

岩体常用屈服函数的改进

史述昭

(武汉水利电力学院)

杨光华

(广东省水电科研所, 广州)

提 要

本文讨论了屈服函数在 π 平面上外凸的条件, 并提出了一个能保持曲面外凸且无棱角的屈服函数, 这个函数比德鲁克-普拉格 (Drucker-Prager) 屈服函数更接近于摩尔-库伦 (Mohr-Coulomb) 屈服函数, 因而在一定程度上具备了这两个屈服函数的优点而避免了它们的缺点。

一、引 言

岩体的屈服函数, 在理想塑性情况下, 摩尔-库伦屈服函数与实际情况比较符合, 应用最早并为工程界所接受, 但是, 由于它的屈服面在主应力空间是一个六角锥面, 给计算带来不便。德鲁克-普拉格在1952年提出了一个改进的屈服函数, 它的屈服面在主应力空间是一个圆锥面, 这两个屈服函数所表示的屈服面如图1所示。德鲁克-普拉格屈服函数, 不但消去了棱角而且比较简单, 因而较多地为人们所采用, 但是, 它在反映实际上不如摩尔-库伦屈服函数, 而且偏于保守。辛克维支-潘德 (Zienkiewicz-Pande) 进一步提出在子午平面上为二次曲线的改进^[1], 它可以克服上述二屈服面都具有一个尖顶的缺点。古德黑斯-阿吉里斯 (Gudehus-Argyris) 在1975年提出一个在 π 平面上既无棱角而又能较接近于摩尔-库伦屈服函数的一个新的函数。

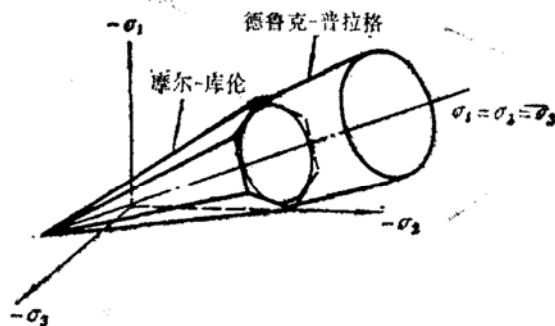


图1

本文对古德黑斯-阿吉里斯提出的函数进行了讨论, 发现它也有不足的地方, 如当岩石材料的内摩擦角 $\varphi > 22.02^\circ$ 时, 该函数所表示的屈服面将出现凹面。在此基础上, 本文提出了一个无棱角、且较德鲁克-普拉格屈服函数更接近摩尔-库伦屈服函数, 而又能保证屈服面外凸的屈服函数。

二、辛克维支-潘德及古德黑斯-阿吉里斯屈服函数

在理想塑性情形下, 屈服函数可以写成一般的表达形式

$$F = f_1(\sigma_m) + f_2(\bar{\sigma}, \theta) = 0 \quad (1)$$

式中 σ_m 为平均应力;

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} \quad (2)$$

$\bar{\sigma}$ 为等效剪应力;

$$\bar{\sigma} = \sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (3)$$

θ 为洛德应力角

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta = \arctan \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} \leq \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

显然, 将式(1)中的 θ 取为常数, 则可得到 σ_m 与 $\bar{\sigma}$ 在子午平面上的关系, 如果将式中的 σ_m 取为常数, 则可得到 $\bar{\sigma}$ 与 θ 在 π 平面上的关系。辛克维支-潘德将式(1)取成二次式的形式:

$$F = \alpha \sigma_m^2 + \beta \sigma_m + \gamma + (\bar{\sigma}/g(\theta))^2 = 0 \quad (5)$$

式中 α, β, γ 为系数^[1], 当选取不同数值时, 就可在子午平面上相应得到抛物线, 双曲线或椭圆曲线等二次曲线, 它们都可以消除屈服面上的尖顶, 它们在 π 平面上的形状取决于 $g(\theta)$ 的形式, 例如摩尔-库伦屈服函数的

$$g(\theta) = \frac{3 - \sin\varphi}{2(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)} \quad (6)$$

式中 φ 为岩石材料的内摩擦角。此时 $g(\theta)$ 的限界为

$$[g(\theta)]_{\theta=\pi/6} = 1 \quad [g(\theta)]_{\theta=-\pi/6} = \frac{3 - \sin\varphi}{3 + \sin\varphi} = k \quad (7)$$

古德黑斯-阿吉里斯提出一个较为简单的 $g(\theta)$ 式:

$$g(\theta) = \frac{2k}{(1+k) - (1-k)\sin 3\theta} \quad (8)$$

式中 k 见式(7)的第二式, 这个函数的特点是

$$1. \quad \left[\frac{dg(\theta)}{d\theta} \right]_{\theta=\pm\pi/6} = 0 \quad (9)$$

因此屈服面无棱角。

$$2. \quad [g(\theta)]_{\theta=-\pi/6} = 1 \quad [g(\theta)]_{\theta=\pi/6} = k \quad (10)$$

因此屈服面通过摩尔-库伦屈服面的角点, 且比德鲁克-普拉格屈服面更靠近摩尔-库伦屈服面。它们在 π 平面上的图形如图 2 所示。

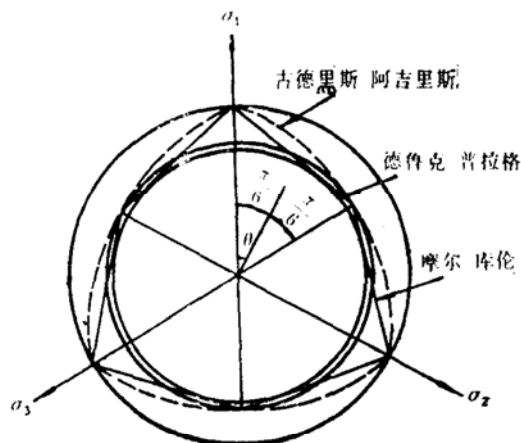


图 2

这个函数也有一些不足的地方, 当岩石材料的内摩擦角 $\varphi > 22.02^\circ$ 时, 此函数的屈服面将出现凹面, 而大多数岩石材料的内摩擦角都大于 22.02° 。

三、在 π 平面上屈服面外凸的条件

从式(5)可以看出, 凡平行于 π 平面的平面有

$$\bar{\sigma}/g(\theta) = \text{常数} = C_1 \quad (11)$$

在此平面上屈服函数可以用极坐标表示, 其向径及幅角分别为^[2]

$$r = \sqrt{2} \bar{\sigma} = \sqrt{2J_2} \quad (12)$$

$$\theta = \arctan \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (13)$$

为了计算方便取

$$f(\theta) = \frac{1}{g(\theta)} \quad (14)$$

将式(12)、(14)代入式(11)有

$$\frac{r}{\sqrt{2}} f(\theta) = C_1$$

即

$$r = \frac{\sqrt{2}C_1}{f(\theta)} = \frac{C}{f(\theta)} \quad (15)$$

由解析几何可知, 要保证一曲线外凸, 其向径必须满足下列条件:

$$\rho = r^2 + 2r'^2 - r'' \geq 0 \quad (16)$$

将式(15)代入并化简后有

$$\rho = C^2 \frac{f(\theta) + f''(\theta)}{f^3(\theta)} \geq 0 \quad (17)$$

上式就是 $f(\theta) = 1/g(\theta)$ 保持外凸的条件。

对照古德黑斯-阿吉里斯按式(8)所取的 $g(\theta)$, 有

$$f(\theta) = \frac{1}{g(\theta)} = \frac{(1+k) - (1-k)\sin 3\theta}{2k} \quad (18)$$

式中 k 的变化范围为

$$\frac{1}{2} \leq k = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \leq 1 \quad (19)$$

由式(18)可知有

$$[f(\theta)]_{\theta=-\pi/6} = 1 > 0 \quad [f(\theta)]_{\theta=-\pi/6} = \frac{1}{k} > 0 \quad (20)$$

$$\text{因此恒有} \quad f^3(\theta) > 0 \quad (21)$$

由式(17)取 $R = f(\theta) + f''(\theta)$, 则应有

$$R = f(\theta) + f''(\theta) \geq 0 \quad (22)$$

将式(18)代入式(22)有

$$R = \frac{(1+k) + 8(1-k)\sin 3\theta}{2k} \geq 0 \quad (23)$$

显然, 当 $\theta = -\pi/6$ 时 R 为最小, 此时应有

$$R_{\min} = [R]_{\theta=-\pi/6} = \frac{(1+k) - 8(1-k)}{2k} \geq 0 \quad (24)$$

$$\text{即有} \quad (1+k) - 8(1-k) \geq 0 \quad (25)$$

上式就是古德黑斯-阿吉里斯函数外凸的条件, 由此可得:

$$k = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \geq \frac{7}{9} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{这就有} \quad \sin \varphi &\leq 0.375 \\ \varphi &\leq 22.02^\circ \end{aligned} \quad (27)$$

由此可见, 只有当 $\varphi \leq 22.02^\circ$ 时才能保证曲面外凸, 而当 $\varphi > 22.02^\circ$ 时将出现凹面, 这是与屈服面应保持外凸的条件相违背的, 因此这是它不足的地方。

四、一个改进的屈服函数

为了能满足曲线外凸的条件, 可以根据要求拟合其它函数, 现根据下列要求拟合一个改进的函数 $f(\theta)$:

1. 要求函数图形不存在有棱角, 这就要求

$$\left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]_{\theta = -\pi/6} = 0 \quad (28)$$

2. 要求以德鲁克-普拉格函数为下限, 具体要求

$$[f(\theta)]_{\theta = -\pi/6} = 1 \quad (29)$$

这样, 由式(15)有

$$[r]_{\theta = -\pi/6} = \left[\frac{C}{f(\theta)} \right]_{\theta = -\pi/6} = C \quad (30)$$

式中 C 取为德鲁克-普拉格函数在平行于 π 平面的平面上的半径, 这就要求所设取的函数在 $\theta = -\pi/6$ 处与德鲁克-普拉格函数有相同的向径。

3. 要求所设取的函数图形, 尽可能地靠近摩尔-库伦函数图形, 为此要求

$$k \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$\text{且} \quad \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) - k \right| = \min \quad (31)$$

4. 要求函数图形保持外凸, 即要求

$$\frac{f(\theta) + f''(\theta)}{f^3(\theta)} \geq 0$$

在这里分别要求

$$f(\theta) \geq 0 \quad (32)$$

$$f(\theta) + f''(\theta) \geq 0 \quad (33)$$

现在需要拟合能满足上述各条件的函数, 设取

$$f(\theta) = \frac{a - b \sin 3\theta}{a + b} \quad (34)$$

式中 a 、 b 为与 k 有关的正数。由上式可见它能满足式(28)也能满足式(29)及(30), 要满足式(31)应有

$$\frac{a-b}{a+b} - k = \varepsilon_1 \quad (35)$$

式中 ε_1 为正的小量。由式(32)及(33)有

$$\frac{a-b\sin 3\theta}{a+b} \geq 0 \quad \frac{a+8b\sin 3\theta}{a+b} \geq 0$$

由于 a 、 b 为正值常数, 故以上二式可以为

$$a - b\sin 3\theta \geq 0 \quad a + 8b\sin 3\theta \geq 0$$

取以上二式的最小值有

$$a - b \geq 0 \quad a - 8b \geq 0$$

可见只要 a 、 b 能满足上面的第二式则自然能满足第一式, 现将第二式写成

$$a - 8b = \varepsilon_2 \quad (36)$$

式中 ε_2 为另一正的小量。联立求解式(35)及(36)可得

$$a = \frac{\varepsilon_2(1+k+\varepsilon_1)}{9(k+\varepsilon_1)-7} \quad b = \frac{\varepsilon_2(1-k-\varepsilon_1)}{9(k+\varepsilon_1)-7} \quad (37)$$

将式(37)代入式(34)中有

$$f(\theta) = \frac{(1+k+\varepsilon_1) - (1-k-\varepsilon_1)\sin 3\theta}{2} \quad (38)$$

在上式中还需确定 ε_1 , 由式(37)可以看出, 要使 a 、 b 为正数应有

$$1 - k - \varepsilon_1 \geq 0 \quad 9(k + \varepsilon_1) - 7 \geq 0$$

因此要求

$$\frac{7}{9} \leq k + \varepsilon_1 \leq 1 \quad (39)$$

由于式(38)中不包括有 ε_2 , 不能得出 ε_2 为正数的结论, 也就不能保证曲面外凸, 为此重新考察式(32)及(33)的条件, 将式(38)代入式(32)及(33)有

$$\frac{(1+k+\varepsilon_1) - (1-k-\varepsilon_1)\sin 3\theta}{2} = \varphi_1(\theta) \geq 0 \quad (40)$$

$$\frac{(1+k+\varepsilon_1) + 8(1-k-\varepsilon_1)\sin 3\theta}{2} = \varphi_2(\theta) \geq 0 \quad (41)$$

取 $\varphi_1(\theta)$ 及 $\varphi_2(\theta)$ 的 θ 为最小值时应满足的条件为

$$[\varphi_1(\theta)]_{\min} = [\varphi_1(\theta)]_{\theta=\pi/6} = k + \varepsilon_1 \geq 0 \quad (42)$$

$$\left[\varphi_2(\theta) \right]_{\min} = \left[\varphi_2(\theta) \right]_{\theta=\pi/6} = \frac{9(k + \varepsilon_1) - 7}{2} \geq 0 \quad (43)$$

式(42)及式(43)分别要求

$$k + \varepsilon_1 \geq 0 \quad (44)$$

$$k + \varepsilon_1 \geq \frac{7}{9} \quad (45)$$

显然, 只要 $k + \varepsilon_1$ 满足式(45)则必能满足式(44), 而式(45)的条件与式(39)的相同, 所以, 只要式(39)能得到满足就可以保证曲线外凸。

现在由式(39)来确定 ε_1 , 这可以有多种解答, 比较简单的解是选取

$$\varepsilon_1 = A(1 - k)^n \quad (46)$$

式中 n 为正整数, A 为待定常数。先选取 $n = 1$, 则

$$\varepsilon_1 = A(1 - k) \quad (47)$$

代入式(39)分别可得

$$\left. \begin{aligned} A &\leq \frac{1 - k}{1 - k} = 1 \\ A &\geq \frac{7 - 9k}{9(1 - k)} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

取第二式 A 的最小值有

$$A_{\min} = \left[\frac{7 - 9k}{9(1 - k)} \right]_{k=1/2} = \frac{5}{9} \quad (49)$$

这样, A 的取值范围为

$$\frac{5}{9} \leq A \leq 1$$

但是, 为了使 ε_1 尽可能的小, 应取 $A = 5/9$, 所以有

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{9}(1 - k) \quad (50)$$

代入式(38)可得

$$f(\theta) = \frac{(7 + 2k) - 2(1 - k)\sin 3\theta}{9} \quad (51)$$

上式的 $f(\theta)$ 能够满足上面所提出的四个条件。下面再讨论这个函数图形与摩尔-库伦函数图形接近的程度。在摩尔-库伦函数中, 取

$$\varphi_1(k) = \frac{[f(\theta)]_{\theta=\pi/6}}{[f(\theta)]_{\theta=\pi/6}} = \frac{[g(\theta)]_{\theta=\pi/6}}{[g(\theta)]_{\theta=\pi/6}} \quad (52)$$

将式(7)代入上式可得

$$\varphi_1(k) = k > 0$$

由此可见 $\varphi_1(k)$ 是随 θ 的增加而单调增加的, 在改进的函数中则有

$$\varphi_2(k) = \frac{[f(\theta)]_{\theta=\pi/6}}{[f(\theta)]_{\theta=\pi/6}} = \frac{5+4k}{9} > 0 \quad (53)$$

可见 $\varphi_2(k)$ 也是随 θ 的增加而单调增加的, 所以改进的函数与摩尔-库伦函数有较好的接近度。

由于 $1-k \leq 1$, 所以若在式(46)中取 $n > 1$ 则 ε_1 有可能更小一些, 为此取 $n = 2$, 则式(46)成为

$$\varepsilon_1 = A(1-k)^2 \quad (54)$$

作同样的计算可得

$$\varepsilon_1 = 1.125(1-k)^2 \quad (55)$$

代入式(38)中可得

$$f(\theta) = \frac{[(1+k) + 1.125(1-k)^2] - [(1-k) - 1.125(1-k)^2]\sin 3\theta}{2} \quad (56)$$

上式的 $f(\theta)$ 也是能满足上面所提出的四个条件的一个函数。下面同样讨论它与摩尔-库伦函数的接近度, 此时

$$\varphi_2(k) = k + 1.125(1-k)^2 \quad (57)$$

求 $\varphi_2(k)$ 的极小值, 为此取

$$\varphi'_2(k) = 1 - 2.25(1-k) = 0$$

$$\text{则 } k = \frac{5}{9} \quad (58)$$

即 $k > 5/9$ 也就是 $\varphi < 59^\circ$ 时 $\varphi_2(k)$ 才随 θ 的增加而单调增加, 但是在岩石中 $\varphi > 59^\circ$ 的不多, 为此, 式(56)的函数还是有实用意义的, 而它所选取的 ε_1 要更小一些, 所以式(56)比(51)要优越一些。当然, 还可以取 $n > 2$ 的数, 但是这时 ε_1 的减小并不显著, 而要求 $\varphi_2(k)$ 为单调增加函数所对应的 φ 角比 59° 还要小, 例如取 $n = 3$ 时 $A_{\min} = 3$, 而这时要求 $\varphi < 36.9^\circ$ 时 $\varphi_2(k)$ 才是单调增加的函数, 而且这时 $f(\theta)$ 的表示式更加复杂, 所以选取式(56)的函数是

适宜的,它在 π 平面上的图形如图3所示。

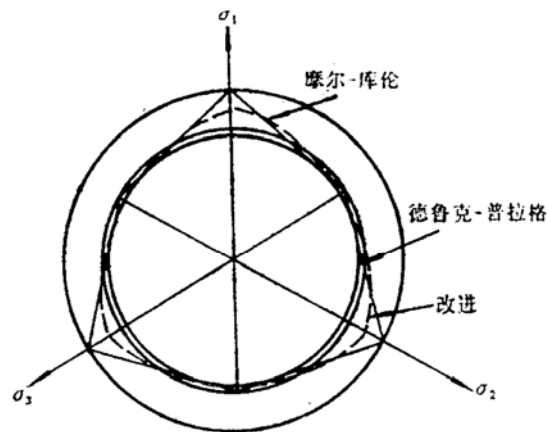


图3

这时的屈服函数可以取二次式的形式,则由式(5)可得

$$F = a\sigma_m^2 + \beta\sigma_m + \gamma + (\bar{\sigma} f(\theta))^2 = 0 \quad (59)$$

式中 $f(\theta)$ 可以取式(56),也可以取式(51)。如取一次式的形式则有

$$F = a\sigma_m + (\bar{\sigma} f(\theta)) - k = 0 \quad (60)$$

式中 a 、 k 取为

$$a = \frac{\sqrt{3} \sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad k = \frac{\sqrt{3} c \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (61)$$

式中 c 为岩石材料的凝聚力。

五、结 论

将式(56)或(51)中的 $f(\theta)$ 应用于式(59)或(60)中所组成的屈服函数可以既无尖顶也无棱角,而且恒能保证曲面外凸,同时它还与摩尔-库伦屈服函数有较好的接近度,因此这个改进的屈服函数在一定程度上具备了摩尔-库伦屈服函数和德鲁克-普拉格屈服函数各自的优点,而避免了它们的弱点。

参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz, O. C. and Pande G. N., Some Useful form of Isotropic Yield Surfaces for Soil and Rock Mechanics, Finite Elements in Geomechanics, John Wiley and Sons, Ltd. 1977, pp. 179~189.
- [2] 王仁, 黄文彬, 塑性力学引论, 北京大学出版社, 1982年, pp. 63~68.

An Improvement of the Commonly Used Yield Function for Rock Material

Shi Shuzhao

(Wuhan Institute of Hydraulic and Electric Engineering)

Yang Guanghua

(Guangdong Research Institute of Hydraulic and Electric Engineering, Guangzhou)

Abstract

In this paper the convex condition of the yield function in π -plane is discussed. A new yield function which has no corner in π -plane, and can always keep convex is proposed. It is more approximate to Mohr-Coulomb yield function than Drucker-Prager yield function. Hence this yield function has some advantages of the above yield functions and can avoid their disadvantages.