

两向不等压作用下圆形巷道 弹塑性分析摄动解

魏悦广*

(山东矿业学院矿建系, 泰安)

提 要

本文研究两向不等压作用下圆形巷道围岩的弹塑性问题。假设材料是理想弹塑性的, 在圆孔周围有一环状区域已进入塑性状态, 在库仑屈服条件下, 用摄动法给出弹塑性区域考虑二阶小量的应力分布及弹塑性交界线的解析表达式。与以往近似法的结果不同, 本文的研究结果表明, 巷道围岩的弹塑性交界线形状类似于椭圆, 随着内摩擦角的增加更接近于圆形。

一、前 言

现有的弹塑性理论对于两向不等压作用下圆形巷道围岩在库仑屈服条件下的弹塑性问题, 至今未能给出完整的解答。以往的研究提出的一些近似算法或估算法^[1~4], 都是以圆孔外围岩完全处于弹性状态时的应力解(Kirsch解)为基础的。弹塑性交界线的近似算法^[1]把Kirsch解作为弹塑性问题中弹性区的应力解, 是缺乏理论根据的, 而且究竟会产生多大的误差尚不清楚。文献[2]注意到这种近似方法的明显不足, 并提出了一种修正方法。修正方法仍显现出弹性区的应力解具有Kirsch解的形式, 而且它的运算又是以文献[1]中近似法的结果为基础的。当文献[1]中近似法的结果失效时, 文献[2]中近似法的结果也将失效。文献[3]将Kirsch解中的圆孔半径代之以等压时的弹塑性交界线(圆)的半径, 将所得的应力分布作为弹性区的应力分布, 导致在等压时的弹塑性交界线处径向应力为零。显然, 这与实际不符。巷道在开挖前后, 周围岩石的弹性应力分布有很大的变化。在巷道周界附近区域进入塑性状态前后, 围岩的应力分布也将发生改变。在塑性区域出现后, 若不考虑塑性区对弹性区应力分布的影响, 其计算结果的有效性是无法保证的。

本文运用摄动法给出两向不等压作用下圆形巷道围岩弹塑性问题的二阶摄动解答。本文的研究结果表明, 弹塑性交界线形状类似于椭圆, 并随着内摩擦角增大更接近于圆形, 而不是如文献[1, 2]中近似法所指出的那样——交界线沿 45° 方向向外扩展。

关于摄动解的有效性, 本文也作了简要的讨论。

二、问 题 与 求 解

考虑圆形巷道在远离巷道周界处受两向不等压力作用(图1)。图中 ϵ 为任意小参数, 即

*作者现工作单位: 清华大学工程力学系。

到稿日期: 1989年7月10日。

$0 < \varepsilon \ll 1$ 。巷道较深, 按平面应变问题处理。采用极坐标系, 如图2所示。假设拉应力为正。由应力变换公式可知, 在远离巷道周界处的应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{r \rightarrow \infty} &= -q - \frac{1}{2}q\varepsilon(1 + \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta}|_{r \rightarrow \infty} &= \frac{1}{2}q\varepsilon \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

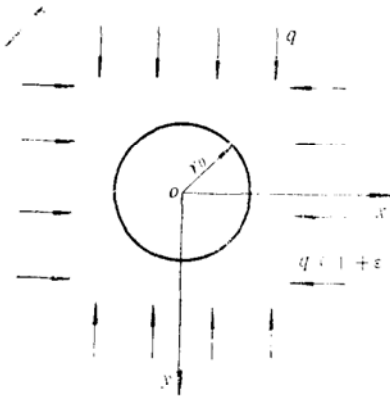


图1 巷道受力情况

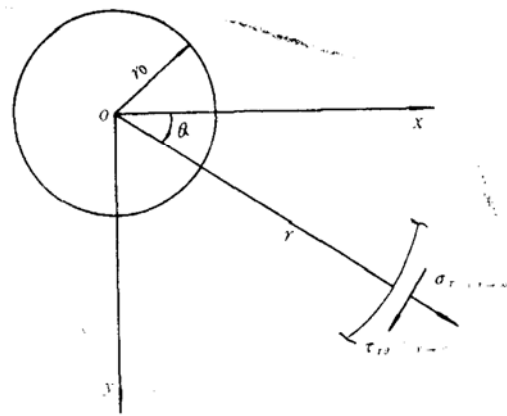


图2 采用的极坐标系

考虑在圆孔附近有一环状塑性区, 其应力分布可直接通过平衡微分方程、库仑屈服条件以及孔边应力边界条件求出。因此, 该问题可化为在塑性区应力分布已知的情况下确定弹性区的应力分布以及弹塑性交界线的问题。

(一) 塑性区的应力解答

平衡微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2)$$

库仑屈服条件为

$$[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2]^{1/2} + (\sigma_r + \sigma_\theta) \sin \phi = 2c \cos \phi \quad (3)$$

其中 c 为粘聚力, ϕ 为内摩擦角。

圆孔的应力边界条件为

$$\sigma_r|_{r=r_0} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{r=r_0} = 0 \quad (4)$$

显然式(4)与 θ 无关, 由于塑性区的应力解答只与内边界条件有关, 可见在塑性区内求解应力的问题属于轴对称问题。此时

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (5)$$

其余应力分量只是坐标 r 的函数。

由式(2)~(5)容易求得塑性区的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= -c \operatorname{ctg} \phi \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\mu - 1 \right] \\ \sigma_\theta^{(p)} &= -c \operatorname{ctg} \phi \left[(1 + \mu) \left(\frac{r}{r_0} \right)^\mu - 1 \right] \\ \tau_{r\theta}^{(p)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $\mu = 2\sin\phi/(1-\sin\phi)$ (7)

为了区别于弹性区应力的表达方式, 在塑性区应力分量的上方加记号“(p)”。

(二) 弹性区应力及弹塑性交界线的摄动解

1. 弹性区问题的提法

用应力函数 $\varphi(r, \theta)$ 表示的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi &= 0 \\ \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

无穷远处应力边界条件见式(1)。

弹塑性交界线 Γ 处的应力连续条件为

$$\sigma_n|_{\Gamma} = \sigma_n^{(p)}|_{\Gamma}, \quad \tau_{nt}|_{\Gamma} = \tau_{nt}^{(p)}|_{\Gamma} \quad (9)$$

其中 n, t 分别表示弹塑性交界线 Γ 的法线和切线。由所考虑的理想弹塑性材料及式(9)可知

$$\sigma_t|_{\Gamma} = \sigma_t^{(p)}|_{\Gamma} \quad (10)$$

再由应力变换公式及式(9)、(10)可给出用坐标应力分量表示的弹塑性交界线 Γ 处的应力连续条件为

$$\sigma_r|_{\Gamma} = \sigma_r^{(p)}|_{\Gamma}, \quad \tau_{r\theta}|_{\Gamma} = \tau_{r\theta}^{(p)}|_{\Gamma} \quad (11)$$

另外, 为了确定弹塑性交界线 Γ , 我们还必须给出在 Γ 处 ($r = r_\Gamma$) 弹性应力分量也应满足库仑屈服条件的表达式, 即

$$[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2]^{1/2} + (\sigma_r + \sigma_\theta)\sin\phi = 2cc\cos\phi \quad (12)$$

用摄动法求解。设问题的解答形式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 + \varepsilon \sigma_r^1 + \varepsilon^2 \sigma_r^2 + \dots \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \varepsilon \sigma_\theta^1 + \varepsilon^2 \sigma_\theta^2 + \dots \\ \tau_{r\theta} &= \varepsilon \tau_{r\theta}^1 + \varepsilon^2 \tau_{r\theta}^2 + \dots \\ \varphi &= \varphi^0(r) + \varepsilon \varphi^1(r, \theta) + \varepsilon^2 \varphi^2(r, \theta) + \dots \\ r_\Gamma &= R[1 + \varepsilon R_1(\theta) + \varepsilon^2 R_2(\theta) + \dots] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)中最后一式为弹塑性交界线的摄动表达式。式中的 R 为 $\varepsilon = 0$ 时对应的弹塑性交界线(圆)半径, R_1, R_2 为待定函数(在求解过程中定出)。

将式(13)代入式(8)、(1)、(11)及(12), 对比 ε 各次幂的系数, 可将问题按式(13)各式右边各有关多项式舍取项数的具体情况分别表述如下。

(1) ε^0 阶问题

基本方程

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \overset{0}{\varphi} = 0, \quad \overset{0}{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{d \overset{0}{\varphi}}{dr}, \quad \overset{0}{\sigma}_\theta = \frac{d^2 \overset{0}{\varphi}}{dr^2} \quad (14)$$

定解条件

$$\left. \begin{aligned} \overset{0}{\sigma}_r|_{r \rightarrow \infty} &= -q \\ \overset{0}{\sigma}_r|_{r=R} &= \overset{(p)}{\sigma}_r|_{r=R} \\ [(\overset{0}{\sigma}_r - \overset{0}{\sigma}_\theta) + (\overset{0}{\sigma}_r + \overset{0}{\sigma}_\theta)\sin\phi]_{r=R} &= 2cc\cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(2) ε^1 阶问题

基本方程的形式与式(8)完全相同, 只是在各变量上方标出“1”。

定解条件

$$\overset{1}{\sigma}_r|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{1}{2}q(1 + \cos 2\theta), \quad \overset{1}{\tau}_{r\theta}|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}q\sin 2\theta \quad (16)$$

当 $r = R[1 + \varepsilon R_1(\theta)]$, 有

$$\left. \begin{aligned} \overset{0}{\sigma}_r + \varepsilon \overset{1}{\sigma}_r &= \overset{(p)}{\sigma}_r \\ \varepsilon \overset{1}{\tau}_{r\theta} &= \overset{(p)}{\tau}_{r\theta} = 0 \\ [(\overset{0}{\sigma}_r - \overset{0}{\sigma}_\theta) + (\overset{0}{\sigma}_r + \overset{0}{\sigma}_\theta)\sin\phi] + \varepsilon [(\overset{1}{\sigma}_r - \overset{1}{\sigma}_\theta) + (\overset{1}{\sigma}_r + \overset{1}{\sigma}_\theta)\sin\phi] &= 2cc\cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在上式中保留 ε^0 次项, 是由于弹塑性交界线的 ε^1 阶修正使得这些项对 ε^1 次项有影响。

(3) ε^2 阶问题

基本方程的形式与式(8)相同, 只是各变量上方标出“2”。

定解条件

$$\overset{2}{\sigma}_r|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \overset{2}{\tau}_{r\theta}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (18)$$

当 $r = R[1 + \varepsilon R_1(\theta) + \varepsilon^2 R_2(\theta)]$, 有

$$\left. \begin{aligned}
 {}^0\sigma_r + \varepsilon {}^1\sigma_r + \varepsilon^2 {}^2\sigma_r &= {}^{(p)}\sigma_r \\
 \varepsilon {}^1\tau_{r\theta} + \varepsilon^2 {}^2\tau_{r\theta} &= {}^{(p)}\tau_{r\theta} = 0 \\
 \left[({}^0\sigma_r - {}^0\sigma_\theta) + ({}^0\sigma_r + {}^0\sigma_\theta)\sin\phi \right] + \varepsilon \left[({}^1\sigma_r - {}^1\sigma_\theta) + ({}^1\sigma_r + {}^1\sigma_\theta)\sin\phi \right] \\
 + \varepsilon^2 \left[({}^2\sigma_r - {}^2\sigma_\theta) + ({}^2\sigma_r + {}^2\sigma_\theta)\sin\phi + 2{}^1\tau_{r\theta}/({}^0\sigma_r - {}^0\sigma_\theta) \right] &= 2cc\cos\phi
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(4) ε^3 阶问题

ε^3 阶等情况的问题, 亦可仿照上述程序提出。

2. 问题的解答

(1) 求解 ε^0 阶问题

$\varepsilon=0$ 对应等压轴对称问题, 容易求得其应力解答为

$$\left. \begin{aligned}
 {}^0\sigma_r &= -q \left(1 - \frac{AR^2}{r^2} \right) \\
 {}^0\sigma_\theta &= -q \left(1 + \frac{AR^2}{r^2} \right) \\
 R &= r_0 \left[\left(1 + \frac{q}{c} \operatorname{tg}\phi \right) (1 - \sin\phi) \right]^{1/\mu}
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\text{式中 } A = \sin\phi + \frac{c}{q} \cos\phi \quad (21)$$

μ 的表达由式(7)描述。

(2) ε^1 阶问题的解答

将式(17)等号两边在 $r=R$ 处展成泰勒级数, 令 ε^1 次项的系数相等, 则

$$\left. \begin{aligned}
 {}^1\sigma_r|_{r=R} &= R \cdot R_1(\theta) \frac{d}{dr} ({}^{(p)}\sigma_r - {}^0\sigma_r)|_{r=R} \\
 {}^1\tau_{r\theta}|_{r=R} &= 0 \\
 R \cdot R_1(\theta) &= - \left\{ \left[({}^1\sigma_r - {}^1\sigma_\theta) + ({}^1\sigma_r + {}^1\sigma_\theta)\sin\phi \right] / \frac{d}{dr} \right. \\
 &\quad \left. \left[({}^0\sigma_r - {}^0\sigma_\theta) + ({}^0\sigma_r + {}^0\sigma_\theta)\sin\phi \right] \right\}_{r=R}
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将已求得的解答代入上式并化简, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 {}^1\sigma_r|_{r=R} &= 0 \\
 {}^1\tau_{r\theta}|_{r=R} &= 0 \\
 R_1(\theta) &= \frac{1}{4qA} \left[({}^1\sigma_r - {}^1\sigma_\theta) + ({}^1\sigma_r + {}^1\sigma_\theta)\sin\phi \right]_{r=R}
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

观察式(16)及式(23)的前两式, 可设 $\varphi^1 = f_1(r) + f_2(r)\cos 2\theta$, 代入式(8)的第一式, 得到求解 $f_1(r)$ 及 $f_2(r)$ 的两个常微分方程, 解方程求得 f_1 及 f_2 后得到 φ^1 , 再代入式(8)的后三式并由边界条件式(16)及式(23)的前两式, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 &= -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{q}{2} \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta^1 &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{q}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}^1 &= \frac{q}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

再将上式代入式(23)的末一式可求得

$$R_1(\theta) = \beta_0(1 - 2\cos 2\theta) \quad (25)$$

$$\text{其中 } \beta_0 = \frac{q}{4}(1 - \sin\phi)/(q\sin\phi + c\cos\phi) \quad (26)$$

(3) ε^2 阶问题的解答

分别将式(19)两边在 $r=R$ 处展成泰勒级数, 令 ε^2 次项的系数相等, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^2|_{r=R} &= \left\{ RR_2 \frac{d}{dr} \left(\sigma_r^{(p)} - \sigma_r^0 \right) + \frac{1}{2} R^2 R_1^2 \frac{d^2}{dr^2} \left(\sigma_r^{(p)} - \sigma_r^0 \right) \right. \\ &\quad \left. - RR_1 \frac{\partial \sigma_r^1}{\partial r} \right\}_{r=R} \\ \tau_{r\theta}^2|_{r=R} &= -RR_1 \frac{\partial \tau_{r\theta}^1}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ \left[(\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2) + (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) \sin\phi \right]_{r=R} &= - \left\{ RR_2 \frac{d}{dr} \left[(\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0) \sin\phi \right] + \frac{1}{2} R^2 R_1^2 \frac{d^2}{dr^2} \left[(\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) + (\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0) \sin\phi \right] \right. \\ &\quad \left. + RR_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[(\sigma_r^1 - \sigma_\theta^1) + (\sigma_r^1 + \sigma_\theta^1) \sin\phi \right] + 2\tau_{r\theta}^1 / (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) \right\}_{r=R} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

将已求得的解答代入上式并化简, 则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^2|_{r=R} &= \beta_0 q \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \cos 4\theta \right) \\ \tau_{r\theta}^2|_{r=R} &= -4q\beta_0(\sin 2\theta - \sin 4\theta) \\ R_2(\theta) &= -\frac{1}{4qA} \left[(\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2) + (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) \sin\phi \right]_{r=R} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$-\frac{\beta_0^2}{2(1-\sin\phi)} \left[(11+\sin\phi) - 4(3+\sin\phi)\cos 2\theta + 2(5-\sin\phi)\cos 4\theta \right]$$

观察式(18)及式(28)的前两式, 可设应力函数 φ^2 的形式为

$$\varphi^2 = g_1(r) + g_2(r)\cos 2\theta + g_3(r)\cos 4\theta$$

将其先代入式(8)中第一式可求出 g_1, g_2, g_3 , 然后代入第二至第四式并利用边界条件式(18)及式(28)前两式, 求出 ε^2 阶的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^2 &= \frac{3}{2} \beta_0 q \frac{R^2}{r^2} - 2\beta_0 q \cos 2\theta \left(-\frac{2R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) - \beta_0 q \\ &\quad \times \left(\frac{9R^4}{r^4} - \frac{10R^6}{r^6} \right) \cos 4\theta \\ \sigma_\theta^2 &= -\frac{3}{2} \beta_0 q \frac{R^2}{r^2} + 6\beta_0 q \frac{R^4}{r^4} \cos 2\theta + \beta_0 q \left(3 \frac{R^4}{r^4} - 10 \frac{R^6}{r^6} \right) \cos 4\theta \\ \tau_{r\theta}^2 &= 2\beta_0 q \left(\frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta - 2\beta_0 q \left(3 \frac{R^4}{r^4} - 5 \frac{R^6}{r^6} \right) \sin 4\theta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

再将上式代入式(28)第三式得

$$R_2(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{\beta_0^2}{(1-\sin\phi)} \left[(5+\sin\phi) + 4(1-3\sin\phi)\cos 2\theta - 2(3-5\sin\phi)\cos 4\theta \right] \quad (30)$$

至此, 已经得到圆形巷道在远离巷道周界受两向不等压作用时, 弹塑性问题包括应力及弹塑性交界线的二阶摄动解答。

ε^0 阶的弹塑性交界线 Γ^0 为

$$r_I = R$$

考虑 ε^1 阶小量修正的弹塑性交界线 Γ^1 为

$$r_I = R[1 + \varepsilon R_1(\theta)] \quad (32)$$

考虑到 ε^2 阶小量修正的弹塑性交界线 Γ^2 为

$$r_I = R[1 + \varepsilon R_1(\theta) + \varepsilon^2 R_2(\theta)] \quad (33)$$

式中 $R, R_1(\theta)$ 及 $R_2(\theta)$ 分别由式(20)第三式、式(25)及式(30)确定。

算例1 由两种计算方案计算出弹塑性交界线。由于弹塑性交界线关于 x, y 轴对称, 只取四分之一区域进行计算。一些特殊点的位置坐标如表1所示; 绘出两种方案的弹塑性交界线图形如图3所示。

表1 弹塑性交界线位置(r_f)数据表

计算条件	交界线 Γ	$\theta(^{\circ})$						
		0	-15	-30	-45	-60	-75	-90
方案1: $\phi = 30^{\circ}$ $c = 2.45\text{MPa}$ $q = 13.1\text{MPa}$ $\varepsilon = 0.125$ $r_0 = 1\text{m}$	Γ^0	1.4281	1.4281	1.4281	1.4281	1.4281	1.4281	1.4281
	Γ^1	1.3944	1.4034	1.4281	1.4618	1.4955	1.5201	1.5292
	Γ^2	1.3924	1.4008	1.4241	1.4566	1.4899	1.5148	1.5240
方案2: $\phi = 30^{\circ}$ $c = 2.45\text{MPa}$ $q = 24.5\text{MPa}$ $\varepsilon = 0.2$ $r_0 = 1\text{m}$	Γ^0	1.8403	1.8403	1.8403	1.8403	1.8403	1.8403	1.8403
	Γ^1	1.7619	1.7829	1.8403	1.9187	1.9972	2.0546	2.0756
	Γ^2	1.7535	1.7720	1.8236	1.8970	1.9738	2.0321	2.0539

注:表中 ϕ , c 取值与文献[1]算例的取值相同, r_f 以m计。

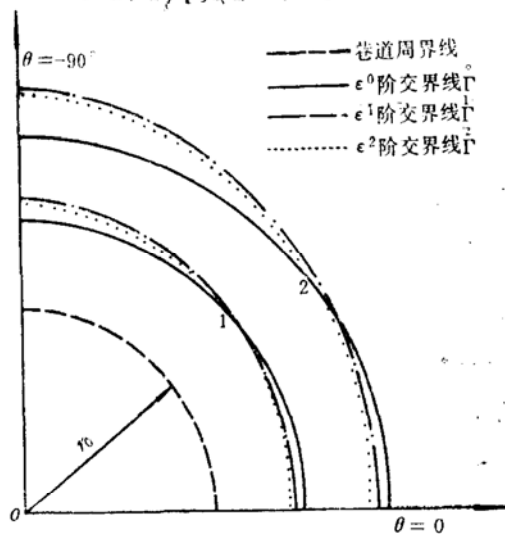


图3 摄动解的弹塑性交界线

[算例2] 对于两向不等压作用下含圆孔无限大平面,在Tresca屈服条件及Mises屈服条件下弹塑性交界线为一椭圆^[5](此时两个屈服条件具有完全相同的形式)。Tresca屈服条件没有考虑应力第一不变量对屈服的影响。而库仑屈服条件则考虑了这一效应,从本文的结果可看出,库仑屈服条件下弹塑性交界线也类似于椭圆。下面以文献[5]中给出的三组 q/σ_c 值为例($q = \sigma_x^{\infty}$, $\varepsilon = (\sigma_y^{\infty}/\sigma_x^{\infty}) - 1$),讨论上述两个屈服条件下弹塑性交界线形状的差异(q/σ_c 在库仑屈服条件时对应 $q/2c$)。对比两种情况下椭圆的长短轴比值 $a = a/b$,见表2。

通过上述两个屈服条件下的计算数据比较可知,由于库仑屈服条件考虑了第一应力不变量对屈服的影响,使得弹塑性交界线的形状为接近于圆形的椭圆。岩石的内摩擦角愈大,其

弹塑性交界线与圆愈接近。

表2 两种准则下椭圆形弹塑性交界线长轴比 ($\alpha = \frac{a}{b}$) 对照表

屈服准则	计 算 取 值			
	ϕ (°)	$\frac{q}{2c} = 1.4$ $\varepsilon = 0.0714$	$\frac{q}{2c} = 1.3$ $\varepsilon = 0.1538$	$\frac{q}{2c} = 1.2$ $\varepsilon = 0.2500$
Tresca	0	1.2223	1.5000	1.8571
库 仑	15	1.0898	1.1898	1.3115
	20	1.0707	1.1502	1.2404
	25	1.0559	1.1181	1.1879
	30	1.0443	1.0933	1.1478
	35	1.0357	1.0737	1.1164
	40	1.0277	1.0580	1.0868
	45	1.0216	1.0452	—
	50	1.0166	—	—

三、结 语

本文在库仑屈服条件下, 用摄动法处理了两向不等压作用下圆形巷道的弹塑性问题。通过本文方法的结果与以往近似法的结果比较, 大体有以下结论:

1. 本文是以弹塑性问题的基本方程、边界条件及弹塑性交界处的应力连续条件为基本出发点的, 采用摄动法逐阶给出摄动解答。这样则可将误差限制到一个极小量级之内。而以往的近似法则是凭借弹性解的结论, 预先假设弹塑性问题弹性区的应力分布符合Kirsch解的形式, 弹塑性交界线的计算也是在此基础上进行的, 这样做究竟会引起多大的误差是不清楚的。

2. 由摄动理论^[6]可知, 摄动解答为一渐近展开式, 往往只需取其前面几项(一般取到 ε^2 阶项, 其绝对误差与 ε^3 阶项同量级)就能得到令人相当满意的结果。因为摄动渐近展开式的系数值一般随着项数的增加而递减得相当快, 所以即使渐近级数不收敛, 取摄动解的前几项也是有效的。在 $0 < \varepsilon < 1$ 的情况下, 渐近级数是收敛的, 摄动解答的有效性尤其突出。有时甚至在 $\varepsilon > 1$ 的情况下摄动解法也是有效的^[7]。笔者^[8]给出在Tresca屈服条件下, 用摄动法处理圆洞受两向不等压作用的弹塑性问题, 所得二阶摄动结果与精确解^[6]相比误差极小。当摄动参数高达0.5348时, 二阶摄动解的误差也不超过2%。

3. 本文的结果指出, 两向不等压作用下圆形巷道围岩弹塑性问题弹性区的应力分布不符合Kirsch解的形式, 以往的近似法误差是很大的。

笔者在此对我院陈子荫教授的支持和帮助表示衷心感谢!

参考文献

- [1] H. 卡斯特奈, 隧道与坑道静力学, 上海科学技术出版社, 1980, p.120.
- [2] 于学馥等, 地下工程围岩稳定分析, 第八章, 煤炭工业出版社, 1983.
- [3] 严克强, 不对称荷载作用下圆洞围岩塑性区的估算方法, 岩土工程学报, Vol. 4, No. 2, 1982, p.54.
- [4] 郑颖人, 圆形洞室围岩塑性区应力和边界线的近似计算, 地下工程, No.3, 1980, pp.1-7.
- [5] Галин, Л. А., Плоская упруго-пластическая задача, Прикладная математика и механика, том X, 1946, p.63.
- [6] Nayfeh, A.H., Perturbation Methods, Wiley, New York, 1973.
- [7] Chien, W. Z., Chinese J. Physics, Vol.7, No.2 1947, p.102.
- [8] 魏悦广, Tresca准则下圆洞受两向不等压作用的摄动解, 应用数学和力学, 待发表。

Perturbation Solutions for Elasto-plastic Analysis of Circular Tunnel under Unequal Compression in Two Directions

Wei Yueguang

(Shandong Institute of Mining and Technology)

Abstract

In this paper, we have discussed the elasto-plastic problems of the circular tunnel under unequal compression in two directions. It is assumed that the materials may be idealized as elasto-perfectly plastic and the media in the neighborhood of the hole have been already in the plastic state. Using the Coulomb Yielding Criterion and considering the second order infinitesimal, the stress distribution and elasto-plastic interface are given. Unlike the results given by previous approximate methods, the research results in this paper indicate that the elasto-plastic interface is similar to ellipse and becomes circular when the angle of internal friction increases.