

应力历史对砂土应力应变关系的影响

陆士强 邱金营

(武汉水利电力学院)

提 要

本文从应力历史和应力路径的观点出发,在大量的砂土排水试验的基础上,建立了一种描述砂土应力应变和体积变化的方法。根据一种应力应变双曲线关系的改进形式,对等围压条件下轴向压缩和轴向拉伸两类试验的应力应变双曲线关系随固结路径的变化规律进行了讨论。所建立的侧向应变与轴向应变间的关系能够对三轴试验中的体积变化进行符合试验情况的描述。

一、前 言

在许多土工问题的分析中,土的应力应变关系的适当的采用是一个关键的因素。由于土的变形问题的复杂性,使得很难建立一个全面而又实用的本构模型。尽管弹塑性模型在描述土体变形上有不少的优点,仍然有必要去建立和改进较为简单的模型,如增量线性弹性模型^[1]。

一种自建立以来得到广泛应用的增量线性模型是熟知的Duncan-Chang模型^[2]。应力应变间的双曲线关系是在等向固结的常规三轴剪切试验中得出的。等向固结这一步骤,是作为把试样恢复到原有应力状态来理解的,而实际中土体在其生成中所承受的应力过程并不完全与此相同。在地基土的沉积和土石坝的兴建中,土体所经历的应力路径接近于一条等应力比路径^[1, 8]。随着地基上建筑物的建造和使用,或者土石坝的运行,应力的变化都会偏离原有的等应力比路径,并且不仅局限于加荷的压缩情形,也会出现卸荷情形。因而,我们将土体在生成过程中所经历的等应力比路径看作是一种初始固结路径,等压固结和 K_0 固结都是其中的一些特定情形。应力路径对土的应力应变关系的影响至少可以有以下两个方面的理解:

1. 不同的初始固结路径(或应力路径)和初始应力状态对某一应力路径上应力应变关系的影响。
2. 从固结历史和应力状态相同的某一初始应力点施加不同的应力路径时应力应变关系间的差异。

本文只限于对第一方面的试验研究结果进行分析和讨论。

Vaid曾用一种经过变换的双曲线关系来表示 K_0 固结条件下的应力应变关系,包括三轴轴向压缩和三轴轴向拉伸两种情形^[4],说明双曲线关系也可以表示其它固结条件下的应力应变关系,但未就不同固结路径下的变形规律进行深入讨论。本文在试验的基础上,全面地讨论了不同的初始固结路径和初始应力状态对常规三轴试验路径上应力应变关系的影响。

二、试验设备

文中所进行的试验均为砂土的常规三轴排水试验, 试验工作在真三轴仪上完成。试样直径50mm, 高125mm。应变的符号规定压缩时为正值, 伸长时为负值; 体变以体缩为正, 体胀为负。试验加荷方式为应力控制式。试验用砂为平潭标准砂, 颗粒均匀, 按相对密度 $D_r = 0.77$ 制备, 干密度 $\rho_d = 1.654 \text{g/cm}^3$ 。在计算体变时, 考虑了橡皮膜嵌入效应的影响, 并对围压增加和减小时嵌入体积的不同变化规律分别进行了计算。

三、固结历史对双曲线应力应变关系的影响

Vaid曾将熟知的双曲线关系改写成下面的形式^[4]

$$q_m = \frac{\varepsilon_a}{a + b\varepsilon_a} \quad (1)$$

q_m 为偏应力的改变量。考虑到轴向拉伸时大主应力轴的偏转, 这里偏应力 q 用轴向应力 σ_a 与侧向应力 σ_r 间的差值而不是大小主应力间的差值表示。初始应力状态被视作应变的零点, 式中的 ε_a 实际上也是相对于初始应力状态的增量值。

试验开始时按等应力比施加初始固结路径达到某一试验围压。用符号 CR 表示初始固结路径的 σ_a/σ_r 值, 分别进行了 $CR = 0.5, 1.0, 1.6, 2.33, 3.0$ 五种固结路径, 试验围压 σ_r 从100kPa至400kPa。达到试验围压值后再按常规应力路径加荷或卸荷, 即 σ_r 不变, 改变 σ_a 。

试验结果表明, 各种固结路径下的轴向压缩及轴向拉伸时的应力应变关系都可以用式(1)所表示的双曲线关系描述。图1(a)和图1(b)分别表示了固结路径 $CR = 1.6$ 时轴向压缩和轴向拉伸试验的结果, ε_a/q_m 与 ε_a 之间有良好的线性关系。计算参数 a 是与初始切线模量 E_t 相联系的

$$E_t = \frac{1}{a} \quad (2)$$

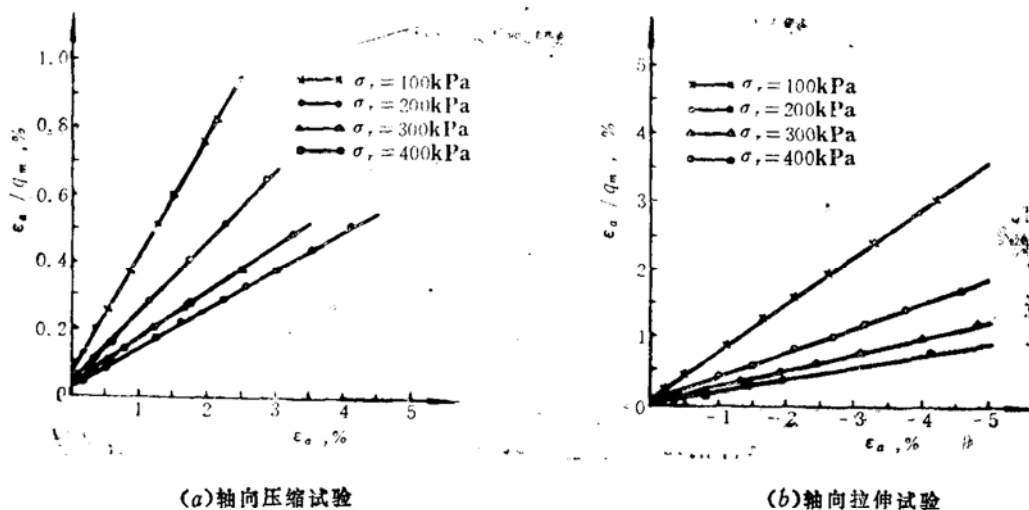


图1 经过纵轴变换的双曲线关系

在Duncan-Chang模型中, E_i 的变化是用Janbu得到的关系表示的

$$E_i = K p_a \left(\frac{\sigma_r}{p_a} \right)^n \quad (3)$$

这里用 σ_r 代替了小主应力 σ_3 。其它固结路径上的试验结果表明, E_i 与 σ_r 间的关系都可以用式(3)表示。图2(a)和图2(b)分别表示了不同固结路径下轴向压缩和轴向拉伸试验中 E_i 随 σ_r 的变化。计算参数 K 和 n 是随 CR 而变化的。也就是说, 将等压固结的计算参数用于不等压固结的应力历史的土体是不合适的。在轴向压缩试验中, 系数 K 随 CR 的增加而减小; 系数 n 随 CR 的增加而增加。 K, n 随 CR 变化的规律在试验路径范围内可以用线性关系表示, 如图3所表示的结果。在轴向拉伸试验中, 从初始的 $CR > 1$ 的应力点开始减小轴向力时, 砂土所表现出的是一种加载后的卸载性状, 其初始弹性模量相当于卸载模量 E_{ur} , 一般认为要比 E_i 高。这时, 系数 K_{ur} 随 CR 的增加而明显增大, 呈幂函数关系; 系数 n 随 CR 的增加而减小的关系仍可用线性关系表示。图4(a), 图4(b)分别表示了 K_{ur}, n 随 CR 的变化规律。

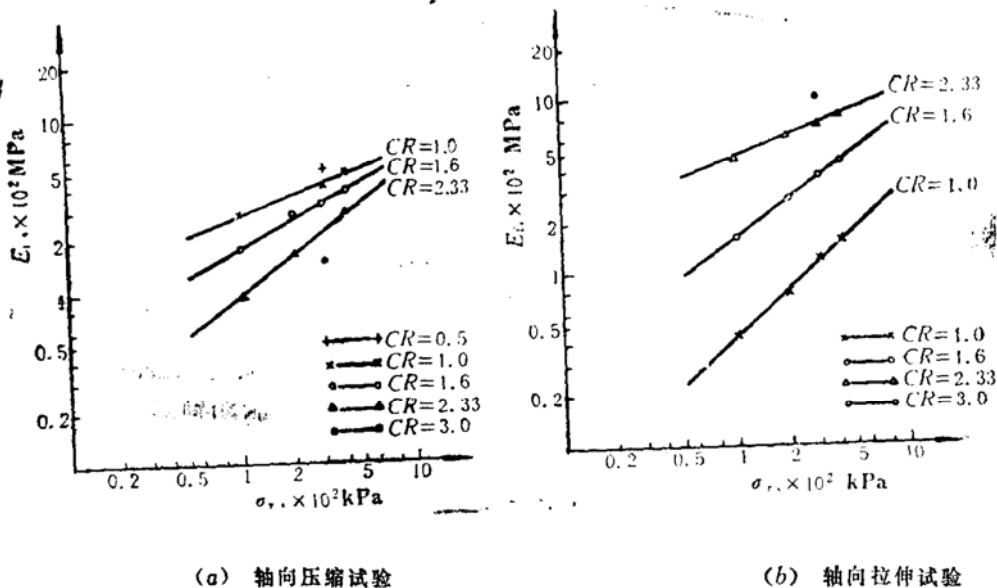


图2 初始弹性模量与围压的关系

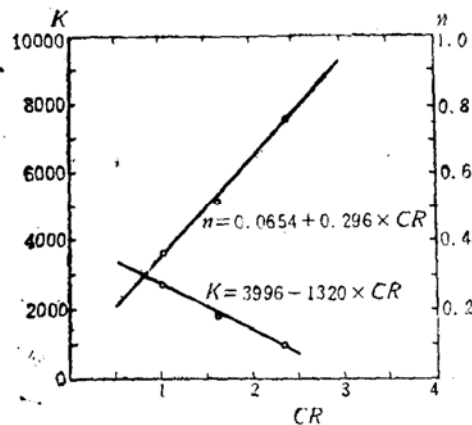


图3 轴向压缩试验中 K, n 与 CR 的关系

因此,可以建议:在等压固结路径以外,另做一个固结路径应力比略大于 $1/K_0$ 的试验,由这两个试验结果再按上述的变化规律整理,就可以得到相当大的固结路径范围内土体变形计算参数的变化规律,进而对不同固结路径下的受力变形性状进行合理的计算。

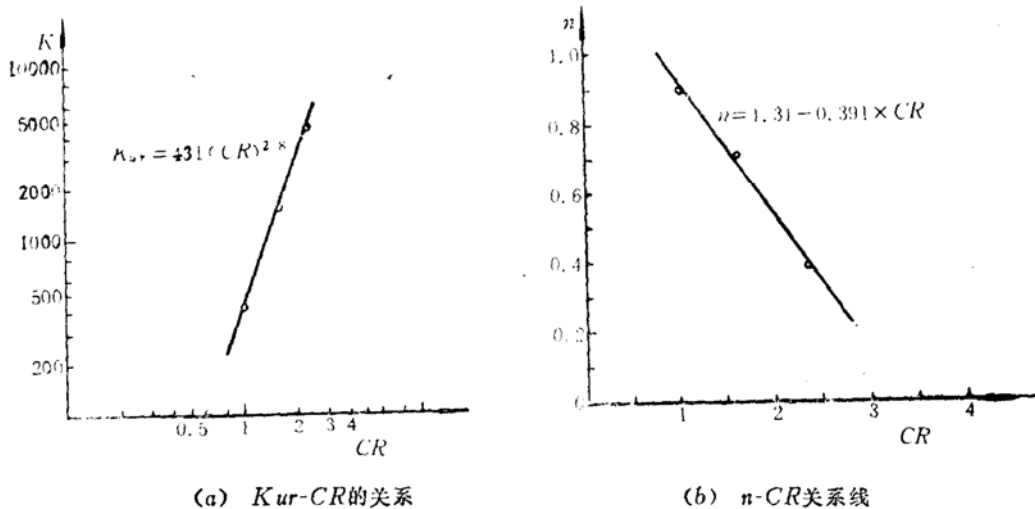


图4 轴向拉伸试验中 K_{0r} , n 与 CR 的关系

四、三轴试验中的侧向应变及体积变化

为了完整地得到土的应力应变关系,在建立起轴向应变的变化规律后,还需找出侧向应变的变化规律以便全面描述受力变形过程中的应力应变性状。

在描述砂土的体积变化时, Hahib和Luong所提出的“特征状态”(characteristic state)是一个重要概念^[6]。根据所进行的试验结果,分别得出了轴向压缩和轴向拉伸区的特征状态线。用 η_c 表示特征状态所对应的应力比,对轴向压缩和轴向拉伸, η_c 分别为2.90和0.35。

(一)轴向压缩时的体变规律

在Duncan-Chang模型中,曾借用Kulhawy的结论,认为 ϵ_a 与 ϵ_r 之间呈双曲线关系,但许多试验结果都没有证实这种结论。Daniel根据粘土的试验结果,用切线泊松比 ν_t 随应力水平 S 呈直线关系变化来计算,但并没有明确给出 ϵ_r - ϵ_a 间的关系^[6]。Duncan-Chang模型后来又采用体积模量 B 来描述体积变化。Byrne等人也曾对体变计算进行过改进^[7]。这里提出一种新的关系来表示侧向应变的变化。

不同的固结路径下砂土的轴向压缩试验结果表明, ϵ_r/ϵ_a 与 ϵ_a 之间有较好的双曲线关系

$$\frac{\epsilon_r}{\epsilon_a} = \frac{\epsilon_a}{f + g\epsilon_a} \quad (4)$$

式中 f, g 为试验参数,可以从 ϵ_a^2/ϵ_r - ϵ_a 之间的线性规律上选取。所建立的关系能够描述砂土压缩过程中体变的剪缩—剪胀特性。图5表示了对等压固结、 $\sigma_r = 300\text{kPa}$ 时 ϵ_a^2/ϵ_r - ϵ_a 之间直线关系的拟合结果,得到的计算参数 $f = -0.61, g = -1.38$ 。

切线泊松比

$$\nu_t = - \frac{2f\varepsilon_a + g\varepsilon_a^2}{(f + g\varepsilon_a)^2} \quad (5)$$

在达到破坏状态时, ε_a 值足够大

$$\nu_{tf} = - \frac{1}{g} \quad (6)$$

应变 ε_a 趋于零时, 得到初始泊松比 ν_i 为零, 表示在刚开始加荷时, 侧向应变的变化趋势为零, 轴向应变与体变近似相等。这是与一些三轴试验中得到的结论相一致的^[8]。

试验结果表明, 系数 g 对不同的固结路径和围压基本上为一常数。在试验密度下, $g = -1.45$, 如图6所示。系数 f 则是随固结路径和围压而变化的, 表现出不同试验条件下体积变化规律的不同。

体积变化 ε_v 表示为

$$\varepsilon_v = \frac{f\varepsilon_a + (2+g)\varepsilon_a^2}{(f + g\varepsilon_a)} \quad (7)$$

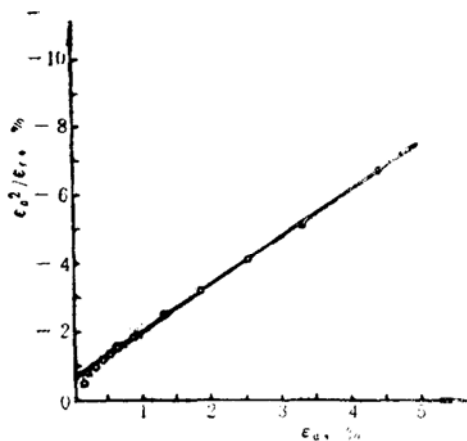


图5 轴向压缩试验中 $\varepsilon_a^2/\varepsilon_r$ 与 ε_a 间的线性关系

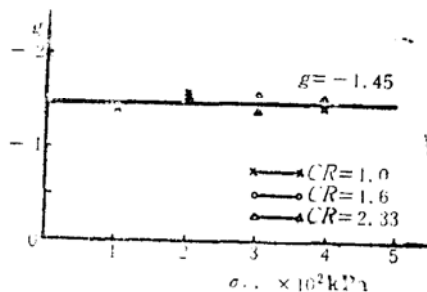


图6 试验参数 g 的变化

ε_v 对应于 ε_a 的变化率, 即 $d\varepsilon_v/d\varepsilon_a$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{f^2 + 2f(2+g)\varepsilon_a + g(2+g)\varepsilon_a^2}{(f + g\varepsilon_a)^2} \quad (8)$$

当应力状态达到特征状态时, $\dot{\varepsilon}_v = 0$, 此时的轴向应变用 ε_{ac} 表示, 则有

$$f = - \frac{g}{1 - \sqrt{\frac{2}{2+g}}} \varepsilon_{ac} \quad (9)$$

ε_{ac} 可以用应力应变双曲线关系求出

$$\varepsilon_{av} = \frac{A(\eta_c - CR)}{K(A + CR - \eta_c)} \left(\frac{\sigma_r}{p_a} \right)^{1-n} \quad (10)$$

式中 A 是极限应力值 q_{mult} 与 σ_r 的比值。对同一固结路径, A 可视为常数

$$A = \frac{(\eta_f - CR)}{R_f} \quad (11)$$

式中 η_f 为破坏时的应力比 $(\sigma_a/\sigma_r)_f$; R_f 为破坏比。

式(9)~(11)给出了系数 f 的计算公式, 可见 f 值随着围压以幂函数的规律而变化。结合应力应变双曲线关系参数 K , n 的变化规律, 可以对各种固结路径和围压下的体积变化进行推测。

体积变化与砂土的密度有密切的关系。根据 Hettler 等人^[8]对一种干砂的试验结果, 验证了不同密度下式(4)的适用性, 如图7(a)所示。结果表明, 随着密度的增高, 系数 f 和 g 的绝对值都减小; f, g 与密度(或相对密度)之间的关系都可以用线性关系表示, 如图7(b)所示。

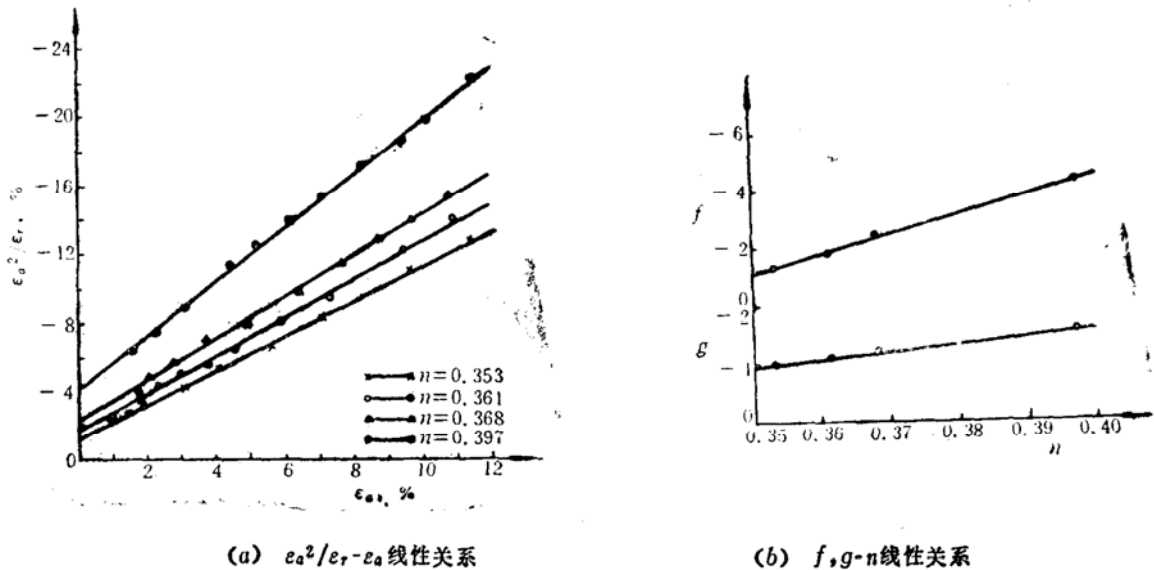


图7 不同试验密度下 $\varepsilon_a^2/\varepsilon_r - \varepsilon_a$ 与 ε_a 间的线性关系及试验参数 f, g 随密度的变化规律

(二) 轴向拉伸时的体变规律

轴向拉伸试验中典型的体积变化分成三个阶段:

1. 开始卸荷时的微小体积膨胀;
2. 持续的体积收缩;
3. 临近破坏时的体积膨胀。

轴向拉伸中 $\varepsilon_a^2/\varepsilon_r - \varepsilon_a$ 之间不能用直线关系表示, 而是向上弯曲的曲线。根据这种曲线特征, 在 $\varepsilon_a^2/\varepsilon_r - \varepsilon_a$ 的直线关系表达式中引入幂系数 m 来表示两者间的关系

$$\frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon_r} = f + g (\varepsilon_a^2)^{\frac{m}{2}} \quad (12)$$

式中 f, g, m 为试验参数, 幂系数 > 1 时可以表示出轴向拉伸时的侧向应变变化特征。上式右端的 ε_a 项实际上是 ε_a 绝对值的 m 次方, 这是为了避免 ε_a 为负值时无法进行指数为非自然数的乘方。

所建立的关系能够描述轴向拉伸时体积变化的三段特性。图 8 表示了对 $CR = 1.6$, $\sigma_r = 200 \text{ kPa}$ 时轴向拉伸试验中 $\varepsilon_r/\varepsilon_a - \varepsilon_a$ 间关系的拟合, 计算参数 $f = 0.0407$, $g = 1.568$, $m = 1.159$ 。

如何从一组试验数据 $\{|\varepsilon_{ai}|, \varepsilon_{ai}^2/\varepsilon_{ri}\}_{i=1, N}$ 中得出计算参数 f, g, m , 这里建议两种方法。为表示上的方便, 分别用 $\{x_i\}, \{y_i\}$ 代替 $\{|\varepsilon_{ai}|\}$ 和 $\{\varepsilon_{ai}^2/\varepsilon_{ri}\}$ 。

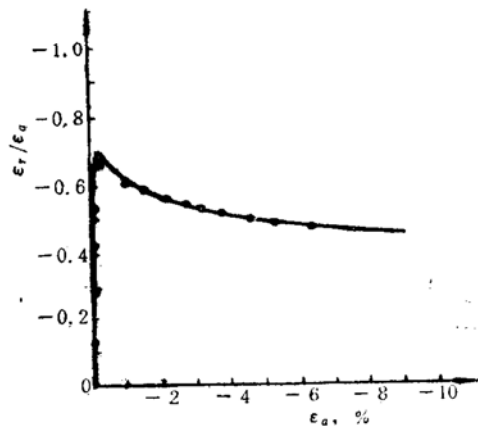


图 8 轴向拉伸试验中 $\varepsilon_r/\varepsilon_a$ 与 ε_a 间的关系

迭代法: 迭代法的三个基本公式如下

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N [\log x_i \log(y_i - f)] - N \cdot \overline{\log x} \overline{\log(y - f)}}{\sum_{i=1}^N [(\log x_i)^2] - N \cdot [\overline{\log x}]^2} \quad (13)$$

$$g = 10^{\overline{\log(y - f)} - m \cdot \overline{\log x}} \quad (14)$$

$$f = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N y_i - g \cdot \sum_{i=1}^N x_i^m \right] \quad (15)$$

式中 $\overline{\log x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i$; $\overline{\log(y - f)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(y_i - f)$ 。进行迭代时, 先给出初始值 f_0 ,

代入式(13), (14)计算出 m, g , 再回代到式(15)计算 f 值, 直至满足精度为止。迭代法计算量较大。

三点法: 选择三个有代表性的点来计算各参数。其计算公式为

$$m = \frac{\log \left\{ \frac{(y_3 - y_2)}{(y_2 - y_1)} \left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^m \right] + 1 \right\}}{\log \left(\frac{x_3}{x_2} \right)} \quad (16)$$

$$g = \frac{y_3 - y_2}{x_3^m - x_2^m} \quad \text{或} \quad g = \frac{y_2 - y_1}{x_2^m - x_1^m} \quad (17)$$

$$f = y_i - g x_i^m \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18)$$

在用式(16)计算 m 时, 需要进行简单的迭代计算。

试验结果表明, 系数 g 和 m 随固结路径和围压的变化很小, 可以认为是常值。在试验密度下, $g = 1.60, m = 1.15$, 如图9所示。系数 f 值是随固结路径和围压而变化的, 同一固结路径下 f 随 σ_r 的变化符合线性规律(如图10所示)

$$f = G + H \left(\frac{\sigma_r}{p_a} \right) \quad (19)$$

其中的两个试验参数 G, H 是随固结路径变化的, 并且, G, H 与 CR 之间在 $\log G$ (或 $\log H$)- CR 坐标上可以用直线关系表示

$$\log G = 2.072 + 0.203 \times CR$$

$$\log H = -2.544 + 0.355 \times CR$$

这样, 各种固结路径和围压下的侧向应变关系计算参数都可以由此计算出来。

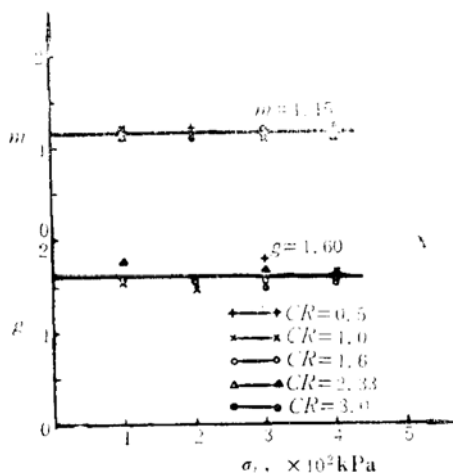


图9 试验参数 m, g 的变化规律

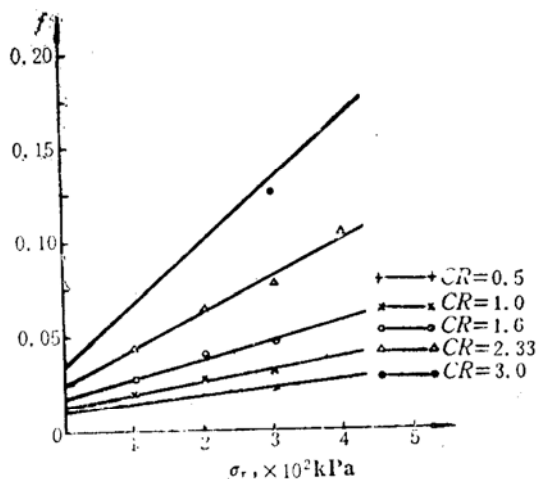


图10 试验参数 f 的变化规律

五、结 论

1. 应力应变双曲线关系是受固结历史影响的。

2. 对轴向压缩和轴向拉伸两类试验, 同一固结路径下初始切线模量与围压之间都满足幂函数关系。

3. 常规压缩试验中 $\varepsilon_r/\varepsilon_a$ 与 ε_a 之间呈双曲线关系; 所建立的公式可以描述压缩变形过程中的剪胀现象。

4. 轴向拉伸试验中的体积变化有体胀—体缩—体胀的三段变化特征。

参 考 文 献

- [1] Eisenstein, Z., Law, S.T.C., The Role of Constitutive Laws in Analysis of Embankments, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 1979, Vol.4, pp.1413--1432.
- [2] Duncan, J. M., Chang, C.Y., Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol.96, No. SM5, 1970, pp. 1629--1653.
- [3] 刘祖德, 陆士强, 杨天林, 李伯乔, 应力路径对填土应力应变关系的影响及其应用, 岩土工程学报, Vol.4, No.4, 1982, pp45--55.
- [4] Vaid, Y.P., Effect of Consolidation History and Stress Path on Hyperbolic Stress-Strain Relations, Can. Geot. Jr.Vol.22, No.2, 1985, pp.172--176.
- [5] Luong, M. P., Stress-Strain Aspects of Cohesionless Soils under Cyclic and Transient loading, Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, 1980, Vol.1, pp. 315--324.
- [6] Daniel, D.E., Olson, R.E., Stress-Strain Properties of Compacted Clays, J. Geot. Eng. Div., ASCE, Vol. 100, No. GT10, 1974, pp.1123--1136.
- [7] Byrne, P.M., Eldridge, T. L., A Three Parameter Dilatant Elastic Stress-Strain Model for Sand, Proc. Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, 1982, pp.73--80.
- [8] Hettler, A., Gudehus, G., Vardoulakis, I., Stress-Strain Behaviour of Sand in Triaxial Tests, Proc. Results of the International Workshop on Constitutive Relations for Soil, Grenoble, 1982, pp.55--66.

Effect of Stress History on Stress—Strain

Relation of Sand

Lu Shiqiang Chiu Jinying

(Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering)

Abstract

From the viewpoints of stress history and stress path, a method of describing the stress-strain-volume change behaviour of sand is established using a large quantity of drained triaxial tests of saturated sand. A modified form of hyperbolic relationship is used to describe the stress-strain behaviour of sand subjected to both compression and extension stress paths with different consolidation history. The change of hyperbolic parameters with consolidation history and stress path is discussed. It is shown that the observed volume change in tests can be predicted accurately with the proposed relationship between lateral and axial strain.