

一个土体的双屈服面应力-应变模型

殷宗泽

(河海大学农水系, 南京)

一、引言

土体弹塑性应力-应变关系的单屈服面“帽子”模型, 如修正剑桥模型^[1]、科斯拉和吴模型^[2]以及黄文熙模型^[3]等, 在用于一般加荷情况时, 能获得较满意的结果; 但对某些加荷情况, 可能会出现不合理。譬如, 受有一定荷载的三轴试样, 如果保持偏应力不变而降低围压, 单屈服面“帽子”模型将当作卸荷回弹, 因为应力变化落到屈服面以内。而事实上, 试验中会测出剪切变形, 当围压力降到一定程度试样甚至破坏, 剪切变形相当大。这种剪切变形不可能是弹性变形, 各向相等的压应力的变化不可能引起弹性剪应变。它只能是塑性变形。可见, 在“帽子”以内仍然存在着屈服, 这就须有第二种屈服面。

已经提出了许多双屈服面模型, 如拉德(Lade)模型^[4]、沃门(Vermeer)模型^[5]和笔者与邓肯(Duncan)提出的模型^[6]等, 都各有优缺点。其中笔者与邓肯提出的模型参数较多, 不易确定, 且模型不适用于平均正应力为常量, 仅增加偏应力等情况。本文在这些模型的基础上提出了一个新的模型, 具有椭圆和抛物线型两种屈服面, 可以较好地反映剪胀和剪缩, 反映各种加荷情况。

二、土体的不可恢复的变形

土体的塑性变形, 即不可恢复的变形, 是由于土颗粒之间产生了相互错动滑移。即使是塑性体积变形, 也与微观颗粒的相互错动相联系。只作用有各向相等的压力 p , 似乎不引起滑动, 然而从微观上看, 颗粒之间是要滑动的。图1(a)为受力前颗粒的排列, 图1(b)为 p 作用后的排列。可见, 一部分颗粒在挤压力作用下滑入原来的孔隙内, 颗粒之间是存在相对错动的。

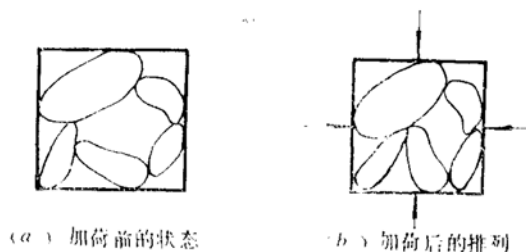


图 1 压缩过程中颗粒排列的变化

如果受到剪应力，颗粒间的滑移就更明显。从宏观上看，滑移沿着剪应力作用方向发生；而在微观上，由于土粒形状不规则，排列不规则，错动方向却是杂乱的。图2中，剪力水平向作用，但颗粒A向上滑动，而颗粒B向下倾倒。对A颗粒来讲，有使土体膨胀的趋势；对B颗粒来讲，有使土体收缩的趋势。不难设想，整个土体中，引起膨胀和引起压缩的两种滑移同时存在。如果引起压缩者占优势，则表现为宏观的压缩变形，反之表现为膨胀。

这样，可以合理地假定，土体的塑性变形 $d\epsilon^p$ 由两部分组成。一种是与土体的压缩相联系，主要表现那些滑移后引起体积压缩的颗粒的位移特性；另一种与土体的膨胀相联系，体现滑移后引起体积膨胀的颗粒的位移特性。用 $d\epsilon_1^p$ 和 $d\epsilon_2^p$ 分别表示这两部分应变，则总塑性应变为

$$\{d\epsilon^p\} = \{d\epsilon_1^p\} + \{d\epsilon_2^p\}$$

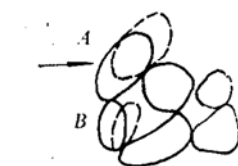


图2 颗粒间的滑移

(1)

自然，应该用不同形式的屈服面和不同的硬化规律来反映这两种不同的塑性应变。

三、屈服准则和硬化规律

(一)与压缩相联系的屈服

修正剑桥模型为与体积压缩有关的塑性变形提供了很好的屈服准则。邓肯等人又稍作修改使其可用于有凝聚力强度的击实土^[7]。但修正剑桥模型的椭圆屈服轨迹的形状，即椭圆长短轴之比，仅仅决定于土的强度指标 M ，(M 为破坏线 q_f-p 的斜率)，而不能随土的变形特性变化。对于不少土体，不能很好地与实际相符。本文对第一种塑性变形，(与压缩相联系)，基本上采用了邓肯等人修改过的修正剑桥模型，又作了某些改进。屈服准则表示为

$$p + \frac{q^2}{M_1^2(p + p_r)} = p_0 = F(\epsilon_v^p) \quad (2)$$

式中

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (3)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (4)$$

p_r 为破坏线 q_f-p 在 p 轴上的截距； M_1 是稍大于 M 的参数， M_1 与应力应变曲线的形状有关。用 M_1 来代替修正剑桥模型中的 M ，是为了反映椭圆形态的变化。屈服轨迹的形状及有关参数的意义，均示于图3。

式(2)中 p_0 为屈服轨迹与 p 轴交点的横坐标。修正剑桥模型在建立 p_0 与塑性体积应变关系时，使用了 $e-\ln p$ 关系。这一关系在 p 较小时并非直线，特别是击实土，它总是一条外凸的曲线，如图4所示。直线的 $e-\ln p$ 关系还会在 p 接近0时产生数学处理上的麻烦。因此这里作了改进。在分析了若干三轴各向等压试验的应力与体积应变关系后发现，在许多情况下， p_0 与 ϵ_v 的关系可以用双曲线来表示。魏汝龙也曾提出对压缩试验用双曲线来拟合压缩应变与

荷载的关系^[8]。图5(a)为三轴等压试验的 $\frac{p_0}{p_a} - \epsilon_v$ 关系曲线。这里引入大气压力 p_a 是为了使

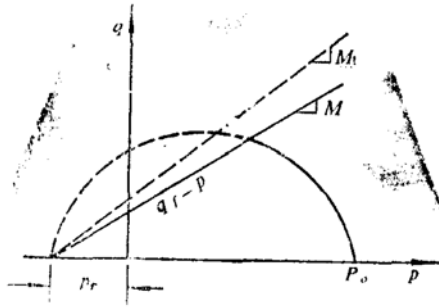
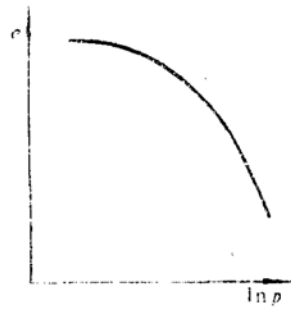


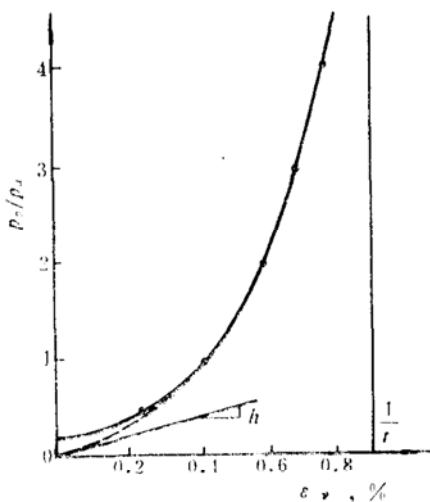
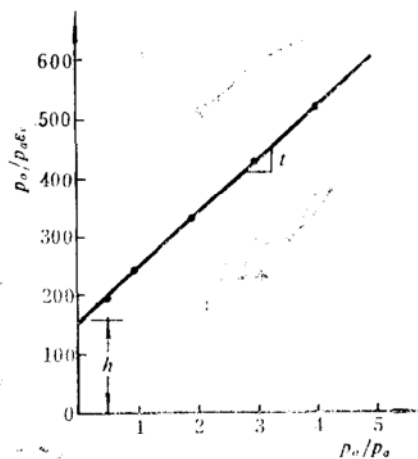
图3 第一种屈服轨迹

图4 $e-\ln p$ 曲线

后面的参数无因次。把试验关系转换到图5(b)中的 $\frac{p_o}{p_a \epsilon_v} - \frac{p_o}{p_a}$ 坐标系里, 则近似地为一一直线。其截距为 h , 斜率为 t 。直线方程为

$$\frac{p_o}{p_a \epsilon_v} = h + t \frac{p_o}{p_a} \quad (5)$$

它反映了 p_o 和 ϵ_v 之间的双曲线关系。 h 为双曲线的初始切线斜率, $\frac{1}{t}$ 为 ϵ_v 的渐近值, 如图5(a)中所示。

(a) $\frac{p_o}{p_a} - \epsilon_v$ 试验关系曲线 (参考文献 [2])(b) $\frac{p_o}{p_a \epsilon_v} - \frac{p_o}{p_a}$ 关系曲线图5 p_o 与 ϵ_v 之间的关系

由于弹性体积应变很小, 可以假定塑性体积应变 ϵ_v^p 与 p_o 呈双曲线关系。于是

$$p_o = \frac{h \epsilon_v^p}{1 - t \epsilon_v^p} p_a \quad (6)$$

这就是硬化规律。将其代入式(2)得

$$p + \frac{q^2}{M_1^2 (p + p_r)} = \frac{h \epsilon_v^p}{1 - t \epsilon_v^p} p_a \quad (7)$$

(二) 与膨胀相联系的屈服

体积膨胀有两种, 一是弹性变形, 由平均压应力的减小引起; 一是塑性变形, 由剪切引

起。如果不考虑拉应力的存在，塑性膨胀仅仅与剪应力和剪应变相联系。可以合理地取塑性偏应变 ε_s^p 作为第二屈服准则的硬化参数。

$$\varepsilon_s^p = \int d\varepsilon_s^p = \int \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p)^2 + (d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p)^2} \quad (8)$$

根据对一些土的三轴试验结果的分析，提出第二屈服准则为

$$\frac{a}{G} \frac{q}{\sqrt{M_2(p + p_r) - q}} = \varepsilon_s^p \quad (9)$$

式中 G 是弹性剪切模量； M_2 是比 M 略大的参数； a 是主要反映剪胀还是剪缩的一个参数。式(9)表示在 p - q 平面内的抛物线，如图6中 f_2 所示。

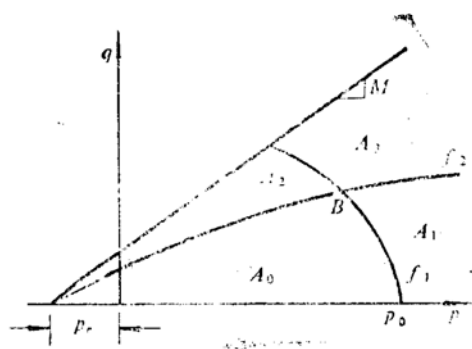


图6 两种屈服轨迹

此外，假定相关联的流动规则对于这两种屈服面都适用。

在图6中， B 点表示当前应力状态，屈服面 f_1 和 f_2 把 p - q 平面分成四个区域： A_0 是弹性区； A_1 是塑性区仅与第一种屈服有关； A_2 区只与第二种屈服有关；只在 A_3 区中两种塑性变形同时存在。如果 q 保持不变而降低 p ，则应力状态落入 A_2 区，根据所提模型，将存在塑性剪应变和膨胀应变；若增加 p ，则落入 A_1 区，体积应变是压缩的。另一方面，若 p 保持不变而增加 q ，或同时增加 p 和 q ，则应力状态处于 A_3 内。当应力水平较低时， f_2 线较平坦，根据相关联的流动规则，塑性体积应变分量就较小，也就是与 f_2 相联系的膨胀应变较小；而此时 f_1 较陡，由 f_1 所对应的压缩应变较大，因此叠加结果一般表现为压缩应变。当应力水平较高时，两种屈服面所对应的体积应变在数值上相当。哪一个占主导地位，将决定于参数，尤其是 a 。若 a 较高， f_2 所对应的体积应变占优势，则总的塑性体积应变为膨胀，否则为压缩。模型反映的这些规律与试验结果是一致的。

四、参数的确定

模型中所用到的参数，可由常规三轴试验确定。

(一)弹性常数 ν 和 G

对于所有的土，泊松比都取为0.3。由于弹性变形所占比重较小，取 ν 为常量对总的变形不会引起多大误差。

弹性剪切模量 G 可由弹性模量 E 和泊松比 ν 求得。而弹性模量 E ，根据邓肯等人研究约为 $(1.2-3.0)E_i$ 。 E_i 为初始切线模量，可由下式确定^[9]：

$$E_i = K p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (10)$$

近似地取弹性模量 $E = 2.0E_i$ ，则剪切模量为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{1}{1.3} K p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (11)$$

参数 K 和 n 的意义与确定方法同邓肯双曲线模型。令

$$K_G = \frac{K}{1.3} \quad (12)$$

上式成为
$$G = K_G p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (13)$$

G 随 p 而变，两个参数 K_G 和 n 用于确定 G 。

也可点绘 q - ε_s 关系，直接确定 K_G 和 n 。 q - ε_s 曲线的初始切线斜率为 $3G_i$ ，取 $G = 2G_i$ 。

在双对数纸上点绘 $\frac{G}{p_a}$ 和 $\frac{p}{p_a}$ 关系，得一直线。其截距为 K_G ，斜率为 n 。

(二) 参数 p_r , M_1 和 M_2

p_r 和 M 分别为破坏线 q_f - p 的截距和斜率。对三轴压缩试验，可由强度指标 c 和 φ 推得，

$$p_r = c \cot \varphi \quad (14)$$

$$M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (15)$$

它们也可由图3中 q_f - p 线直接求得。

M_1 根据对几组不同类型的土体试验结果的分析，大体变化于 $(1.0-1.5)M$ 。一般土为 $(1.02-1.2)M$ ，高压缩性土则大于 $1.2M$ 。下面的经验公式可用于估计 M_1

$$M_1 = (1 + 0.25\beta^2)M \quad (16)$$

式中 β 为 ε_{v75} 与 ε_{a75} 之比的平均值，而 ε_{v75} 和 ε_{a75} 分别为应力水平 $s = 75\%$ 时，三轴排水试验所得的体积应变和轴向应变。各条试验曲线所得 β 值须加以平均。

M_2 与 q - ε_s 曲线的形状有关，变化在 $(1.03-1.15)M$ 。可用下式近似估计：

$$M_2 = M / R_f^{0.25} \quad (17)$$

R_f 就是邓肯模型中的破坏比。 $R_f = q_f / q_{ult}$ 。 q_{ult} 是 q - ε_s 双曲线的 q 的渐近值。

(三) 参数 h 和 t

若有各向等压的压缩和回弹试验结果，则图5所示方法可用于确定 h 和 t 。若没有上述结

果，可用下法近似确定。由式(5)，

$$\varepsilon_v^p = \frac{p_0}{h p_a + t p_0} \quad (18)$$

两边微分，

$$d\varepsilon_v^p = \frac{h p_a d p_0}{(h p_a + t p_0)^2} \quad (19)$$

令

$$B_p = \frac{d p_0}{d \varepsilon_v^p} \quad (20)$$

则

$$B_p = \frac{p_a}{h} \left(h + t \frac{p_0}{p_a} \right)^2 \quad (21)$$

或

$$\sqrt{\frac{B_p}{p_a}} = \sqrt{h} + \frac{t}{\sqrt{h}} \cdot \frac{p_0}{p_a} \quad (22)$$

在应力水平为50%时，由 f_2 所引起的膨胀应变很小，近似地认为与弹性压缩应变相抵，则测得的体积应变 ε_{v50} 可看作与 f_1 相联系的塑性体积应变 $\Delta \varepsilon_{v1}^p$ 。由相应的应力 p_{50} 和 q_{50} 用式(2)算出 p_0 ，且令 $\Delta p_0 = p_0 - \sigma_3$ ，则

$$B_p = \frac{\Delta p_0}{\Delta \varepsilon_{v1}^p} \quad (23)$$

相应的 p_0 平均值为

$$\bar{p}_0 = (p_0 + \sigma_3)/2 \quad (24)$$

对于不同的曲线，计算 $\sqrt{\frac{B_p}{p_a}}$ 和 $\frac{\bar{p}_0}{p_a}$ ，点绘关系曲线如图7，近似为一直线。其截距

为 $\sqrt{h}$ ，斜率为 $\frac{t}{\sqrt{h}}$ 。由此可推得参数 h 和 t 。

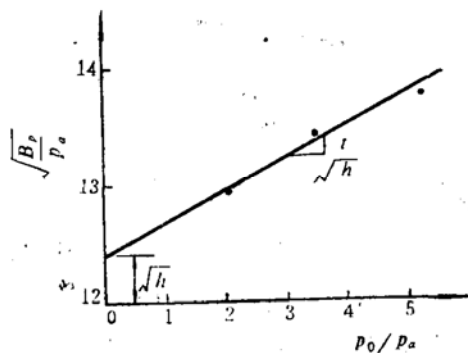


图7 确定 h 和 t

(四)参数 a

参数 a 反映了屈服面 f_2 所对应的应变在总的变形中所占的比重。 a 值一般变化在0.1—

0.5。高的 a 值对应剪胀，低的 a 值反映剪缩。可用下式近似估计 a 值

$$a = 0.25 - 0.15d \quad (25)$$

式中 d 是 $e_v - \varepsilon_a$ 曲线最后一段(即应力水平75%到95%一段)的斜率。各试验曲线 d 值不同, 取平均值。

上面所列参数确定方法中, 包含了几个经验公式, 未必适用于所有的土。有些可能要作修正和调整。用初步确定的 8 个参数 K_G , n , p_r , M_1 , M_2 , h , t 和 a , 按试样加荷条件计算应变, 与试验曲线对照, 若有必要, 对个别参数进行调整。

五、模型的初步验证

该模型被用于分析几种不同类型的土, 都有良好结果。这里仅以梯敦坝(Teton)^[6]粉砂的试验和分析结果为例。图 8 表示了两者的比较, 其中(a)是 $\sigma_3 =$ 常量, (b)是 $p =$ 常量, 实线为试验曲线, 虚线为计算曲线。计算模拟试样加荷过程逐级加荷, 对每一级荷载用弹塑性矩阵算出对应的应变增量, 累加之。两种加荷情况使用同样的参数, 由 $\sigma_3 =$ 常量的试验曲线推得。 $K_G = 75$, $n = 0.21$, $p_r = 80 \text{ kN/m}^2$, $M_1 = 0.89$, $M_2 = 0.89$, $h = 154$, $t = 3.5$, $a = 0.33$ 。图中可见计算结果与试验曲线是接近的。

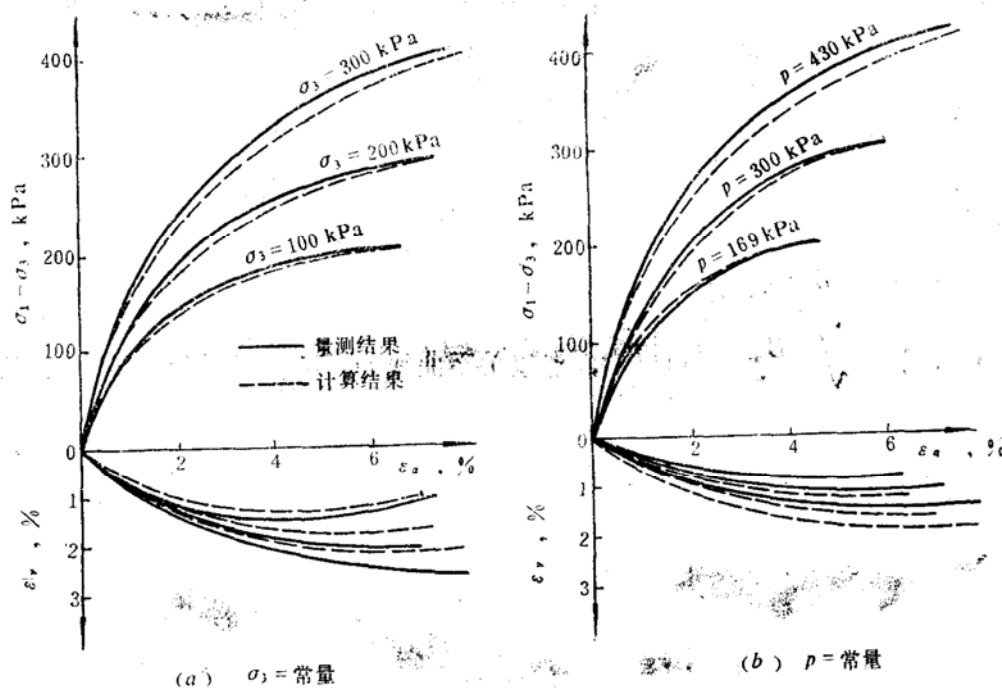


图 8 三轴试验量测和计算结果比较(Teton坝粉砂)

将该模型用于有限元计算, 分析了英国Stranstead Abbots加筋土堤, 与实测结果大体上是接近的。同时, 对土堤加筋与不加筋所作的比较计算表明, 该模型能反映加筋减小地基内的剪应力, 因而减小剪切引起的软土压缩, 减小孔隙压力; 而对双曲线模型所作的相同比较计算却不能反映加筋对减小孔压的作用^[10]。这也显示了所提模型在反映剪胀性方面的优越性。

所提模型以修正剑桥模型为基础, 同时引入了邓肯模型的一些概念, 有些参数确定直接

引用了邓肯模型的方法。它具有两者中的一些优点。它克服了单屈服面模型中的不足之处，可更好地适应不同的加荷情况，反映剪胀性。初步应用于土体的应力变形分析给出了满意的结果。此外，其方程是简单的，所有参数可由常规三轴试验确定，确定方法也不复杂。因此，这是一个便于实用的弹塑性模型。当然，它对不同土质，不同加荷条件的适应性，它的参数的变化规律等，还须要作进一步研究。参数确定的某些经验方法未必普遍合用，也要在应用中不断改进。

参 考 文 献

- [1] Roscoe, K.H., Burland, J.B., On the Generalized Stress-Strain Behavior of Wet Clay, *Engineering Plasticity*, ed. Heyman, J. and Leckie, F. A., Cambridge University 1968, pp. 539—609.
- [2] Khosla, V. K., Wu, T. H., Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil, *J. of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 102, No. GT4, 1976, pp. 303—321
- [3] 黄文熙, 硬化规律对土的弹塑性应力-应变模型影响的研究, *岩土工程学报*, 第2卷, 第1期, 1980.
- [4] Lade, P.V., Elasto-Plastic Stress-strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13, No.11, 1977, pp. 1019—1035.
- [5] Vermeer, P.A., A Double Hardening Model for Sand, *Geotechnique*, 28, No. 4, 1983, pp. 413—433.
- [6] Yin, Z.Z. and Duncan, J.M. A Stress-Strain Relationship for Dilative and Non-Dilative Soils, University of California, Report No. UCB/GT/83-1 (或岩土工程学报84年4期24—40)。
- [7] Duncan, J.M., D'Orazio, T.B., Chang, C-S., Wong, K.S. and Namiq, L.I. Con2D, A Finite Element Computer Program for Analysis of Consolidation, University of California, Berkeley, Report No. UCB/GT/81-1, 1981.
- [8] 魏汝龙, 整理压缩试验资料的一种新方法, *水利水运科学研究*, 1980, 第3期。
- [9] Duncan, J.M. and Chang, C.Y., Non-linear Analysis of Stress and Strain in Soils. *Proc. ASCE, J. of Soil Mechanics and Foundation Division*, Vol. 96, SM5, 1970
- [10] 殷宗泽, 加筋土堤的变形与稳定(待发表, 计算岩土力学研讨会论文集)