sigma \\ \tilde{W}_\sigma \end{Bmatrix} \quad (18)$$

图3

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\tilde{u}}{r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= \left(\frac{2}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r} \right) \tilde{v} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \\ &= \left[\frac{2}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} = \left[\left(\frac{2}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r} \right) N, \frac{\partial N}{\partial z} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{V}_\sigma \\ \tilde{W}_\sigma \end{Bmatrix} \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_w}{\partial r} &= \frac{\partial N}{\partial r} \tilde{\sigma}_{w\sigma}, \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_w}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial z} \tilde{\sigma}_{w\sigma}, \quad \tilde{P} = N \tilde{p}_\sigma \end{aligned}$$

对于边界单元,如图4,只考虑12, 34边界上的垂直荷载,其边界的插入函数为

$$\left. \begin{aligned} N_u &= \frac{1}{2a}[(a+\rho), (a-\rho)] \quad (\text{上边界12上}) \\ N_b &= \frac{1}{2a}[(a+\rho), (a-\rho)] \quad (\text{下边界34上}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

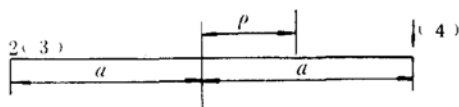


图4

则有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_u &= N_u \tilde{P}_{u\sigma} & \tilde{W}_u &= N_u \tilde{W}_{u\sigma} \\ \tilde{P}_b &= N_b \tilde{P}_{b\sigma} & \tilde{W}_b &= N_b \tilde{W}_{b\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

可将单元泛函写为

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{\text{elem}}}{2\pi} &= \iint \left\{ \frac{1}{2} [\tilde{V}_\sigma, \tilde{W}_\sigma] \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r}\right) N^T & \frac{1}{a} N^T & 0 & \frac{r}{a} \frac{\partial N^T}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} & \frac{\partial N^T}{\partial r} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \times D \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r}\right) N & 0 \\ \frac{1}{a} N & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{r}{a} \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial r} \end{bmatrix} \left. \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{V}_\sigma \\ \tilde{W}_\sigma \end{bmatrix} - \tilde{\sigma}_{w\sigma} N^T \left[\left(\frac{2}{a} + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial r}\right) N, \frac{\partial N}{\partial z} \right] \right\} \begin{bmatrix} \tilde{V}_\sigma \\ \tilde{W}_\sigma \end{bmatrix} \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2P} \tilde{\sigma}_{w\sigma}^T \left(k_r \frac{\partial N^T}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} + k_z \frac{\partial N^T}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial z} \right) \tilde{\sigma}_{w\sigma} + \tilde{P}_\sigma^T N N \tilde{W}_\sigma \right\} r dr dz \\ &\quad + \int_{\Gamma_F} (\tilde{P}_{u\sigma}^T N_u^T N_u \tilde{W}_{u\sigma} + \tilde{P}_{b\sigma}^T N_b^T N_b \tilde{W}_{b\sigma}) r dr \end{aligned} \quad (21)$$

令广义变位矩阵和广义荷载矩阵分别是

$$\tilde{u}_\sigma = [\tilde{V}_\sigma, \tilde{W}_\sigma, \tilde{\sigma}_{w\sigma}]^T, \quad \tilde{Q}_\sigma = [0, \tilde{P}_\sigma, 0]^T \quad (22)$$

则广义单元刚度矩阵为

$$K_{\text{elem}} = \begin{bmatrix} K_{vv} & \text{SYM} \\ K_{vw} & K_{ww} \\ K_{\sigma v} & K_{\sigma w} & K_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \quad (23)$$

单元平衡方程为

$$K_{\text{elem}} \tilde{u}_\sigma = \tilde{Q}_\sigma \quad (24)$$

以下考虑两种情况,即瞬时情况和长久情况。Laplace变换参数 $P \rightarrow \infty$ 时决定 $t=0$ 时的状态, $P=0$ 决定 $t \rightarrow \infty$ 时的状态。

在 $t=0$ 时,显然有 $K_{\sigma\sigma}=0$, $\tilde{Q}_\sigma$ 对应于 $t=0$ 时的荷载,可得初始应力和变位。

$t \rightarrow \infty$ 时,应有 $\sigma_w=0$, $\tilde{Q}_\sigma$ 对应于 $t \rightarrow \infty$ 时的荷载,可得长久应力和变位。

对于 $0 < t < \infty$ 时的过程,用下列指数函数来逼近:

$$f(t) = a + b e^{-\tau} \quad (25)$$

常数 a, b 已由 $t=0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 这两种状态确定。函数 $g(t)$, 对于某些 P 值, 其 Laplace 变换 $g(P)$ 已

经求得, 则为使函数 $g(t)$ 和 $f(t)$ 相等, 采用加权残数法, 令权为 e^{-pt} , 则

$$\int_0^{\infty} [g(t) - f(t)] e^{-pt} dt = g^*(P) - f^*(P) = 0 \quad (26)$$

$$g^*(P) = \frac{a}{P} + \frac{b}{P + \gamma}$$

由此得

$$\gamma = \frac{b \cdot P}{Pg^*(P) - a} - P \quad (27)$$

适当选取 P 值, 进行平均即可。

五、微机程序实现及工程实例

本文提出的计算方法已全部在微机上实现, 并配有前、后处理及各种图形功能。程序实行分棒运行, 各接力棒之间相互独立, 实行内、外存信息交换, 采用先进的内存数据管理系统 JINEGS^[4], 因此解题规模大, 在微机上能求解5000个自由度问题。可以分析以下问题:

1. 天然地基的瞬时沉降、最终沉降及任意时刻沉降;
2. 桩基的瞬时沉降、最终沉降及任意时刻沉降;
3. 在屏幕上显示, 打印机或绘图仪上输出地基的有限元网格图及沉降曲线图。

本文是笔者的研究课题《双层地基承载力的研究与应用》内容之一, 已收到数百万元的经济效益, 并已通过省级技术鉴定。以下是研究项目中两个工程实例。

【例1】 杭州市房管局林家浜小区某住宅, 采用7m ϕ 325短桩, 桩位图略, 地基土分层如图5。

计算得到瞬时沉降 $S_0=2.43\text{cm}$, 最终沉降 $S_{\infty}=40.19\text{cm}$, 任意时刻沉降 $S_t=40.19-37.76e^{-0.3584t}$ ($t \geq 0$), 图6表示计算曲线和实测值比较。

【例2】 杭州市叶青兜小区某住宅, 基础尺寸 $t \times B = (67.1+1.6)\text{m} \times (9+1.5)\text{m}$, 基底压应力 $P=87.5\text{kPa}$, 室外覆土厚0.8m, 采用天然地基。地基土分层如图7。

计算得到最终沉降量 $S_{\infty}=36.51\text{cm}$ 。

m	kPa
1.2	$E_s = 4000$
1.6	$E_s = 1800$
12.8	$E_s = 2200$
4.8	$E_s = 3500$
0.5	$E_s = 5000$
	$E_s = 12000$

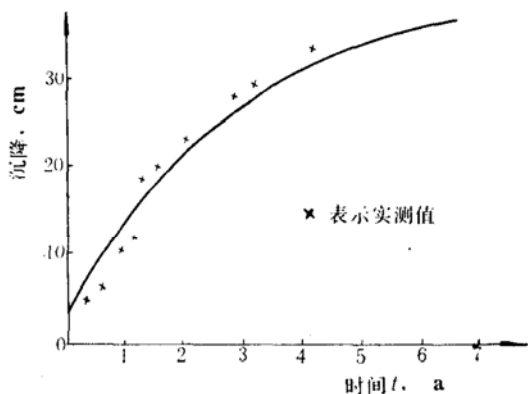


图5

图6

m	kPa
1.8	$E_s = 6300$
0.5	$E_s = 3000$
7.7	$E_s = 2600$
5.4	$E_s = 3600$
1.4	$E_s = 4100$
9.9	$E_s = 4500$
	$E_s = 7700$

图7

参 考 文 献

- [1] 谢贻权、何福保, 弹性和塑性力学中的有限单元法, 机械工业出版社, 北京, 1987年。
- [2] W. 弗留盖, 张量分析与连续介质力学, 白铮译, 中国建筑工业出版社, 北京, 1980年。
- [3] 金问鲁, 弹粘性动力学变分原理的 Laplace 变换形式, 有限元构式及数值方法, 应用数学和力学, No. 6, 1984年。
- [4] 钟万勰, 内存管理系统JINEGS, 大连理工大学工程力学研究所, 1985年。