

真空和堆载作用下砂井地基 固结的边界元分析

林 丰

陈 环

(福州大学土木系)

(天津大学水利系)

提 要

边界元法是70年代发展起来的一种新的数值计算方法。本文把边界元法应用于求解真空压力和堆载压力作用下的软粘土砂井地基固结变形的平面应变问题。笔者在文中推导了线性比奥固结理论的边界积分方程,并结合天津新港软土地基的真空预压袋装砂井加固工程就真空预压和堆载预压两种情况进行了计算对比分析;对于砂井地基和无砂井地基的预压效果问题也进行了相应的计算;在文中还把边界元、有限元及差分的计算结果与实测值做了对比。

一、前 言

目前,在地基固结问题中最通用的是太沙基固结理论的有限差分法和比奥固结理论的有限单元法。边界元法是继有限元法之后发展起来的一种新的数值计算方法。与有限元法相比,它有着数学原理简单、处理问题过程简洁、降低问题维数及数值精度高等特点。近几年来边界元法已经在各学科得到广泛的应用。

80年代以来, Prededeanu^[1], Takemi Kuroki^[2] 以及 C. Graeja-Suarez^[3] 等开始把边界元法应用于解决土力学问题。他们在土的固结理论、非线性应力分析以及地基位移动力特性等方面做了大量的研究工作。在国内,水利水电科学研究院、河海大学等也开始应用边界元法解决渗流及动水压力分布问题。

本文是以土体的位移平衡方程及孔隙水体的连续性方程作为边界元法的控制方程,运用直接列式法建立土体的孔隙水压力、位移及有效应力积分方程。

真空预压法是利用抽真空的方法,在土体中形成一个局部的负压源,通过降低土体中的孔隙水压力而使孔隙水体排出,有效应力增加来压密土体的地基加固方法。这一方法在天津新港软土地基加固工程中获得了成功^[4]。运用边界元法进行工程实例的变形及应力分析是一次尝试。鉴于目前采用现有的应力应变模型计算真空条件下的非线性固结问题存在较大误差,本文采用线弹性应力应变关系进行固结计算。

二、比奥固结理论的边界积分方程

平面应变条件下线性比奥固结理论的控制方程由土体的平衡方程和孔隙水体的连续性方程组成,它们可表示为:

$$\left. \begin{aligned} & \left(K + \frac{4}{3}G \right) \overline{u_{1,11}} + G\overline{u_{1,22}} + \left(K + \frac{1}{3}G \right) \overline{u_{2,12}} - u_{,1} + x_1 = 0 \\ & G\overline{u_{2,11}} + \left(K + \frac{4}{3}G \right) \overline{u_{2,22}} + \left(K + \frac{1}{3}G \right) \overline{u_{1,12}} - u_{,2} + x_2 = 0 \\ & \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \frac{k_1}{\gamma_w} u_{,11} + \frac{k_2}{\gamma_w} u_{,22} - n\beta \dot{u} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 K ——土的体积变形模量;

G ——土的剪切模量;

$\overline{u_1}, \overline{u_2}$ ——分别为 X 和 Y 方向上的位移;

u ——孔隙水压力;

x_1, x_2 ——分别为 X 和 Y 方向上的体积力;

γ_w ——水容重;

$\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2$ ——为 X 和 Y 方向上的应变对时间的导数;

k_1, k_2 ——为 X 和 Y 方向上的渗透系数;

n ——土的孔隙率;

β ——孔隙水压缩系数。

在推导积分方程时, 假设:

1. 在式(1)的位移平衡方程中不计体积力的影响。

2. 孔隙水体不可压缩, $\beta = 0$ 。

3. 孔隙水体的流动符合达西定律。

4. 土的应力应变关系为线弹性的。

5. 孔隙水压力和有效应力均以压为正, 为一致起见, 取积分域边界的内法向为正, 对于几何方程:

$$\varepsilon_{ij} = -(\overline{u_{i,j}} + \overline{u_{j,i}})/2 \quad i, j = 1, 2 \quad (2)$$

在公式的推导及计算过程中, 边界单元取为常单元, 内部单元取为线性元。

(一) 孔隙水压力边界积分方程的建立

在控制方程(1)中, 第三式为表征土体中孔隙水体连续性的微分方程, 它是推导孔隙水压力积分方程的基础。由土的广义虎克定律及太沙基的有效应力原理, 可将连续性方程用微分算子 $L(\) = (\alpha \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t})(\)$ 表示为以下形式:

$$L(u) = \left(\alpha \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) u = -\dot{\sigma}_{oct} \quad (3)$$

式中 $\nabla^2(\)$ ——拉普拉斯算子;

$\dot{\sigma}_{oct}$ ——土的八面体总应力对时间的导数;

$\alpha = \frac{k \cdot K}{\gamma_w}$, 为一常数, 即固结系数;

k ——平均渗透系数。

由与式(3)相对应的点源函数共轭微分方程, 在积分域 Ω 上 Q 点作用有单位孔隙水压力时, 对于域 Ω 上任意点 P 所对应的基本解 u^* , 当 $P \neq Q$ 及任一时刻 τ ($\tau > t \geq 0$) 时

$$u^*(P, Q) = \frac{1}{4\pi\alpha(\tau - t)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha(\tau - t)}\right) \quad (4)$$

根据达西定律得流量 q 的基本解 q^*

$$q^*(P, Q) = \frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{kr}{8\pi\alpha^2(\tau - t)^2\gamma_w} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha(\tau - t)}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

式中 r ——为 P 与 Q 点之间的距离;

n ——积分域的内法向。

以基本解 u^* 作为权函数, 将所求的时间分为 m 段 $t_1, t_2, \dots, t_m$, 对于任一时刻 t_j 的孔隙水压力和流量, 由基本解的性质, u^* 与前一时刻的 t_{j-1} 有关, 故令 $\tau = t_j, t = t_{j-1}$, 而后对式(3)在 t_{j-1} 到 t_j 时段上加权积分, 运用格林公式得求解孔隙水压力的边界积分方程:

$$\begin{aligned} & c(P) \cdot u(P, t_j) + \theta \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma dt \\ &= \theta \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega} u^* \dot{\sigma}_{oe} d\Omega dt + \\ & \quad + \int_{\Omega} [u^* \cdot u]_{t_{j-1}} d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $c(P)$ ——与 P 点所在位置有关的加权因子, 当 P 位于光滑边界上时为 $1/2$, P 位于 Ω 内时为 1 , P 位于夹角为 β 的边界角点上时, 它为 $\beta/2\pi$;

θ ——已知常数, $\theta = \frac{\alpha\gamma_w}{k}$

(二) 土体位移及表面力边界积分方程的建立

对于各向同性的土体, 由于不考虑体积力的影响, 在平衡方程中没有自重应力出现。由控制方程(1), 可将位移平衡方程用张量形式表示为

$$-L_{ij}\bar{u}_j + u_{,i} = 0 \quad (7)$$

式中 L_{ij} ——微分算子^[6]

偏微分方程(7)是自共轭的, 在 Q 点 k 方向作用一单位力时, 点源函数以位移表示的平衡方程的解与弹性力学问题的基本解相差一负号

$$\overline{u_{kl}}^*(P, Q) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (8)$$

式中 ν ——土的泊松比;

δ_{ij} ——当 $i \neq j$ 时为 0, $i = j$ 时为 1。

将式(7)用总应力 σ_{ij} 表示为:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

由太沙基有效应力原理, 有效应力 $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}u$, 它也可用位移表示为:

$$\sigma'_{ij} = -D_{ijkl} (\overline{u_{k,l}} + \overline{u_{l,k}}) / 2 \quad (10)$$

式中 $D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})$;

λ ——拉梅常数。

与式(9)相对应的点源函数平衡方程基本解 σ_{lj}^k , 在边界 Γ 上, 对应于 X, Y 方向上的表面力基本解为:

$$P_{kl}^* = \sigma_{lj}^k n_j \quad (11)$$

式中 n_j ——方向余弦, $n_j = \cos(n, x_j)$ 。

式(11)的基本解表达式为:

$$P_{kl}^*(P, Q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{kl} + 2r_{,k} r_{,l}] + (1-2\nu)(r_{,l} n_k - r_{,k} n_l) \right\} \quad (12)$$

由功的互等定理, 对总应力平衡方程(9)以位移基本解(8)作为权函数在域 Ω 上加权积分; 同理, 对于点源函数的应力平衡方程 σ_{lj}^k , 取位移 $\overline{u_j}$ 作为权函数在 Ω 上加权积分, 相减后得到位移及表面力的积分方程:

$$c(P) \overline{u_k}(P) + \int_{\Gamma} P_{kj}^* \overline{u_j} d\Gamma = \int_{\Gamma} \overline{u_{kj}}^* (P_j + u n_j) d\Gamma + \int_{\Omega} u \varepsilon_{lj}^k d\Omega \quad (13)$$

(三)域内的位移及有效应力积分方程的建立

在式(13)中取 $c(P)$ 为 1, 得计算内点位移的积分方程:

$$\overline{u_k} = \int_{\Gamma} \overline{u_{kj}}^* (P_j + u n_j) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{kj}^* \overline{u_j} d\Gamma + \int_{\Omega} u \varepsilon_{lj}^k d\Omega \quad (14)$$

将式(14)代入式(10), 整理后得求解土的有效应力积分方程:

$$\sigma_{ij}' = - \int_{\Gamma} D_{lij}(P_l + u_{nl}) d\Gamma + \int_{\Gamma} S_{lij} \bar{u}_l d\Gamma + \int_{\Omega} D_{lij,l} u_l d\Omega \quad (15)$$

式中 $D_{lij} = \lambda \delta_{ij} \bar{u}_{kl,k}^* + G(\bar{u}_{il,i}^* + \bar{u}_{jl,j}^*)$;

$S_{lij} = \lambda \delta_{ij} P_{kl,k}^* + G(P_{il,i}^* + P_{jl,j}^*)$ 。

由式(15)可求出各内点上的有效应力。再由式(10)计算这一时刻各点的八面体总应力,以便进行下一时刻的孔隙水应力的消散计算。

由以上推导的边界积分方程(6)、(13)及式(15),形成了一个可以计算任意时刻的孔隙水压力、位移和有效应力的循环系统,这些积分方程用高斯求积公式进行数值离散后即可在计算机上实现求解。

对于比奥固结理论的边界元法,它的边界条件和初始条件由液相的孔隙水体和固相的土骨架组成。

对于孔隙水体的初始条件,由于不考虑静水压力的影响,所以在外部荷载作用之前,设其孔隙水压力为零,对于土骨架初始条件,其变形及有效应力均为零。

为便于对计算结果进行分析,对于堆载问题在荷载施加的瞬间,设地基内部的孔隙水压力达到荷载值,而在透水边界上孔隙水压力为零。对于真空(简称负压)问题则相反,真空压力作用的瞬间设地基内部的孔隙水压力为零,而负压作用的透水边界上孔隙水压力即为负值。

三、工程实例的计算分析

根据以上推导的比奥固结理论的边界积分方程,用FORTRAN语言设计了相应的计算程序,该程序适用于求解在堆载及真空两种压力作用下土的固结问题。

本文以天津新港真空预压袋装砂井软基加固工程的 $25 \times 50 \text{ m}^2$ 中间试验区作为实际算例,分别与实测资料以及堆载预压情况进行计算对比分析。图1为在宽25m的剖面上砂井分布图,由于砂井呈对称分布,故可取其一半进行计算。在计算中把砂井与土体的接触面作为透水边界处理。由于在积分方程中还有域积分项,因此还必须进行内部单元的剖分。

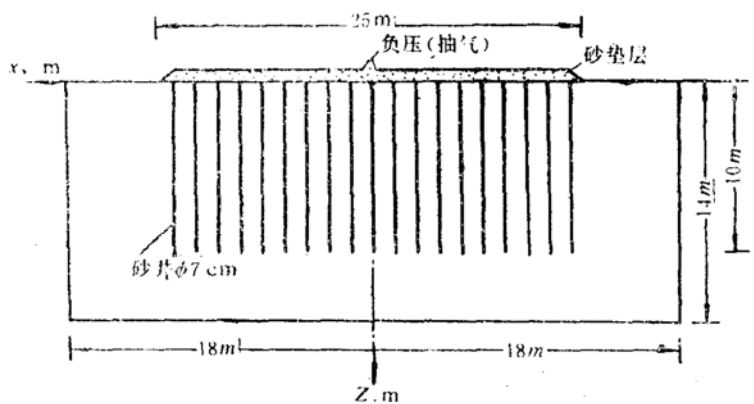


图1 天津新港真空预压软基加固 $25 \times 50 \text{ m}^2$ 试验区横剖面

在实例计算中,假设:

1. 在砂井和砂垫层内的负压同时达到一恒定值, 并始终保持不变。负压力为 78.4 kN/m^2 , 相当于 608 mm 水银柱。

2. 砂井侧壁与土体之间的剪应力为零。

图2为负压作用下40天固结的计算结果由M-160计算机绘制的整个加固区的变形分布图。图中的虚线为未变形前的单元划分线, 实线为固结变形线。从图中可见, 在负压连续分布的薄膜密封区内, 沉降分布较为平缓, 而在负压区的边缘, 沉降逐步减小。虽然在砂井区外没有负压源的存在, 但经过一段时间的固结后, 负压影响区逐渐扩大, 使得在这些区域出现了固结沉降。从沉降随深度的分布上看, 在砂井区内的固结沉降占整体沉降量的83%, 而在砂井区以下沉降只占17%。最大沉降出现在中心点而最大水平位移则出现在负压区边缘的地表上, 整个加固区均有向内收缩的变形趋势, 这说明由于土体在负压作用下孔隙水体的排出, 土体逐渐固结而呈现出以上固结变形所特有的变形特征。图3为相应于40天固结的等孔隙

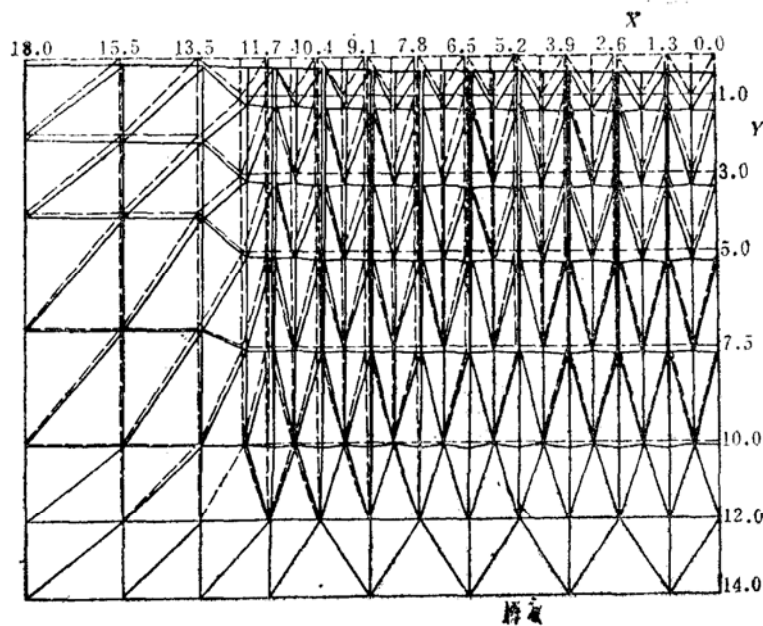


图2 负压作用下40天固结沉降分布

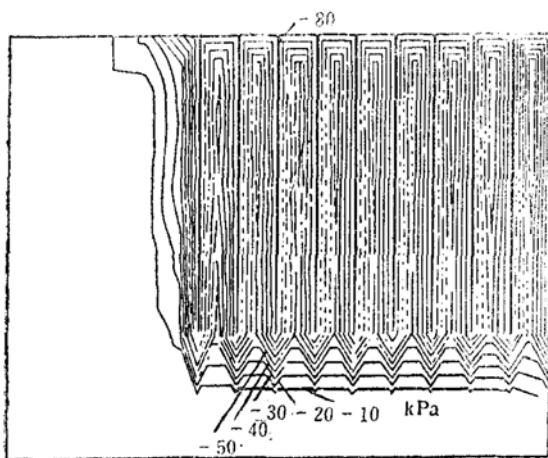


图3 负压作用下孔压分布

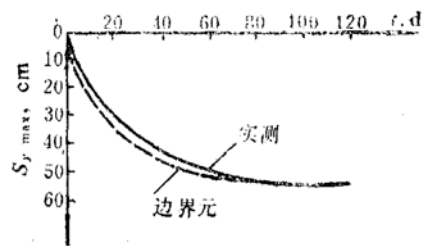


图4 中心点沉降对比曲线

水压力线分布图,从图中可见,由于两砂井之间的距离为1.3m,因此每根砂井作用的有效半径为0.65m,当每根砂井的负压力均为 P_n 时,两砂井之间的压差为零。因此,在每两根砂井之间 $r = 0.65\text{m}$ 处形成相对的对称面。在砂井区,除接近砂垫层的孔隙水出现竖向渗流外,其余各点渗流均出现在水平方向上,它们所形成的等孔隙水压力线必然平行于相对对称面,该对称面是不透水的,在该面两侧的孔隙水均向各自的砂井流动。对于砂井区以下的土体,各点受到所有砂井的影响大小不同,因而孔隙水压力分布是不对称的,在中心点处它受到各砂井的影响最大,因此负压传递的范围最深,对应的沉降也最大,然而,沉降主要是受砂井区内的沉降量控制,在砂井区内的固结度分布均匀,从而形成了如图2所示的平缓的沉降分布。

图4为实测沉降与边界元计算结果对比曲线,从整个固结变形过程看,计算结果与实测沉降是基本一致的,只是在初始段上数值解较实测值有所偏大,这是因为在计算中假设负压为一恒定值,而实际上负压是逐步升高且在固结过程中并非为一恒定值,从而造成二者的偏差。

为了把负压的计算结果与正压(即堆载)情况进行比较,本文对正压作用下地基固结问题也做了相应的计算。图5为在正压作用的初始时刻取泊松比 $\nu = 0.49$ 时计算出的典型地基形状变形图。从图中可见,在孔隙水尚未排出、体积变形为零的情况下,在压载区出现了瞬间

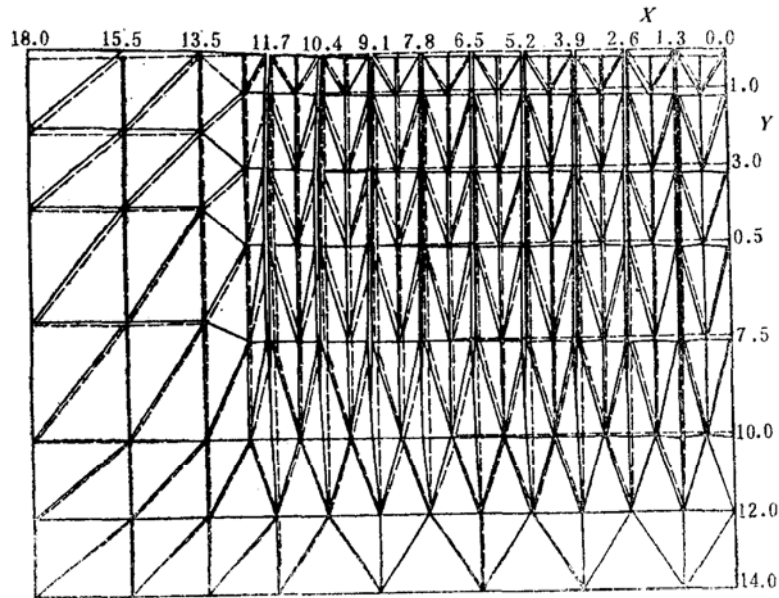


图5 堆载作用形状变形

沉降,压载区内的土体因受压而向外挤出,造成了压载区外土体的隆起。从图上可见其最大水平位移是出现在土体内部而不是地表面上。但最大水平位移也和负压作用下的一样均出现在压载区的边缘,这是因为根据计算区域垂直边界的水平位移约束条件,在对称轴及外端线上水平位移为零,在负压区内土体固结使各点均产生向内收缩变形。由于各点的位移还受到变形协调条件的控制,因此,土体内各点水平位移叠加的结果,在离对称轴最远的负压区其水平位移最大,而在负压区外因固结度减小,土的收缩变形也减小,所以最大水平位移出现在负压区的边缘。图6为负压作用40天和60天的最大水平位移分布图。同理,对于正压情形

也可由约束条件及变形协调条件得到同样的结论: 最大水平位移出现在堆载区边缘。

现在分析在这两种荷载作用下它们的水平位移特征。由图4可见, 在压载的作用下, 土体内的水平位移由形状变形造成的向外挤出而逐步转变为向内收缩, 当土体固结终止时, 形变的位移特征则转变为固结变形特征, 最大水平位移则由土体内转到地表面上。而在负压作用

下, 由图2可见, 其水平位移均为向内呈收缩状态, 并且由计算结果表明, 从初始变形至固结终止, 其水平位移均呈向内收缩的趋势, 而且最大水平位移只是出现在地表面上。由此可见, 在不同的压载作用下, 土体所出现的位移特征是不同的。从位移积分方程(13)可见, 所求解的位移场是受边界的位移和总表面力条件控制的。对于两种压力情形, 它们的边界约束条件是一致的, 只是总表面力边界条件有所不同。在负压作用下, 砂垫层边界的法向总表面力为零, 而正压作用的总表面力值即为荷载值 P , 在 P 的作用下土体出现剪切变形也就是形状变形。显然, 砂垫层边界上的法向总表面力是控制土体是否出现形状变形的一个重要因素, 因此正确地确定问题的边界条件是极其重要的。

在以上的正压计算中, 形状变形只是一种理想情况, 实际地基中的孔隙水压力不是在荷载作用下立即升高的, 而是要经过一段时间才达到荷载值, 在这段时间内, 压载区的地基附近已开始固结, 因此实际出现的形状变形特征就没有理论计算的那么明显。

为了把各种数值方法对工程实例的计算结果加以对比, 将边界元法、有限元法、差分法计算结果及实测平均固结度曲线绘于图7中。从图中可见, 以比奥固结理论为基础的有限元和边界元计算结果与实测结果基本一致, 但以太沙基固结理论为基础的差分法却与实测结果存在较大的偏差, 这主要是理论本身以及所采用的数值方法的精确度所造成的。

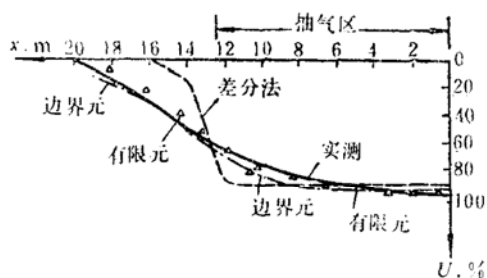


图7 平均固结度对比曲线

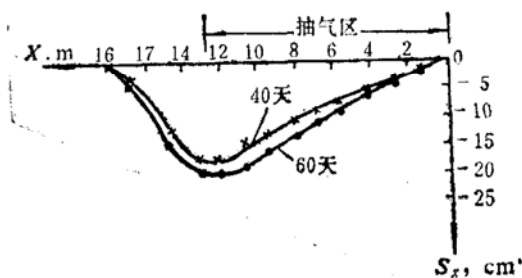


图6 负压作用下水平位移分布

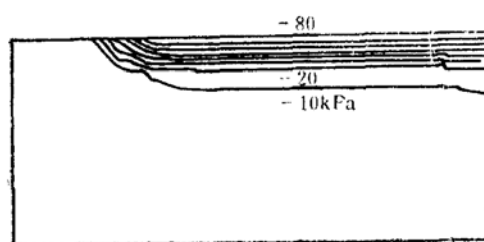


图8 无砂井地基负压作用下孔压分布

对于无砂井地基预压效果本文也做了计算对比分析, 图8为负压作用下40天的孔隙水压力分布曲线, 由计算结果, 20天负压的传递深度为1 m深, 40天传递深度为2 m深。图9为在中心点处不同深度的孔隙水压力随时间变化曲线。图10为中心点沉降随时间变化曲线。与砂井地基相比, 无砂井地基40天的中心点沉降量为0.04m, 砂井地基的沉降量为0.462m, 无砂井地基的沉降量仅仅是砂井地基的8.6%, 即使经过80天的负压作用, 无砂井地基中心点沉降也只有0.056m。由此可见, 无砂井地基的预压效果是较差的。就其沉降量而言, 也只是相当于砂井地基的砂井区以下土体的压缩沉降。图8的等孔隙水压力线分布, 相当于图3中的

砂井水平放置时的孔隙水压力分布。与砂井地基相比, 无砂井地基的预压效果只是10m长砂井地基预压效果的 $\frac{1}{10}$, 因此打设砂井的预压效果是十分理想的。

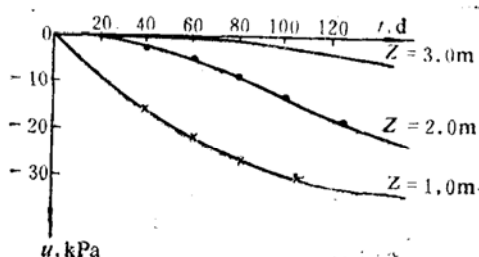


图9 中心点孔压增长曲线

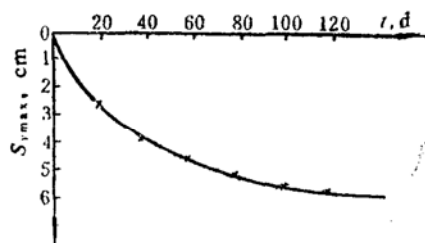


图10 中心点沉降曲线

四、结 论

1. 根据边界元法基本原理推导的线性比奥固结理论的边界积分方程, 经数值离散后是解决土体固结问题的一种十分有效的数值计算方法。工程实例的计算结果表明, 数值解与实测值及有限元计算结果基本吻合, 并具有较高的精度。

2. 由于加载方式的不同, 它所对应的总应力边界条件也不同, 它使得地基在正压作用下出现形状变形和固结变形特征, 而在负压作用下地基只有固结变形特征出现。

3. 计算结果表明, 砂井地基和无砂井地基的预压效果相差较大, 砂井区内的土体在负压作用下可以达到基本固结, 其预压效果与砂井长度成正比。对于10m深的砂井而言, 其预压效果是无砂井预压效果的10倍左右。

4. 本文的计算是在平面应变条件下以土的本构关系为线性的假设条件进行的。对于负压条件下的非线性固结计算还有待于建立负压应力应变关系后进行。

参 考 文 献

- [1] Predeleanu, M., Boundary Integral Method for Porous Media, Proceedings of the 3rd International Seminar of Boundary Element Method, 1981, p. 325.
- [2] Kuroki, T., Ito, T. and Onishi, K., Boundary Element Method in Biot's Linear Consolidation, Applied Math. Modelling, Vol. 6, 1982, p. 105.
- [3] García-Suárez, C. and Alarcón, E., Consolidation Problems, Proceedings of the 4th International Seminar of Boundary Element Method in Engineering, 1982, p. 377.
- [4] 叶柏荣、陆舜英、唐羿生、高志义, 袋装砂井——真空预压法加固软土地基, 港口工程, 1983年第1期。
- [5] Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers, 1978.

Analysis of Consolidation of Ground Installed with Sand Drains under Loading and Vacuum by Boundary Element Method

Lin Feng

(Fuzhou University)

Chen Huan

(Tianjin University)

Abstract

In this paper, the boundary element method was used for analysing the consolidation of a ground treated by sand drains and vacuum method in Tianjin Port. The boundary integral equations for Biot's linear consolidation theory were formulated and the relevant program was developed. It is found the computed results well agree with the field results. For comparison, analysis were also made using finite element method and finite difference method. The deformation features were discussed of the sand drains ground under loading and vacuum conditions. The consolidation effectiveness of the ground without sand drains was also calculated in this paper.