

莫尔库仑准则的应用范围及 临界应力状态探讨

陶 纪 南

(西安冶金建筑学院矿资系)

一、前 言

岩石有多种破坏形态,根据目前的认识水平,从机理上归纳起来,独立的只有拉坏和剪坏。塑性流动是岩石失稳的一种形式^[1],但和破坏的含义有所不同。在复杂应力状态下,岩石受多种应力的组合作用。其中多向拉伸和多向压缩的破坏,分别受岩石的单轴抗拉强度和抗剪强度所控制。但是,对于拉、压联合作用则表现出复杂的情况,是学术界一直讨论、比较活跃的领域,至今没有定论。另外,抗剪强度准则的应用范围,学者们的看法也不尽相同。本文引入临界应力状态来涉足这一领域的讨论,也许对问题的解决有所裨益。

二、库仑准则的临界应力状态

(一)库仑准则的基本条件

1776年库仑就提出了剪切强度理论,认为材料内任一点发生剪切破坏时,破坏面上的剪应力必须大于或等于材料的凝聚力 and 该面的内摩擦力之和,即

$$\tau_p = c + \sigma \tan \varphi \quad (1)$$

式中 τ_p 为材料的抗剪强度; c 为凝聚力; φ 为内摩擦角; σ 为剪切面上的法向应力。 σ 必须大于零,即法向应力必须是压应力。如果法向应力为拉应力,显然,库仑准则失效。

1883年纳维尔把库仑准则用主应力的形式表达,得到

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\alpha - \tan \varphi \cdot \cos 2\alpha) - \tan \varphi (\sigma_1 + \sigma_3) = 2c \quad (2)$$

式中 α 为剪切面法线与 σ_1 的夹角, α 由下式决定

$$\tan 2\alpha = -1 / \tan \varphi \quad (3)$$

根据三角函数关系有

$$\sin 2\alpha = 1 / (1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = -\operatorname{tg}\varphi / (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

因此, 式(2)可进一步改写为

$$\sigma_1[(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg}\varphi] - \sigma_3[(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}\varphi] = 2c \quad (5)$$

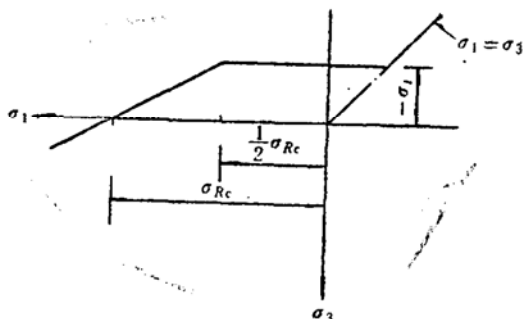


图1 纳维尔准则

这就是纳维尔准则的基本形式^[2], 它是 σ_1, σ_3 平面的一条直线, 见图1。

再根据库仑准则要求 $\sigma > 0$ 的条件, 有

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\alpha$$

$$> 0$$

将式(4)代入上式, 得

$$\sigma_1[(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg}\varphi] + \sigma_3[(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}\varphi] > 0 \quad (6)$$

将式(5), (6)联立求解, 有

$$\sigma_1 > c / [(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg}\varphi] \quad (7)$$

上式是式(5)成立的必要条件。而式(5)与 σ_1 轴的交点($\sigma_3 = 0$)恰为岩石的单轴抗压强度 σ_{RC} 。因此, 式(5)可进一步改写为

$$\sigma_{RC} = 2c / [(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg}\varphi] \quad (8)$$

由(7), (8)两式消去 c 得

$$\sigma_1 > \frac{1}{2}\sigma_{RC} \quad (9)$$

这就是由纳维尔准则得到的满足库仑准则要求斜面上的正应力大于零的基本条件。也就是说, 只有 $\sigma_1 > \frac{1}{2}\sigma_{RC}$ 时, 剪切斜面的法向应力才能大于零, 库仑准则才有效。否则, 库仑准则将失效。

(二) 库仑准则的临界应力状态

由纳维尔准则看出, 当 $\sigma_1 > \frac{1}{2}\sigma_{RC}$ 时, 岩石的破坏由抗剪强度控制, 当 $\sigma_1 < \frac{1}{2}\sigma_{RC}$ 时,

岩石破坏由抗拉强度控制。因此, $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_{RC}$ 与 $\sigma_3 = -\sigma_1$ 这一应力状态是区分受拉破坏与受剪破坏的分界, 我们把这一应力状态定义为临界应力状态。有的作者根据一些试验结果指出^[3], 在拉压联合作用区里, 当压应力小于3倍单轴抗拉强度时, 破坏由单轴抗拉强度 σ_t 所控制, 当压应力为3倍单轴抗拉强度时, 控制破坏的单轴抗拉强度才逐渐地减少。这里虽然没有明

确提出临界应力状态的概念,但实质上已经指出了 $(-\sigma_t, 3\sigma_t)$ 是拉坏和剪坏的转化应力,即临界应力。表1列出了几种脆性材料的临界应力的实验值^[8]与计算值。

表1

临界应力的实验值与计算值

材料名称	单轴抗拉强度 σ_t (MPa)	单轴抗压强度 σ_{RC} (MPa)	临界值		
			实验值	计算值	
				按 $\frac{1}{3}\sigma_{RC}$ 计算	按 $3\sigma_t$ 计算
石膏	0.04	0.3	0.14	0.15	0.12
生铁	1.7	4.8	2.5	2.4	5.1
辉绿岩	3.6	23	14	11.5	10.8
花岗岩	2.1	22	15.5	11.0	6.3

图2所示的石膏和生铁的实验曲线也清晰地显示了这一临界应力。可以看出,笔者建议的临界应力值似更接近实验值。



图2 脆性材料在拉压联合作用下的破坏曲线

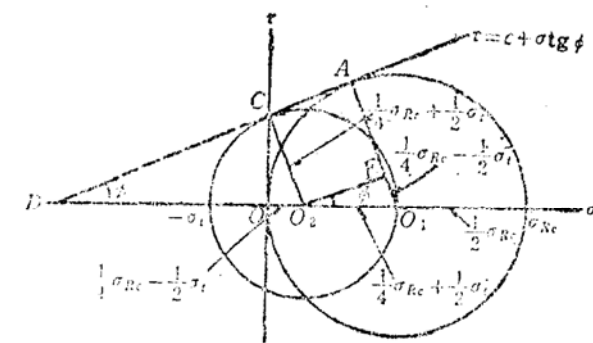
三、临界应力状态的应用

(一) 库仑抗剪强度参数 c, φ 的计算公式

有了临界应力状态的概念就为建立库仑准则各参数之间的关系奠定了基础。以本文建议的临界应力状态和单轴压缩极限应力状态为基础,在 $\tau-\sigma$ 平面上绘制莫尔应力圆,则公切线应满足库仑准则。根据图3的几何关系,由 $\triangle O_2O_1E$ 有

$$\sin\varphi = \frac{\sigma_{RC} - 2\sigma_t}{\sigma_{RC} + 2\sigma_t}, \text{ 解}$$

出 σ_t 得

图3 按 $(-\sigma_t, \frac{1}{2}\sigma_{RC})$ 计算抗剪强度参数

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{RC}}{2} \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \right) = \frac{\sigma_{RC}}{2} \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (10)$$

而用传统方法,以单轴拉伸和压缩的极限应力状态为基础得到的公式为

$$\sigma_t = \sigma_{RC} \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (11)$$

如果以 $(-\sigma_t, 3\sigma_t)$ 作为临界应力, 由图4 $\triangle O_2O_1E$ 有 $\sin\varphi = \frac{\sigma_{RC} - 4\sigma_t}{\sigma_{RC} - 2\sigma_t}$, 化简后得

$$\sigma_t = \sigma_{RC} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{4 - 2 \sin \varphi} \right) \quad (12)$$

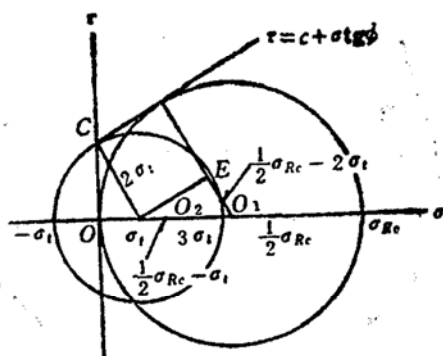


图4 按 $(-\sigma_1, 3\sigma_1)$ 计算抗剪强度参数

由图 3 $\triangle OO_2C$ 有

$$c^2 = (CO_2)^2 - (OO_2)^2$$

$$= \left(\frac{\sigma_{RC}}{4} + \frac{\sigma_t}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_{RC}}{4} - \frac{\sigma_t}{2} \right)^2$$

整理后得

$$c = \sqrt{\frac{\sigma_{RC}\sigma_t}{2}} \quad (13)$$

而根据传统方法得到的公式为

$$c = \frac{\sqrt{\sigma_{RC}\sigma_t}}{2} \quad (14)$$

由图3中 $DO_1 - OO_1 = DO$ 有 $\frac{O_1 A}{\sin \varphi} - \frac{\sigma_{RC}}{2} = \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi}$, 而 $O_1 A = OO_1 = \frac{\sigma_{RC}}{2}$ 代入整理后得

$$\sigma_{RC} = \frac{2c \cdot \cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \cdot \text{由式(10)的三角函数关系有}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2} (\sigma_{RC} - 2\sigma_t)}{4(\sigma_{RC}\sigma_t)^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

而按传统方法求得的结果为

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_{RC} - \sigma_l}{2(\sigma_{RC} \sigma_l)^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

为判别上述公式何者更为可靠,下面把若干种岩石的 $\frac{\sigma_1}{\sigma_{RC}}$ 实测值^[8]与按式(10), (11)和(12)的计算结果作一比较,列于表2。

可以看出, 式(10)即按笔者推荐的临界应力值建立的计算公式更接近实测值。

(二)拉压联合作用下强度准则应用范围

若以 $\tau-\sigma$ 和 $\sigma_1-\sigma_3$ 为座标轴绘制强度曲线,如图 5,则右半平面主要反映了剪切破坏,左半平面反映了受拉破坏。这些都清楚地显示了剪切强度准则只适用于右半平面,而不允许向左侧延伸。因为临界状态是区分受拉破坏和受剪破坏的分界,它限定了莫尔、库仑准则的应

表 2

 $\frac{\sigma_1}{\sigma_{RC}}$ 的 实 测 值 与 计 算 值

岩 石 名 称	实 测 值	按不同理论公式的计算值			
		计算采用的 ϕ 值	公式(10)	公式(11)	公式(12)
页 岩	0.06—0.325	$30^\circ-15^\circ$	0.16—0.294	0.32—0.588	0.167—0.213
砂 岩	0.02—0.17	$50^\circ-35^\circ$	0.066—0.135	0.132—0.27	0.095—0.149
石 灰 岩	0.01—0.067	$50^\circ-35^\circ$	0.066—0.135	0.132—0.27	0.095—0.149
大 理 岩	0.08—0.226	$50^\circ-35^\circ$	0.066—0.135	0.132—0.27	0.095—0.149
花 岗 岩	0.02—0.08	$60^\circ-45^\circ$	0.036—0.086	0.072—0.172	0.059—0.113
石 英 岩	0.06—0.11	$60^\circ-50^\circ$	0.036—0.066	0.072—0.132	0.059—0.095

用范围。至于临界状态与单轴拉伸之间的其它中间状态,则均为受拉破坏所控制(图6)。因此莫尔实验强度曲线应当是临界应力圆、单轴压缩极限应力圆、各种压应力组合的极限应力圆的包络线。而不应当包含单轴拉伸和纯剪极限应力圆。纯剪极限应力圆只适用于那些拉压强度相等的材料,而岩、土的拉压强度相差甚远,不会发生纯剪破坏(图7)。

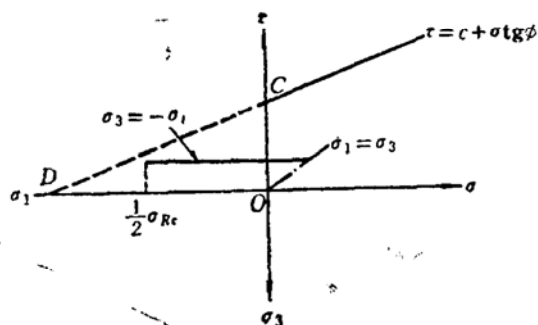


图 5 拉压联合作用

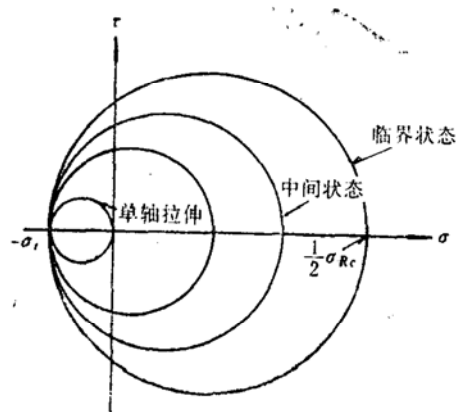


图 6 受拉破坏的各种中间状态

(三)莫尔非线性准则的表达形式

假设莫尔准则的一般形式为^[4]

$$\tau^2 = A\sigma + B \quad (17)$$

利用临界应力状态可确定式(17)中的系数A, B。

设临界应力为 $(-\sigma_t, \frac{1}{2}\sigma_{RC})$, 由图8中C, O₁两点距离有

$$B + \left(\frac{\sigma_{RC}}{4} - \frac{\sigma_t}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{RC}}{4} + \frac{\sigma_t}{2} \right)^2$$

得

$$B = \frac{\sigma_{RC}\sigma_t}{2} \quad (18)$$

根据莫尔强度曲线在C点的法线斜率有

$$\frac{\sqrt{B}}{\left(\frac{\sigma_t}{2} - \frac{\sigma_{RC}}{4}\right)} = \frac{-1}{\frac{d\tau}{d\sigma}}$$

而 $\left. \frac{d\tau}{d\sigma} \right|_{\tau=\sqrt{B}} = \frac{A}{2\sqrt{B}}$ 代入上式得

$$A = \frac{\sigma_{RC} - 2\sigma_t}{2} \quad (19)$$

将式(18), (19)代入式(17), 故有

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_{RC} - 2\sigma_t}{2}\right)\sigma + \frac{\sigma_{RC}\sigma_t}{2} \quad (20)$$

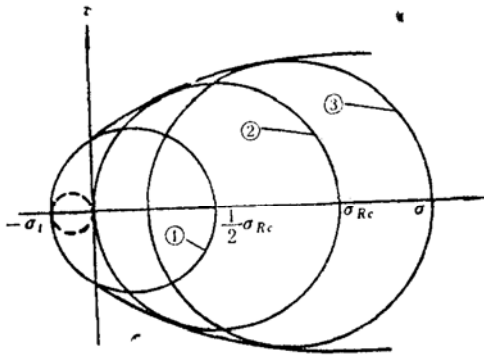


图7 莫尔强度包线画法

- ①临界应力圆, ②单向受压极限应力圆,
③多向受压极限应力圆。

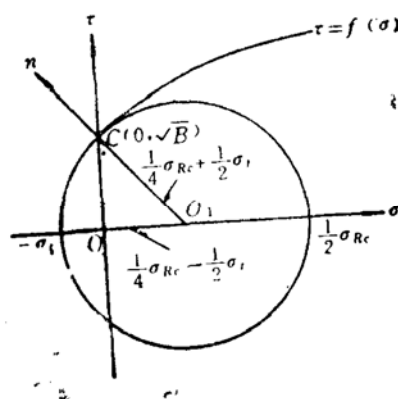


图8 按 $\left(-\sigma_t, \frac{1}{2}\sigma_{RC}\right)$ 确定非线性准则参数

式(20)在 τ 轴C点处的斜率为

$$\left. \frac{d\tau}{d\sigma} \right|_{\tau=\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{2}(\sigma_{RC} - 2\sigma_t)}{4(\sigma_{RC}\sigma_t)^{\frac{1}{2}}} \quad (21)$$

若临界应力为 $(-\sigma_t, 3\sigma_t)$, 由图9中 CO_1 距离有

$$B + \sigma_t^2 = 4\sigma_t^2$$

得

$$B = 3\sigma_t^2 \quad (22)$$

根据强度曲线在C点的法线的斜率有

$$\frac{\sqrt{B}}{-\sigma_t} = \frac{-1}{d\tau/d\sigma} = \frac{-2\sqrt{B}}{A}$$

$$\text{得} \quad A = 2\sigma_t \quad (23)$$

将 A, B 代入式(17)得

$$\tau^2 = 2\sigma_t\sigma + 3\sigma_t^2 \quad (24)$$

式(24)在 τ 轴 C 点的斜率为

$$\left. \frac{d\tau}{d\sigma} \right|_{\tau=\sqrt{B}} = \frac{A}{2\sqrt{B}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

显然, 对于任何岩石, C 点的切线斜率为常数是不够合理的。

从两种临界应力计算的莫尔强度准则的参数可以看出: 采用 $(-\sigma_t, \frac{1}{2}\sigma_{RC})$ 临界应力值, 即式(20), 它在 τ 轴上的截距和斜率与库仑准则完全一致, 这样就把线性与非线性准则衔接起来了。本文建议的临界应力状态出现的这种衔接关系并不是偶然现象, 因为岩石在低应力状态下库仑准则具有足够的准确性, 只是在高应力时才出现非线性的情况。对于确定的岩石, 在拉压联合作用下, 两个强度准则都应当反映出相同的应用范围, 即它们的临界应力值应当是相等的。这种衔接在一定程度上从一个侧面说明了临界应力取值的正确性。当然, 式(20)的可靠程度究竟怎样, 还需要经受更广泛的实验检验。

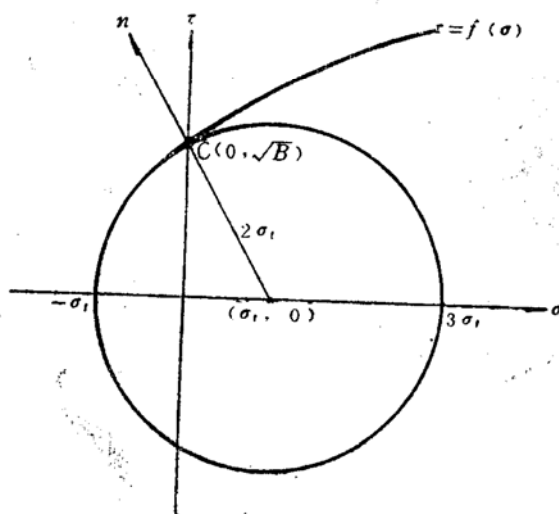


图9 按 $(-\sigma_t, 3\sigma_t)$ 确定非线性准则参数

四、结 论

1. 莫尔、库仑准则及其各种变换形式均属抗剪强度准则。它们只能描述剪切破坏的情况, 不能说明受拉破坏的情况, 受拉破坏要用抗拉强度准则描述。因此, 剪切强度准则在 τ - σ 坐标系中, 只在右半轴范围有效。

2. 临界应力状态是区分受拉破坏和受剪破坏的分界, 莫尔、库仑准则只能用来描述受剪破坏。因此, 试图建立抗剪强度准则左半轴形式的一切努力将是徒劳的。

3. 引入临界应力状态的概念有益于阐明抗剪强度准则的应用范围, 和建立准则中各参数与简单拉伸、压缩试验结果之间的关系, 有益于根据试验数据更准确地计算抗剪强度参数, 因而有重要的工程实用价值, 建议有关部门开展实验研究。本文根据纳维尔准则得到的

临界应力值 $(-\sigma_t, \frac{1}{2}\sigma_{RC})$ 虽然有待实验的进一步检验, 但从已有的不多的实验结果看, 还是令人满意的。

参 考 文 献

- [1] 陶纪南, 岩体失稳类型和失稳判据, 岩土工程学报, Vol.10, No. 6, 1988年。
- [2] J. C. 耶格等, 岩石力学基础, 科学出版社, 第1版, 1981年。
- [3] 李先炜, 岩块力学性质, 煤炭工业出版社, 第1版, 1983年。
- [4] 戴庆、童光煦, 脆性岩体的一个经验破坏准则, 有色金属, 1987年, 第6期。