

用边界元法计算地下水流时 “节点多值法”在处理奇点中的应用*

谢春红 朱学愚

(南京大学)

提 要

用边界元法计算地下水流时,最令人头痛的问题就是边界值的法向导数在某些边界节点上不连续。日本的渡道忠和吉武美孝(1980年)建议采用“多重节点”方法来处理^①。但该方法要有一个试算过程,而且大量增加节点的数目。本文提出了一种新方法,我们称之为“节点多值法”。这一方法的特点就是在边界上的同一奇点,水头取一个值而水头的法向导数取几个不同的值进行计算。该方法不需要增加节点,节省内存,不要试算过程,而且精度较高。

一、问题的提出

众所周知,由格林第二公式可以得到渗流问题的边界元的基本关系式

$$\alpha_i H(M_i) = \oint_{\Gamma} \left[H \frac{\partial}{\partial n} (\ln \gamma_{MM_i}) - (\ln \gamma_{MM_i}) \frac{\partial H}{\partial n} \right] ds_M \\ + \iint_{\Omega} (\ln \gamma_{MM_i}) \cdot \Delta H dx dy \quad (1)$$

式中 M ——动点, M_i ——固定点, Ω ——渗流域, Γ ——该渗流域的边界, Δ ——拉普拉斯算子, H ——水头, n ——边界的外法线方向。

$$\alpha_i = \begin{cases} 2\pi & \text{当 } M_i \text{ 点位于区域的内部} \\ \text{边界夹角的弧度} & \text{当 } M_i \text{ 点位于边界上} \end{cases}$$

在稳定渗流的情况下,有

$$\Delta H = 0 \quad (2)$$

式(1)化为

* 中国科学院科学基金资助的课题

①渡道忠、吉武美孝,用边界单元法进行心墙滤层系统的渗流分析,渗流译文汇编,第十二辑,南京水利科学研究所,1983。

$$\alpha_i H(M_i) = \oint_{\Gamma} \left[H \frac{\partial}{\partial n} (\ln \gamma_{MM_i}) - (\ln \gamma_{MM_i}) \frac{\partial H}{\partial n} \right] ds_M \quad (3)$$

式(3)即为稳定渗流时的边界元的基本关系式,亦即该情况下的边界水头的积分方程。

若在渗流域的边界 Γ 上选择有限个点 $M_1, M_2, \dots, M_N$,顺时针方向排列,各点之间用直线段连接。近似用折线 $M_1 M_2 \dots M_N$ 代替原来的边界 Γ (图1)。每一直线段称为单元,考虑未知值的点称为节点。把公式(3)化成离散化的形式

$$\alpha_i H(M_i) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[H \frac{\partial}{\partial n} (\ln \gamma_{MM_i}) - \frac{\partial H}{\partial n} (\ln \gamma_{MM_i}) \right] ds_M \quad (4)$$

式(4)把整个边界上的线积分变为 N 个直线段上的线积分。

对于第一类边界,水头 H 是已知的。对于第二类边界,水头的一阶法向导数 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 是已知的。或者说,第一类边界节点的 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 为未知数,第二类边界节点的 H 为未知数。 N 个节点共有 N 个未知数。边界元计算时,先把固定点 M_i 放在 M_1 点,动点 M 沿节点顺时针移动,得到一个以式(4)形式表达的方程。依次把 M_i 点放在 $M_2, M_3, \dots, M_N$ 点,则得到 N 个方程。方程个数和未知数个数相符,可解出边界上各节点的水头 H 及其法向导数 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 。

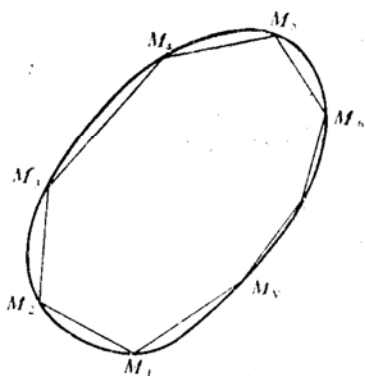


图1 边界的离散

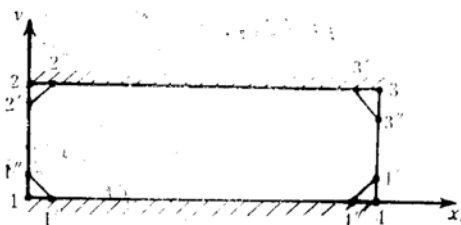


图2 水头一阶导数不连续点示意图

但是,边界上的水头 H 一般是连续的,而水头的一阶导数 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 在某些点往往不连续。考虑图2所示的一个简单问题:

$$\Delta H = 0$$

$$H = 1 \quad (x = 0, 0 \leq y \leq 1)$$

$$H = 4 \quad (x = 3, 0 \leq y \leq 1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, y = 1, 0 \leq x \leq 3)$$

(5)

显然,该定解问题(5)的解析解为 $H = x + 1$; $\frac{\partial H}{\partial x} = 1$ 。在节点2,水头值只有一个,即 $H = 1$ 。而水头的一阶法向导数值有两个,为

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 \quad \text{和} \quad \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

如果按照一般的边界元计算方法,把节点2的法向导数作为一个未知数,用边界积分方程计算该点的法向导数,结果一般不等于0。同理,节点3的法向导数值也不等于0。则用线性插值方法求得的2—3段边界水头的一阶法向导数便不等于0,与原来的定解条件

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \text{ 不符。类似地,在点1和点2的 } \frac{\partial H}{\partial n} \text{ 也不等于 } -1, \text{ 利用1, 2两点的 } \frac{\partial H}{\partial n} \text{ 进行线}$$

性插值计算求得的1—2段的流量误差也很大。渡道忠等人的计算结果表明^[1],误差可达一倍多。因此,如果不对水头 H 的一阶法向导数的奇点进行处理,可产生很大的误差。

二、方法的原理

为解决上述矛盾,渡道忠和吉武美孝采用“多重节点”方法。该法是:在奇点2附近,设计两个节点2'和2''来代替节点2。在节点2',水头 $H = 1$,而 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 未知;在节点2'', $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$,而水头 H 未知。其余的奇点1, 3, 4也作类似处理。这样原来的渗流域1 2 3 4变为1'2'2''3'3'4'4''1',渗流域缩小了。而且求得的解的数值和新节点(如2', 2''等)离原来节点(如2等)的距离有关。距离不同,解的精度也不同^[1]。最佳距离要通过计算求得。利格特(J.A.Liggett)等人的处理也与此类似^[2]。这种方法增加节点,太麻烦而且精度低。

我们提出的“节点多值法”,根据节点2的 H 是连续的,仅仅 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 不连续的特点,在同一点上的水头法向导数取两个值。一个值记为 $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+$,另一个记为 $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^-$ 。当计算1—2线段的积分时,节点2作为边界段1—2上的节点,用 $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+$ 表示该点的法向导数值。而对2—3段进行积分计算时,节点2作为2—3段上的节点,记为 $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^-$ 。计算时, $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+$ 和 $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^-$ 取不同的值。下面以非均质介质为例,详细介绍这一方法。

三、非均质介质的处理方法

对于非均质介质,可把渗流域 Ω 划分为几个区,每一区近似看作是均质的。在两个区的分界线上,不仅必须满足边界积分方程,还必须满足相容条件。即在非均质区的分界线 Γ_D 上,两区的水头相等;由一区流出的流量必须等于流入另一区的流量。相容条件可表达成如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)} &= H^{(2)} \\ T_1 \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n^{(1)}} \right) &= T_2 \left(\frac{\partial H^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $H^{(1)}$ ——I区的水头; $H^{(2)}$ ——同一点II区的水头; $n^{(1)}$ ——分界线上I区的外法线方向; $n^{(2)}$ ——II区的外法线方向。如果取

$$n^{(1)} = n$$

则

$$n^{(2)} = -n$$

于是有

$$\frac{\partial H^{(2)}}{\partial n} = -\frac{T_1}{T_2} \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n} \right) \quad (7)$$

如果采用图3的剖分方法, 对于I区有 $N^{(1)}$ 个节点位于外边界上, M 个节点位于分界线上, 一共有 $N^{(1)} + M$ 个节点。可利用式(4)进行边界积分计算。

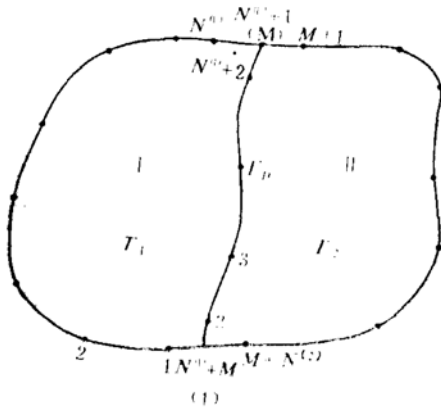


图3 非均质介质的边界元剖分

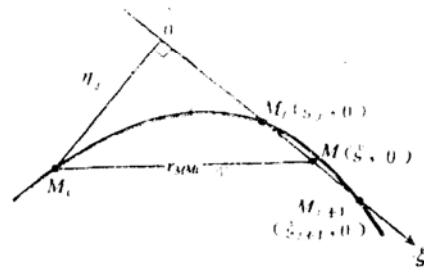


图4 局部坐标系

为了在每一边界单元 Γ_i (即 $M_i M_{i+1}$)上进行积分计算, 引进了局部坐标系 $\xi - \eta$ (图4)。 ξ 轴沿着 M_i 和 M_{i+1} 两点的连线; 在固定点 M_i 作 ξ 轴的垂线为 η 轴, 垂足 O 为原点。 η 轴的正向指向边界的外法线方向, 外边界上的节点顺时针编号, ξ 轴的正向为编号增加的方向。在每一单元上, 假定水头 H 及其法向导数为线性变化。经一系列推导后求得

$$\begin{aligned} \alpha_i H_i^{(1)} &= \sum_{j=1}^{N^{(1)}+M} \left[(-I_{11}^{ij} + \xi_{j+1} I_{12}^{ij}) H_j^{(1)} + (I_{11}^{ij} - \xi_j I_{12}^{ij}) H_{j+1}^{(1)} \right] \\ &- \sum_{j=1}^{N^{(1)}+M} \left[(-I_{21}^{ij} + \xi_{j+1} I_{22}^{ij}) \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n} \right)_j + (I_{21}^{ij} - \xi_j I_{22}^{ij}) \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n} \right)_{j+1} \right] \\ i &= 1, 2, 3, \dots, N^{(1)} + M \end{aligned} \quad (8)$$

对于区域II, 内边界节点是和区域I共用的, 故也是 M 个, 外边界剖分为 $N^{(2)}$ 个节点, 共有 $N^{(2)} + M$ 个节点, 考虑到相容条件, 有

$$\sum_{j=1}^M \left[(-I_{11}^{ij} + \xi_{j+1} I_{12}^{ij}) H_j^{(1)} + (I_{11}^{ij} - \xi_j I_{12}^{ij}) H_{j+1}^{(1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^M \left[\left(-I_{21}^{ij} + \xi_{j+1} I_{22}^{ij} \right) \left(-\frac{T_1}{T_2} \right) \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n} \right)_j + \left(I_{21}^{ij} - \xi_j I_{22}^{ij} \right) \left(-\frac{T_1}{T_2} \right) \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n} \right)_{j+1} \right] \\
& + \sum_{j=M+1}^{M+N^{(2)}} \left[\left(-I_{11}^{ij} + \xi_{j+1} I_{12}^{ij} \right) H_j^{(2)} + \left(I_{11}^{ij} - \xi_j I_{12}^{ij} \right) H_{j+1}^{(2)} \right] \\
& - \sum_{j=M+1}^{M+N^{(2)}} \left[\left(-I_{21}^{ij} + \xi_{j+1} I_{22}^{ij} \right) \left(\frac{\partial H^{(2)}}{\partial n} \right)_j + \left(I_{21}^{ij} - \xi_j I_{22}^{ij} \right) \left(\frac{\partial H^{(2)}}{\partial n} \right)_{j+1} \right] \\
& = \begin{cases} \alpha_i H_i^{(1)} & (i = N^{(1)} + M, N^{(1)} + M - 1, \dots, N^{(1)} + 1) \\ \alpha_i H_i^{(2)} & (i = M + 1, M + 2, M + 3, \dots, M + N^{(2)}) \end{cases} \quad (9)
\end{aligned}$$

上两式中

$$I_{11}^{ij} = \frac{1}{2} \eta_j \frac{\ln \frac{\eta_j^2 + \xi_{j+1}^2}{\eta_j^2 + \xi_j^2}}{\xi_{j+1} - \xi_j} \quad (10)$$

$$I_{12}^{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\xi_{j+1} - \xi_j} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\xi_{j+1}}{\eta_j} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j} \right) \right] & (\eta_j \neq 0) \\ 0 & (\eta_j = 0) \end{cases} \quad (11)$$

$$I_{21}^{ij} = \frac{1}{4(\xi_{j+1} - \xi_j)} \left\{ (\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2) [\ln(\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2) - 1] - (\xi_j^2 + \eta_j^2) [\ln(\xi_j^2 + \eta_j^2) - 1] \right\} \quad (12)$$

$$I_{22}^{ij} = \frac{1}{2(\xi_{j+1} - \xi_j)} \left\{ \xi_{j+1} \ln(\xi_{j+1}^2 + \eta_j^2) - \xi_j \ln(\xi_j^2 + \eta_j^2) - 2(\xi_{j+1} - \xi_j) + 2\eta_j \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\xi_{j+1}}{\eta_j} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j} \right) \right] \right\} \quad (13)$$

对于外边界节点, H 或 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 中总有一个是已知的, 共有 $N^{(1)} + N^{(2)}$ 个未知数, 在内边界

Γ_D 上, H 和 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 都是未知数, 共有 $2M$ 个。故总共有 $N^{(1)} + N^{(2)} + 2M$ 个未知数。公式(8)、(9)的方程个数正好也是 $N^{(1)} + N^{(2)} + 2M$ 个。故可求得唯一的解。

在非均质区的分界线和外边界的交点上以及第一类边界和隔水边界的相交处出现奇异性, 这些节点上的水头 H 是连续的, 但 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 不连续。如图3中的 $N^{(1)+1}$ 点(对于区域Ⅱ来说是第 M 点)和 $N^{(1)+M}$ 点(对于区域Ⅱ来说是第1点), 用“节点多值法”来处理, 可取得较好的效果。

四、算 例

下面举例说明, 并与解析解进行比较, 见图5。

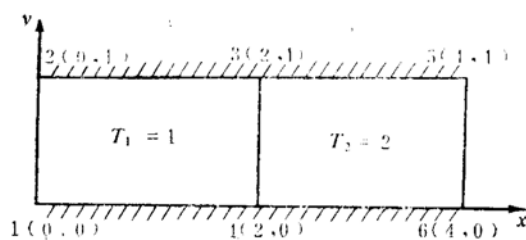


图5 “节点多值法”的算例

定解条件和相容条件如下:

$$\begin{aligned}
 \Delta H &= 0 & (0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1) \\
 \frac{\partial H}{\partial n} &= 0 & (0 < x < 4, y = 0) \\
 \frac{\partial H}{\partial n} &= 0 & (0 < x < 4, y = 1) \\
 H &= 0 & (x = 0, 0 \leq y \leq 1) \\
 H &= 3 & (x = 4, 0 \leq y \leq 1) \\
 H^{(1)} &= H^{(2)} & (x = 2, 0 \leq y \leq 1) \\
 \frac{\partial H^{(2)}}{\partial n} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial n} \right) & (x = 2, 0 \leq y \leq 1)
 \end{aligned} \tag{14}$$

先对 I 区进行计算。节点的布置和各节点的坐标见图 5。由图中可知

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

先把固定点 M_i 放在 1 点, 此时, $i = 1$ 。

当 $j = 1$ 时, 有 $\xi_j = 0$, $\xi_{j+1} = 1$, $\eta_j = 0$

代入式(10)~(13)得

$$I_{11}^{11} = 0; I_{12}^{11} = 0; I_{21}^{11} = -0.25; I_{22}^{11} = -1。$$

当 $j = 2$ 时, 有 $\xi_j = 0$, $\xi_{j+1} = 2$, $\eta_j = 1$ 。得

$$I_{11}^{12} = 0.402360; I_{12}^{12} = 0.553574;$$

$$I_{21}^{12} = 0.505899; I_{22}^{12} = 0.358294。$$

当 $j = 3$ 时, 有 $\xi_j = -1$, $\xi_{j+1} = 0$, $\eta_j = 2$ 。得

$$I_{11}^{13} = -0.223144; I_{12}^{13} = 0.463648;$$

$$I_{21}^{13} = -0.375504; I_{22}^{13} = 0.732015。$$

当 $j = 4$ 时, 有 $\xi_j = -2$, $\xi_{j+1} = 0$, $\eta_j = 0$ 。得

$$I_{11}^{14} = 0; I_{12}^{14} = 0$$

$$I_{21}^{14} = -0.193147; I_{22}^{14} = -0.306853。$$

此外,根据边界条件有

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_1^- = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^- = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^- = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^- = 0$$

将上述结果代入式(8),经整理后得

$$\begin{aligned} &0.750000\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_1^+ + 0.250000\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+ - 0.375504\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^+ \\ &- 0.356511\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^+ + 0.625504H_3 + 0.240504H_4 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

然后,分别取 $i = 2, 3, 4$, 求得相应的方程。

对于Ⅱ区,先把 M_i 点放在 4 点,此时, $i = 1$ 。

当 $j = 1$ 时, $\xi_j = 0$, $\xi_{j+1} = 1$, $\eta_j = 0$ 。得

$$\begin{aligned} I_{11}^{11} &= 0; & I_{12}^{11} &= 0; \\ I_{21}^{11} &= -0.250000; & I_{22}^{11} &= -1.000000。 \end{aligned}$$

类似地,可求得 $I_{11}^{12}, I_{12}^{12}, I_{21}^{12}, I_{22}^{12}, I_{11}^{13}, I_{12}^{13}, I_{21}^{13}, I_{22}^{13}, I_{11}^{14}, I_{12}^{14}, I_{21}^{14}, I_{22}^{14}$ 的值。并且有

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^- = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^- = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_5^- = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_6^- = 0$$

将上述结果代入式(9),经整理后得

$$\begin{aligned} &0.125000\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^+ + 0.375000\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^+ - 0.704788H_3 + 1.570796H_4 \\ &+ 0.375504\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_5^+ + 0.356511\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_6^+ = 2.598024 \end{aligned}$$

然后,依次把 M_i 点放在 3, 5, 6 点,得到相应的方程。

把Ⅰ区和Ⅱ区的方程归并,并写成矩阵形式,如式(18)。

解上述线性方程组,得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_1^+ &= -1.00000167; & \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+ &= -1.00000167; \\ \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^+ &= 1.00000107; & \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^+ &= 1.00000119; \\ \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_5^+ &= 0.49999818; & \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_6^+ &= 0.49999776; \\ H_3 &= 2.00000167; & H_4 &= 2.00000167。 \end{aligned}$$

由相容条件,对于Ⅱ区有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H^{(2)}}{\partial n^{(2)}}\right)_3^+ &= \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^+ \left(-\frac{1}{2}\right) = -0.50000054; \\ \left(\frac{\partial H^{(2)}}{\partial n^{(2)}}\right)_4^+ &= \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^+ \left(-\frac{1}{2}\right) = -0.50000060。 \end{aligned}$$

该问题的解析解为

(18)									
=									
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_1^+$	0.750000	0.250000	-0.375504	-0.356511	0.625504	0.240504	0	0	0
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+$	0.250000	0.750000	-0.356511	-0.375504	0.240504	0.625504	0	0	0
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^+$	-0.375504	-0.356511	0.750000	0.250000	-1.570796	0.704788	0	0	0
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^+$	-0.356511	-0.375504	0.250000	0.750000	0.704788	-1.570796	0	0	0
H_3	0	0	0.125000	0.375000	-0.704788	1.570796	0.375504	0.356511	2.598024
H_4	0	0	0.375000	0.125000	1.570796	-0.704788	0.356511	0.375504	2.598024
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_5^+$	0	0	0.178256	0.187752	0.240504	0.625504	0.750000	0.250000	2.598024
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_6^+$	0	0	0.187752	0.178256	0.625504	0.240504	0.250000	0.750000	2.598024

$$H = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}x + 1 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad (19)$$

现将“节点多值法”边界元和分析解的计算结果，列表比较如下：

表 1

计 算 项 目	解 析 解	边 界 元 解	差 值
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_1^+$	-1.00000000	-1.00000167	-0.00000167
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_2^+$	-1.00000000	-1.00000167	-0.00000167
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_3^+$	1.00000000	1.00000107	+0.00000107
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_4^+$	1.00000000	1.00000119	+0.00000119
H_3	2.00000000	2.00000167	+0.00000167
H_4	2.00000000	2.00000167	+0.00000167
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_5^+$	0.50000000	0.49999818	-0.00000182
$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_6^+$	0.50000000	0.49999776	-0.00000224

由表中所列的结果可见，两者是相当符合的。

参 考 文 献

- [1] 边际，边界单元法在地下水稳定流计算中的初步应用，工程勘察，1984年第3期。
 [2] Liggett, J.A. and Liu, P. L-F., The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow, George Allen & Unwin, 1983, London.

Application of "Node-multivalue Method" to Treating of Singularities in The Boundary Element Method for Groundwater Flow

Xie Chunhong and Zhu Xueyu

(Nanjing University)

Abstract

When the boundary element method is used to compute the steady flow of groundwater, one of the most difficult problems is the discontinuity of the normal

derivative of groundwater head at some boundary nodes. A multiple nodes method was proposed by Japanese scientists Watamechi Chew et al in 1980, but the trial-and-error procedure is used and the nodal points must be increased in this method.

A new method is proposed in this paper which is called "Node-multivalued Method". As compared with preceding one neither the nodes must be increased nor the trial-and-error procedure is needed, and a high accuracy could be achieved in this method.