

结构应力分析中的变弹模法

沈家荫 张 扬

(河海大学水工研究所, 南京)

提 要

本文提出的具有普遍意义的变弹模法, 可以将复杂结构化为一些简单的结构来计算, 还可与边界元法、有限元法等数值计算方法结合, 有效地解决工程实际问题。并用变弹模法探讨梭米格里阿纳(Somigliana)公式用于无界域的情形, 得出了任意无限大物体不受力时无刚体位移的重要结论。

一、变弹模法

在岩土工程问题中, 常会遇到复杂结构的应力分析问题。直接对这种复杂的结构求解有时会很不方便, 结果也往往不理想。那末, 能否将这些结构分解成一些简单的结构, 从而达到简化计算和提高精度的目的呢? 变弹模法为实现这一设想提供了有效的途径。

(一)变弹模法的直观说明

设有一平面圆环(图1(a)), 边界上受一均布荷载 t^a 。假设已知圆盘问题的解答, 则可将圆环分解成两个圆盘(图1(b)、(c))。图1(b)的弹模为 $E' = E$, 而图1(c)是一个虚

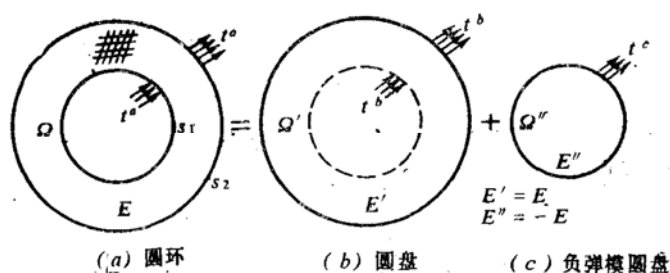


图1

拟的“负弹模体”, 其弹模为 $E'' = -E$ 。这样, 两个图形迭加后, 孔洞的弹模不变, 即为零; 其它部分的弹模值也不变。从而可以利用图1(b)、(c)两个圆盘内的应力和位移分别迭加, 得到圆环内的应力和位移。不过, 在求解两圆盘的位移和应力时, 需用到边界上的位移及应力协调条件和弹模一致条件。即

$$u^a(Q) = u^b(Q) = u^c(Q) \quad \forall Q \in s_1 \cup s_2 \quad (1)$$

$$t^a(Q) = t^b(Q) + t^c(Q) \quad \forall Q \in s_1 \cup s_2 \quad (2)$$

$$E^a(Q) = E^b(Q) + E^c(Q) \quad \forall Q \in R(\text{全空间}) \quad (3)$$

式(1)~(3)是变弹模法必须满足的一组条件。

图1的例子是简单的,若问题是一个多孔(或局部弹模不同)无限大平面时,则变弹模法就更有效了。图2表示了这种情况下,采用变弹模法的一种分解。

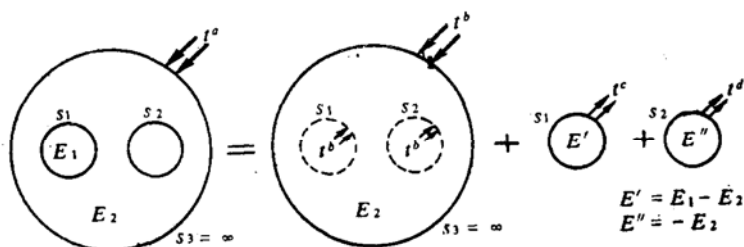


图2

(二)变弹模法的数学证明

一个弹性力学问题可以用下列纳维叶(Navier)方程,面力边界条件和位移边界条件加以描述:

$$\left. \begin{aligned} \mu u_{i,kk} + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i &= 0 \\ \lambda n_i u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j &= t_i \\ u_i &= \bar{u}_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 λ , μ , ν ——分别为拉密常数、剪切模量和泊松比。

将弹模 E 分解成 E^I 和 E^{I} 。由于 $E^I + E^{\text{I}} = E$, 则式(4)可相应地写成

$$\left. \begin{aligned} \mu^I u_{i,kk} + \frac{\mu^I}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i^I + \mu^{\text{I}} u_{i,kk} + \frac{\mu^{\text{I}}}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i^{\text{I}} &= 0 \\ \lambda^I n_i u_{k,k} + \mu^I (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda^{\text{I}} n_i u_{k,k} + \mu^{\text{I}} (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j &= t_i^I + t_i^{\text{I}} \\ u_i &= \bar{u}_i \end{aligned} \right\}$$

式中 $\lambda^I + \lambda^{\text{I}} = \lambda$, $\mu^I + \mu^{\text{I}} = \mu$, $b_i^I + b_i^{\text{I}} = b_i$, $t_i^I + t_i^{\text{I}} = t_i$ 。

由此可知,只要下列两组关系式

$$\left. \begin{aligned} \mu^I u_{i,kk} + \frac{\mu^I}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i^I &= 0 \\ \lambda^I n_i u_{k,k} + \mu^I (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j &= t_i^I \\ u_i &= \bar{u}_i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \mu^{\text{I}} n_i u_{i,kk} + \frac{\mu^{\text{I}}}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i^{\text{I}} &= 0 \\ \lambda^{\text{I}} n_i u_{i,kk} + \mu^{\text{I}} (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j &= t_i^{\text{I}} \\ u_i &= \bar{u}_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

成立, 则式(4)也必定成立。这样, 可将式(4)化为式(5)、(6)联立求解。注意到

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

从而可知上述即为变弹模法的数学证明。上述各式中 t_i^I 和 t_i^{II} 不是事先确定的, 它们一般是由式(5)、(6)联立求解才能确定, 但 b_i^I 和 b_i^{II} 可事先任意确定。

虽然从物理上讲, E (或 μ) 为负值的物体似乎是不存在的, 但是从上面的数学推导可知, μ^I 和 μ^{II} 的选择不受任何限制, 只需满足弹模一致条件 $\mu = \mu^I + \mu^{II}$ 。因此, 变弹模法不一定在任何情况下都有物理上的解释, 有时完全是数学构造性的。同时, 变弹模法是弹模的改变, 而并不是物体厚度或材料多寡的改变, 故不应简单地看成真实结构上的迭加。

我们还可以将变弹模法的思想加以推广, 根据问题的需要, 同时改变泊松比 ν 和剪切模量 μ (或弹模 E)。例如图3的契合问题, 两种材料的 μ 和 ν 值均不同, 这时结构同样可以简化为两个均质圆盘问题的“协调迭加”。其数学上的证明完全类似于变弹模法, 但材料参数的协调条件由一个增加到两个, 即

$$\mu^I + \mu^{II} = \mu$$

$$\frac{\mu^I}{1-2\nu^I} + \frac{\mu^{II}}{1-2\nu^{II}} = \frac{\mu}{1-2\nu}$$

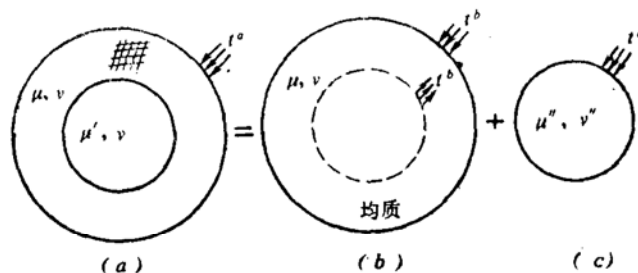


图3

根据这两个关系式, 可以确定图3(c)中的 μ'' 和 ν'' , 即

$$\mu'' = \mu - \mu'$$

$$\nu'' = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu''(1-2\nu)(1-2\nu')}{\mu(1-2\nu') - \mu'(1-2\nu)} \right]$$

对于前述变弹模法, 因 $\nu' = \nu$, 故 $\nu'' = \nu$ 。显然, 这是特例。 ν'' 和 μ'' 可能都是负值, 也可能一正一负, 这时无法找到对应的真实结构, 当然也谈不上真实结构的迭加。

二、边界元法计算公式

边界元法(BEM)仅需对物体的边界离散, 信息准备工作量极小。BEM还有许多优点, 如能考虑应力集中问题等。这里给出下面将要用到的有关计算公式。

(一)内点位移计算公式

由马克斯韦(Maxwell)-贝蒂(Betti)互换定理可得内点位移计算公式

$$\begin{aligned} \delta_{ki} u_i(P) + \int_S T_{ki}(P, Q) u_i(Q) ds \\ = \int U_{ki}(P, Q) t_i(Q) ds + \int_{\Omega} U_{ki}(P, Q) b_i(Q) d\Omega \quad P \in \Omega \quad (7) \end{aligned}$$

式中 δ_{ki} ——克罗内克尔(Kronecker)符号; u_i, t_i ——位移和面力分量; b_i ——体力分量; $U_{ki}(P, Q), T_{ki}(P, Q)$ ——分别为凯尔文(Kelvin)的位移基本解和面力基本解, 其中 P, k 分别表示单位力的作用点和方向, Q, i 分别表示物理量的考察点和方向。

对于平面应变问题有

$$\text{位移 } U_{ki}(P, Q) = \frac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)E} \left\{ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ki} + r_k r_i \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{应力 } w_{kij}(P, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ r_j [(1-2\nu) \delta_{ki} + 2r_k r_i] \right. \\ \left. - (1-2\nu)(r_k \delta_{ij} - r_i \delta_{kj}) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{面力 } T_{ki} = w_{kij}(P, Q) n_j \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{即 } T_{ki}(P, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ r_j n_j [(1-2\nu) \delta_{ki} + 2r_k r_i] \right. \\ \left. - (1-2\nu)(r_k n_i - r_i n_k) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

上述式中 r —— P, Q 两点间距离; $r_j = [x_j(Q) - x_j(P)]/r$; x_j ——坐标分量。

将式(9)、(11)代入弹性力学中的应力位移关系式可得应力计算公式。

(二)内点应力计算公式

$$\sigma_{ij}(P) = \int_S D_{kij} t_k ds + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega - \int_S S_{kij} u_k ds \quad P \in \Omega \quad (12)$$

$$\text{式中 } D_{kij} = \lambda \delta_{ij} U_{mk,m} + \frac{E}{2(1+\nu)} (U_{ik,j} + U_{jk,i})$$

$$S_{kij} = \lambda \delta_{ij} T_{mk,m} + \frac{E}{2(1+\nu)} (T_{ik,j} + T_{jk,i})$$

D_{kij} 和 S_{kij} 的具体表达式可参见文献[1]。

(三)边界点积分公式

在式(7)中取 P 点于边界上(图4)则有相应的积分公式

$$\begin{aligned} C_{ki} u_i(P) + \int_S T_{ki}(P, Q) u_i(Q) ds \\ = \int_S U_{ki}(P, Q) t_i(Q) ds + \int_{\Omega} U_{ki}(P, Q) b_i(Q) d\Omega \quad \forall P \in s \quad (13) \end{aligned}$$

对于常见的体力 b_i , 可将上式右边的第二项化为边界积分^[2,8], 故在式(13)中暂可略去此项, 这样式(13)成为

$$C_{ki} u_i(P) + \int_S T_{ki}(P, Q) u_i(Q) ds = \int_S U_{ki}(P, Q) t_i(Q) ds \quad \forall P \in S \quad (14)$$

对于平面应变问题,

$$C_{ki} = \delta_{ki} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ki} ds$$

将式(11)代入并积分得

图4

$$C_{ki} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)(\pi + \theta_1 - \theta_2) + R_1 & \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 \\ \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 & 4(1-\nu)(\pi + \theta_1 - \theta_2) + R_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 $R_1 = \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1$, $R_2 = \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2$

空间问题的 C_{ki} 值见文献[4]。

式(14)常被称为梭米格里阿纳恒等式。将区域的边界离散, 面力和边界位移用相应的节点值插值得到。这样式(14)可表示成

$$C_{ki} u_i(P) + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} T_{ki} \phi ds \cdot u_i = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} U_{ki} \psi ds \cdot t_i \quad (16)$$

式中 ψ , ϕ ——分别为面力和边界位移的插值函数矩阵。式(16)构成一方程组, 可简单地写成

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (17)$$

$[G]$ 的元素由 $\int_{S_j} U_{ki} \psi ds$ 决定(通过数值积分), $[H]$ 的元素由 C_{ki} 和 $\int_{S_j} T_{ki} \phi ds$ 决定(通过数值积分), 对于有限大的物体, $[H]$ 中的主对角元素(子矩阵)还可直接由刚体位移确定, 而不必求 C_{ki} 。

式(7)和(12)也有相应的离散式(取 $b_i = 0$), 即

$$\delta_{ki} u_i(P) = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} U_{ki} \psi ds \cdot t_i - \sum_{j=1}^N \int_{S_j} T_{ki} \phi ds \cdot u_i \quad P \in \Omega \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}(P) = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} D_{kij} \psi ds \cdot t_k - \sum_{j=1}^N \int_{S_j} S_{kij} \phi ds \cdot u_k \quad P \in \Omega \quad (19)$$

三、变弹模法结合边界元法

工程中常会遇到计算域为无界的情况,如地下建筑物(隧洞、矿井)、大坝等。这些建筑物的应力分析涉及地基,而地球的相对尺寸极大,故通常作为无限域问题处理(真正的无限域问题可以说不存在的)。但是,前面我们对梭米格里阿纳公式的讨论仅限于有界域的情况。那么,对于无界域问题将是怎样呢?为便于讨论,先从平面应变问题着手,但其结论具有普遍意义。

对于平面开孔无限域,可以看成是图5(a)的外边界 s_1 不断向外扩张的结果,此时,相应的梭米格里阿纳公式为

$$\begin{aligned} C_{ki} \cdot u_i(P) + \int_{s_2} T_{ki}(P, Q) u_i ds + \int_{s_1 \rightarrow \infty} T_{ki}(P, Q) u_i ds \\ = \int_{s_2} U_{ki}(P, Q) t_i ds + \int_{s_1 \rightarrow \infty} U_{ki}(P, Q) t_i ds \end{aligned} \quad (20)$$

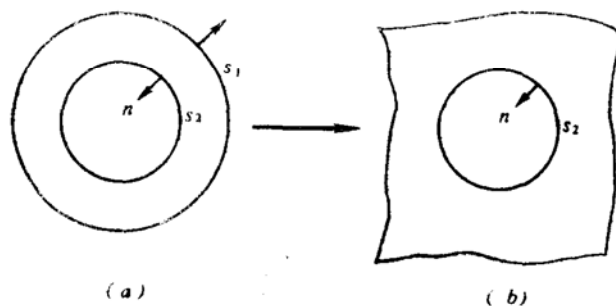


图5

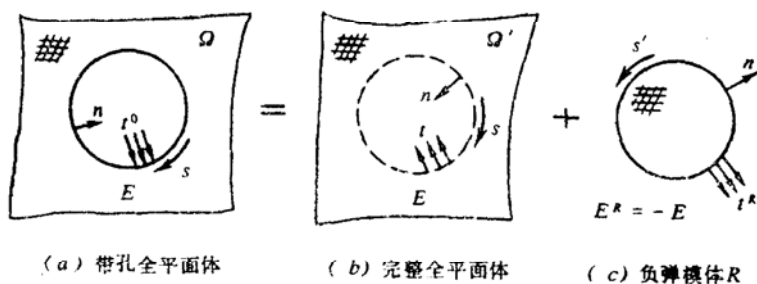
对于平面应变问题, $\int_{s_1 \rightarrow \infty} T_{ki} u_i ds$ 和 $\int_{s_1 \rightarrow \infty} U_{ki} t_i ds$ 都不存在,而且,直接确定 $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_s (T_{ki} u_i - U_{ki} t_i) ds$ 也是有困难的。若作一很大的区域代替无限域,则不但精度受损失,而且工作量也将增加。然而,用变弹模法却很易解决无界域问题,并且可以附带地证明

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_s (T_{ki} u_i - U_{ki} t_i) ds = 0$$

先对无限域作图6所示的分解。在图6中,带孔无限域被假想成两部分的迭加:完整的全平面和具有负弹模的“补块”。

右边的两个图形在孔口边界线上应满足协调条件和边界条件。即

$$\left. \begin{aligned} \{u\}_s &= \{u_R\}_s / \\ \{t\} + \{t_R\} &= \{t^0\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



式中边界 s 与 s' 重合绕向相反, $\{t^0\}$ 为原问题的面力向量。由图 6(b) 可知, 只要求得 $\{t\}$, 就可利用凯尔文解的积分求出完整全平面体中的位移和应力。而其孔口线(虚线)以外部分所具有的位移场和应力场即为原带孔全平面的解。用数学式表示即是

$$u_i(P) = \int_S U_{ki}(Q, P) t_k(Q) ds \quad \forall P \in \Omega \quad (22)$$

$$\sigma_{ij}(P) = \int_S w_{kij}(Q, P) t_k(Q) ds \quad \forall P \in \Omega \quad (23)$$

式中 U_{ki}, w_{kij} ——凯尔文解答, 即式(8)和式(9)。

解式(22)、(23)时, 请注意 U_{ki} 和 w_{kij} 中 Q, P 的前后位置和 $t(Q)$ 的下标。

但式(22)、(23)中的 $t_k(Q)$ 是未知的, 要想求出它, 必须将 P 点取在原边界线 s 上。

对完整全平面(图 6(b))使用式(22), 并在“边界”上取点 P , 即

$$u_i(P) = \int_S U_{ki}(Q, P) t_k(Q) ds \quad P \in s \quad (24)$$

由式(8)知

$$U_{ki}(Q, P) = U_{ik}(Q, P) = U_{ik}(P, Q)$$

代入式(24)得

$$u_i(P) = \int_S U_{ik}(P, Q) t_k(Q) ds$$

互换指标 i 和 k , 并注意到 $\delta_{ki} u_i = u_k$ 可得

$$\delta_{ki} u_i(P) = \int_S U_{ki}(P, Q) t_i(Q) ds \quad P \in s \quad (25)$$

对于负弹模体(图 6(c)), 则采用式(14), 即

$$\begin{aligned} C_{ki} u_i^R(P) + \int_S T_{ki}(P, Q) u_i^R(Q) ds \\ = \int_S \tilde{U}_{ki}(P, Q) t_i^R(Q) ds \quad \forall P \in s' \end{aligned} \quad (26)$$

注意, 上式 U_{ki} 中的弹模取负值, 故在其上加“ $\sim$ ”以资区别。

因 $\tilde{U}_{ki}(P, Q) = -U_{ki}(P, Q)$

$Q \in s$

故式(26)可以写成

$$\begin{aligned} C_{ki} u_i^R(P) + \int_{s'} T_{ki}(P, Q) u_i^R(Q) ds \\ = - \int_s U_{ki}(P, Q) t_i^R(Q) ds \quad P \in \Omega \end{aligned} \quad (27)$$

式(25)减去式(27)并利用式(21)得

$$\begin{aligned} (\delta_{ki} - C_{ki}) u_i(P) - \int_{s'} T_{ki}(P, Q) u_i(Q) ds \\ = \int_s U_{ki}(P, Q) t_i^0(Q) ds \quad \forall P \in s \end{aligned} \quad (28)$$

这样可以得到求解全平面问题的一条途径: 由式(28)的离散式求得 $\{t^0\}$ 和 $\{u\}$, 再由式(25)的离散式求得 $\{t\}$, 最后代入式(22)和式(23)的离散式求得内点位移和应力。用矩阵写出就是

$$([I] - [H])\{u\} = [G]\{t^0\} \quad (29)$$

式中 $[I]$ ——单位矩阵, $[H]$ 和 $[G]$ 的意义同前。

由式(25)得

$$[I]\{u\} = [G]\{t\} \quad (30)$$

如果 $\{t^0\}$ 是已知的, 则可将式(29)左乘以 $([I] - [H])^{-1}$, 再代入式(30)得

$$[G]\{t\} = ([I] - [H])^{-1}[G]\{t^0\}$$

$$\text{或} \quad \{t\} = [G]^{-1}([I] - [H])^{-1}[G]\{t^0\} \quad (31)$$

这样由式(31)求得 $\{t\}$ 后, 代入式(22)和式(23)的离散式求得内点的位移和应力。

必须指出, 有限大的物体不受力时, 可以有刚体位移。但无限大物体不受力时却无任何位移。这一点在物理上可以这样理解: 因无限大物体“充满了”整个空间, 没有整体移动的余地, 故无刚体位移。至于这一点的数学证明, 则可由式(29)导出。显然只要证明无限大物体不受力时无刚体位移即可。

当体力 $\{f\}$ 和面力 $\{t\}$ 为零时, 由式(29)得

$$([I] - [H])\{u\} = \{0\}$$

设 $\{u\}$ 是不为零的刚体位移, 所以 $[H]\{u\} = \{0\}$, 从而 $[I]\{u\} = \{0\}$, 即 $\{u\} = \{0\}$ 。这与假设矛盾, 故, $\{u\} = \{0\}$ 。

另一个重要事实是: 如果将式(28)的积分方向反向, 则有

$$\begin{aligned} C_{ki}^* u_i(P) + \int_s T_{ki}(P, Q) u_i(Q) ds \\ = \int_{s'} U_{ki}(P, Q) t_i^0(Q) ds \end{aligned} \quad (32)$$

其中 s 与 s' 重合但绕向相反, 法向也相反, 且

$$C_{ki}^* = \delta_{ki} - C_{ki}$$

下面证明 C_{ki}^* 的意义与 C_{ki} 的意义完全一样，只是前者对应于 s ，而 C_{ki} 是对应于 s' 的。如果按式(15)定义 C_{ki} 和 C_{ki}^* ，则有

$$C_{ki}^* + C_{ki} = \delta_{ki} + \int_{S_e} T_{ki} ds + \delta_{ki} + \int_{S_e'} T_{ki} ds - 2\delta_{ki} + \oint_{r=\varepsilon} T_{ki} ds \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (33)$$

由力的平衡(图7)可知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{r=\varepsilon} T_{ki} ds + \delta_{ki} = 0 \quad (34)$$

由式(33)、(34)可得

$$C_{ki}^* + C_{ki} = \delta_{ki}$$

比较式(32)、(20)可知

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_S (T_{ki} u_i - U_{ki} t_i) ds = 0$$

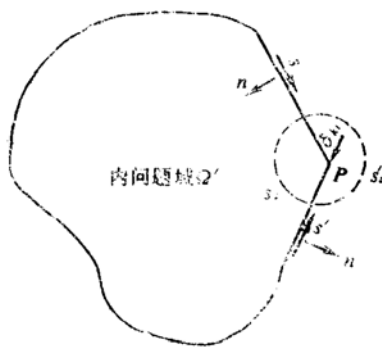


图7

对于全空间、半空间、半平面、复合半平面、层状地基以及楔形体等任何无界域问题，本节的所有公式都适用，只需对基本解和 C_{ki} 作相应的改动。各种基本解可参见有关文献[5,6]。

四、变弹模法结合有限元法

变弹模法可以与有限元法结合，以提高计算效率和精度。我们仍以图6为例，对图6所示的无界域问题，通常的有限元法只能作近似的处理，即作一个适当大的区域代替无限域。这样做不但降低了精度，而且增加了计算工作量。但若用变弹模法处理，情况就不同了。

用变弹模法的概念将图6(a)分解成图6(b)和(c)。图6(b)，符合式(22)、(23)和(25)。由式(25)的离散形式可得式(30)。对虚拟的负弹模体图6(c)，用有限元剖分。此时，有关系式

$$[\tilde{K}]\{u\} = \{F\} \quad (35)$$

式中 $[\tilde{K}]$ ——有限元的刚度矩阵，其上标“~”是强调相应的弹模取负值； $\{u\}$ ， $\{F\}$ ——分别为结点位移矢和结点移置荷载矢量。

为了利用式(30)、(35)联立求解 $\{t\}$ 及 $\{u\}$ ，需将 $\{F\}$ (结点集中力矢)或 $\{t\}$ (分布力在结点上的值)转化，使两者一致。即寻求一个结点荷载转换矩阵 $[M]$ ，使

$$\{tR\} = [M]^{-1}\{F\} \quad (36)$$

由功的协调条件可求出 $[M]$ ，即 $[M]$ 中的元素由 $\int_{S_i} \phi^T \psi ds$ 确定。

将式(35)左乘以 $[M]^{-1}$, 并利用式(36)得

$$[M]^{-1} [\tilde{K}] \{u\} = \{f^R\} \quad (37)$$

将式(30)左乘以 $[G]^{-1}$ 得

$$[G]^{-1} \{u\} = \{t\} \quad (38)$$

将式(37)、(38)叠加, 并利用式(21)可得

$$([M]^{-1} [\tilde{K}] + [G]^{-1}) \{u\} = \{f^0\} \quad (39)$$

式中“+”表示叠加。

由式(39)求得 $\{u\}$ 后, 代入式(38)求得 $\{t\}$, 再代入式(22)和(23)的离散式, 即可求得域内位移和应力。

若 $\{f^0\}$ 已知, 则 $\{t\}$ 可更简便地由下式得到:

$$\{t\} = [G]^{-1} ([M]^{-1} [\tilde{K}] + [G]^{-1})^{-1} \{f^0\} \quad (40)$$

亦即

$$\{t\} = ([M]^{-1} [\tilde{K}] [G] + [I])^{-1} \{f^0\} \quad (41)$$

采用变弹模法与普通有限元法相比, 精度提高的程度取决于各具体问题和有限元所取的计算范围的大小。这是因为对无限域问题, 普通有限元法取有限域来代替, 这就是说普通有限元法除了离散化技术带来的误差外, 还有引入近似边界条件而带来的误差。采用变弹模法后, 消除了后一种误差, 从而提高了解的精度。

五、实 例

对图 8 所示的一深层水平隧洞, 孔径 2.00m, 内壁受 100kPa 的均布压力, 用变弹模法结合边界元法 (24 个线性单元) 进行计算。由表 1 的计算结果与精确解的比较可见, 采用变弹模法计算的精度是相当高的。实际上计算的时间也较短。

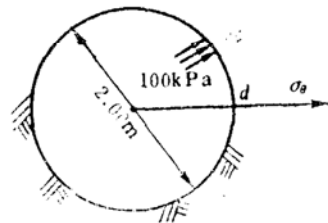


图 8

表 1

$d(m)$	环向应力 σ_θ (kPa)		误差 (%)
	精 确 解	近 似 解	
1.40	51.20	51.10	0.16
1.60	39.06	38.94	0.31
2.00	25.00	24.81	0.76
2.50	16.00	15.84	1.00
3.00	11.11	10.98	1.17
4.50	4.94	4.87	1.17

注: d 为计算点到孔心的距离

六、结 语

本文提出了变弹模法,并给予了数学证明,在理论上是严谨的。其中列举的变弹模法与边界元、有限元等数值计算方法结合使用的例子,虽多限于全平面和半平面问题,但其结论具有普遍意义,适用于任何区域的问题。因此,变弹模法可作为复杂结构应力分析的一种有效的辅助手段。

参 考 文 献

- [1] 沈家荫、张杨,边界元方法若干问题的研讨,华东水利学院学报,1985年第1期。
- [2] 沈家荫、张杨,边界单元法若干问题的探讨,华东水利学院学报,1985年第2期。
- [3] Danson, D., Linear Isotropic Elasticity with Body Force, in Progress in Boundary Element Methods, Vol. 2, C. A. Brebbia (Ed.), Press Limited, 1983.
- [4] Hartmann, F. and Germany, W., Computing the C-matrix Non-Smooth Boundary Points, In New Development in Boundary Element Methods, Edited by C. A. Brebbia, CML Publications Limited, 1980.
- [5] Brebbia, C. A. and Waber, S., Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [6] 王泳嘉,复合半平面基本解,东北工学院学报,1980年第3期。

Variable Elastic Modulus Method Used in Structural Stress Analysis

Shen Jiayin and Zhang Yang

(Hehai University, Nanjing)

Abstract

The variable elastic modulus method is presented in this paper, with which the complex structure can be simplified for the purpose of calculation. Combined with some numerical methods, such as boundary element method and finite element method, the variable elastic modulus method can be used to solve practical engineering problems. Examples are given, the application of Somigliana Formula to boundless domains is discussed, and the important conclusion has been reached that if no force is exerted on any infinitely large object, then no rigid displacement will occur.