

砂井地基固结的空间渗流和群井效应的解析分析

房莹光

(广东工学院土木工程系, 广州, 510090)

文 摘 本文从 Terzaghi-Rendulic 三维固结方程出发, 对砂井地基固结的空间渗流和群井效应作了分析。文中给出的砂井地基固结的解析解可考虑群井共同作用、空间渗流和井阻作用, 满足软土的上下边界条件、各砂井中的连续和井阻条件。文末作了数值计算, 讨论了空间渗流和群井效应对砂井地基中的孔隙水压力消散及地基固结的影响。

关键词 砂井, 地基固结, 解析解, 空间渗流, 群井效应。

1 引 言

砂井预压排水固结法是处理软土地基的一种行之有效的方法。目前在砂井地基固结的解析分析中, 把它等效为单一砂井的轴对称径向排水固结的情况来处理^[1,2]。这种分析方法虽在砂井工程中广泛应用, 但是一种近似分析法^[3], 在一些情况下可能引起较大的计算误差。实际上, 排水砂井按一定的分布规律以砂井群形式施工于软土地基中, 砂井之间相互作用, 砂井排水是非轴对称的, 在地面附近的竖向排水作用比较明显。因此, 现有的砂井地基固结的解析理论有待于改进和完善。

为此, 本文利用 Terzaghi-Rendulic 三维固结方程, 由解析法给出了砂井地基固结的严格解析结果, 所给出的解析解满足三维固结方程、初始条件、软土的上下边界条件及各砂井中的连续和井阻条件。把文中的结果与现有的结果^[1,2]比较, 讨论了砂井地基固结的空间渗流和群井效应, 由数值结果给出了超静孔隙水压力的分布和地基的平均固结度的对比曲线。

2 砂井地基三维固结方程的解析解

2.1 三维固结方程及定解条件

排水砂井的平面分布见图 1 所示, 砂井地基的纵向剖面图见图 2。软土的竖向和水平渗透系数分别为 k_v 和 k_h , 第 i 个砂井的直径为 d_{w_i} , 井料的渗透系数为 k_{w_i} , 地面瞬时施加均布荷载 p_0 。为便于讨论, 取图示的总体坐标 (x, y, z) 和局部坐标 (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), N 为砂井的数目。从实用上看, 可不计土体总应力随时间的变化影响^[4]。因此, 砂井地基

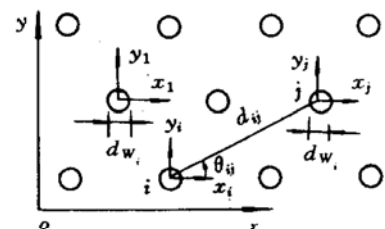


图 1 地基砂井平面分布图

固结应满足 Terzaghi - Rendulic 固结方程^[3], 以及各砂井中的流量连续方程。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_h \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right) + c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 p_{w_i}}{\partial z^2} = - \frac{k_h}{\pi r_{w_i} k_{w_i}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial r_i} \bigg|_{r=s_i} d\theta_i \quad (2)$$

式中 $p, p_{w_i} (i=1, 2, 3, \dots, N)$ 为土体和第 i 个砂井中的孔隙水压力; c_h, c_v 分别为水平和竖向固结系数; s_i 为第 i 个砂井的井周边界。方程定解条件为如下的边界条件、初始条件和连续条件:

$$p|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \bigg|_{z=H} = 0, \quad p|_{t=0} = p_0 \quad (3)$$

$$p|_{r=s_i} = p_{w_i}, \quad p_{w_i}|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p_{w_i}}{\partial z} \bigg|_{z=H} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

另外, 在无穷远处应满足收敛条件, 即 $r \rightarrow \infty$ 时 p 的值为有限。

2.2 三维固结方程的求解

由式(1)可把土体中的超静孔隙水压力的 Laplace 变换形式的解表示为

$$\begin{aligned} \bar{p} = \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn}^i \cos n\theta_i + B_{mn}^i \sin n\theta_i) K_n(\lambda r_i) \sin \frac{2m+1}{2H} \pi z \\ + \frac{4p_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta_0(m)}{(2m+1)} \sin \frac{(2m+1)}{2H} \pi z \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{式中} \quad \bar{p} = \int_0^{\infty} p e^{-\eta t} dt \quad (6)$$

A_{mn}^i, B_{mn}^i 为待定常数; $\eta_0(m) = \frac{1}{(2m+1)^2 \pi^2 c_v} + \eta$, η 为 Laplace 变换参数; $K_n(\cdot)$ 为第二类变

型 Bessel 函数; $\lambda = \sqrt{(\eta + \beta^2)/c_h}$; $\beta = \frac{2m+1}{2H} c_v$ 。

由式(5)表示的解满足三维固结方程(1)和定解条件(3)以及无限远的收敛条件。为了确定待定常数 A_{mn}^i, B_{mn}^i , 并使式(2)和式(4)得到满足, 我们利用广义 Graf 加法公式, 把解的表达式(5)变换成由第 j 个局部坐标表示的解。Graf 加法公式表示如下^[5]:

$$J_\nu(\bar{\omega}) \left\{ \frac{Z - ze^{-i\varphi}}{Z - ze^{i\varphi}} \right\}^{\nu/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{\nu+k}(Z) J_k(z) e^{ik\varphi} \quad (7)$$

式中 Z, z 是任意复数; $\bar{\omega} = [Z^2 + z^2 - 2Zz \cos \varphi]^{1/2}$, 且 $|ze^{\pm i\varphi}| < |Z|$, $z \rightarrow 0$ 时, $\bar{\omega} \rightarrow +Z$, $J_\nu(\cdot)$ 为 Bessel 函数。这里, 我们取 $Z = id_{ij}, z = ir_j$, 则 $\bar{\omega} = ir_i, r_i = [d_{ij}^2 + r_j^2 - 2d_{ij}r_j \cos \varphi]^{1/2}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$; d_{ij}, r_j 为实数。且当 $|d_{ij}| > |r_j|$ 时, 满足 $|ze^{\pm i\varphi}| < |Z|$ 。由式(7)可得

$$J_\nu(ir_i) \left\{ \frac{d_{ij} - r_j e^{-i\varphi}}{d_{ij} - r_j e^{i\varphi}} \right\}^{\nu/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{\nu+k}(id_{ij}) J_k(ir_j) e^{ik\varphi} \quad (8)$$

从坐标转换参考图 3 可知

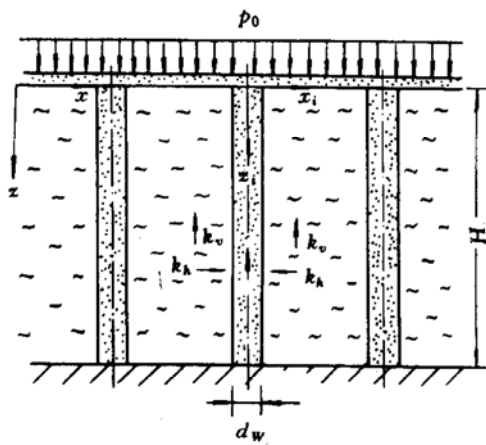


图2 地基纵向剖面图

$$\left. \begin{aligned} r_i \cos \psi &= d_{ij} - r_j \cos \varphi \\ r_i \sin \psi &= r_j \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

且

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \theta_i - \theta_j \\ \varphi &= \theta_{ij} + \pi - \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

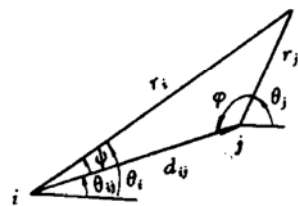


图3 坐标转换参考图

由式(8)~(10)可得 $\nu = n$ 时的广义 Graf 加法公式

$$K_n(\lambda r_i) \begin{Bmatrix} \cos n \theta_i \\ \sin n \theta_i \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(\lambda r_j) \begin{Bmatrix} P_{n,k}^{ij} \cos k \theta_j + Q_{n,k}^{ij} \sin k \theta_j \\ R_{n,k}^{ij} \cos k \theta_j + S_{n,k}^{ij} \sin k \theta_j \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_{n,k}^{ij} &= (-1)^k \epsilon_k / 2 [K_{n+k}(\lambda d_{ij}) \cos(n+k) \theta_{ij} + K_{n-k}(\lambda d_{ij}) \cos(n-k) \theta_{ij}] \\ Q_{n,k}^{ij} &= (-1)^k \epsilon_k / 2 [K_{n+k}(\lambda d_{ij}) \sin(n+k) \theta_{ij} - K_{n-k}(\lambda d_{ij}) \sin(n-k) \theta_{ij}] \\ R_{n,k}^{ij} &= (-1)^k \epsilon_k / 2 [K_{n+k}(\lambda d_{ij}) \sin(n+k) \theta_{ij} + K_{n-k}(\lambda d_{ij}) \sin(n-k) \theta_{ij}] \\ S_{n,k}^{ij} &= (-1)^k \epsilon_k / 2 [-K_{n+k}(\lambda d_{ij}) \cos(n+k) \theta_{ij} + K_{n-k}(\lambda d_{ij}) \cos(n-k) \theta_{ij}] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\epsilon_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

把式(11)代入式(5)可得由局部坐标 (r_j, θ_j, z) 表示的超静孔隙水压力表达式

$$\begin{aligned} \tilde{p}(r_j, \theta_j, z, \eta) &= \frac{4p_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta_0(m)}{2m+1} \sin \frac{(2m+1)}{2H} \pi z + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ [A_{mn}^j \cos n \theta_j + B_{mn}^j \sin n \theta_j] K_n(\lambda r_j) \\ &+ \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{k=0}^{\infty} I_k(\lambda r_j) [A_{mn}^i (P_{n,k}^{ij} \cos k \theta_j + Q_{n,k}^{ij} \sin k \theta_j) + B_{mn}^i (R_{n,k}^{ij} \cos k \theta_j \\ &+ S_{n,k}^{ij} \sin k \theta_j)] \} \sin \frac{2m+1}{2H} \pi z \end{aligned} \quad (14)$$

把式(14)代入式(2)可得

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{w_j} &= \frac{8H^2 k_h}{\pi^2 r_{w_j} k_{w_j}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left[\frac{4p_0 \eta_0(m)}{\pi} \frac{1}{2m+1} + A_{m0}^j K_0'(\lambda r_{w_j}) + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{n=0}^{\infty} I_0'(\lambda r_{w_j}) \right. \\ &\times (A_{mn}^i P_{n,0}^{ij} + B_{mn}^i R_{n,0}^{ij}) \left. \right] \sin \frac{2m+1}{2H} \pi z \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)满足了定解条件(4)中第2,3式,把式(14)、(15)代入定解条件(4)第1式时可得确定待定常数 A_{mn}^i, B_{mn}^i 的代数方程

$$\begin{aligned} \alpha_{mkj} K_0'(\lambda r_{w_j}) A_{m0}^j + K_k(\lambda r_{w_j}) A_{mk}^j + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{n=0}^{\infty} \{ [I_k(\lambda r_{w_j}) P_{n,k}^{ij} \\ + \alpha_{mkj} I_0'(\lambda r_{w_j}) P_{n,0}^{ij}] A_{mn}^i + [I_k(\lambda r_{w_j}) R_{n,k}^{ij} + \alpha_{mkj} I_0'(\lambda r_{w_j}) R_{n,0}^{ij}] B_{mn}^i \} = D_{mkj} \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_k(\lambda r_{w_j}) B_{mk}^j + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{n=0}^{\infty} I_k(\lambda r_{w_j}) [A_{mn}^i Q_{n,k}^{ij} + B_{mn}^i S_{n,k}^{ij}] = 0 \quad (17)$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, N$;

$$\alpha_{mkj} = \begin{cases} -\frac{8H^2 k_h}{(2m+1)^2 \pi^2 r_{w_j} k_{w_j}} & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$D_{mkj} = \begin{cases} \frac{4p_0\eta_0(m)}{(2m+1)\pi} \left[\frac{8H^2k_h}{(2m+1)^2\pi^2 r_{Wj}k_{Wj}} - 1 \right] & k=0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

$$(K_0'(\lambda r_{Wj}), I_0'(\lambda r_{Wj})) = \frac{\partial}{\partial r_j} (K_0(\lambda r_j), I_0(\lambda r_j)) \Big|_{r_j=r_{Wj}} \quad (20)$$

由式(16)、(17)求得常数 A_{mn}^i, B_{mn}^i 后代回式(5)或式(14)作 Laplace 逆变换即可得到满足全部定解条件的精确解。

3 解的简化及数值实施方法

在实际工程中,砂井在平面上按一定的规律排列(例如正方形或正三角形排列),且各砂井的参数(如 r_{Wj}, k_{Wj} 等)相同,因此,由式(18)~(20)可知

$$\alpha_{mkj} = \alpha_{mk}, \quad D_{mkj} = D_{mk} \quad (j=1,2,\dots,N) \quad (21)$$

α_{mk}, D_{mk} 由式(18)、(19)中的 r_{Wj}, k_{Wj} 换成 r_W, k_W 得到。

在式(16)、(17)中对每个固定的 j (如 $j=i_0, i_1$ 等)关于 i 的求,我们按图4的实线或虚线箭头所示的序数顺序求和(图中以正方形排列的砂井为例)时,参考图1和图3,由式(12)可知,对于大面积预压 $N \rightarrow \infty$ 时,有

$$(P_{n,k}^{ii_0}, R_{n,k}^{ii_0}, Q_{n,k}^{ii_0}, S_{n,k}^{ii_0}) = (P_{n,k}^{ii_1}, R_{n,k}^{ii_1}, Q_{n,k}^{ii_1}, S_{n,k}^{ii_1}) \quad (22)$$

由式(16)、(17)、(21)、(22)可得

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}^1 &= A_{mn}^2 = \dots A_{mn}^N = A_{mn} \\ B_{mn}^1 &= B_{mn}^2 = \dots B_{mn}^N = B_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

常数 A_{mn}, B_{mn} 由下式求得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mk} K_0'(\lambda r_W) A_{m0} K_k(\lambda r_W) A_{mn} + \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n,k} A_{mn} + R_{n,k} B_{mn}] &= D_{mk} \\ K_k(\lambda r_W) B_{mk} + \sum_{n=0}^{\infty} [Q_{n,k} A_{mn} + S_{n,k} B_{mn}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中 $k, m=0,1,2,\dots$, 且

$$\left. \begin{aligned} P_{n,k} &= \sum_{i=1}^N [I_k(\lambda r_W) P_{n,k}^{ii_0} + \alpha_{mk} I_0'(\lambda r_W) P_{n,0}^{ii_0}] \\ R_{n,k} &= \sum_{i=1}^N [I_k(\lambda r_W) R_{n,k}^{ii_0} + \alpha_{mk} I_0'(\lambda r_W) R_{n,0}^{ii_0}] \\ Q_{n,k} &= \sum_{i=1}^N I_k(\lambda r_W) Q_{n,k}^{ii_0} \\ S_{nk} &= \sum_{i=1}^N I_k(\lambda r_W) S_{n,k}^{ii_0} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)中关于 i 的求和按图4所示的实线箭头顺序求和。经过上述的讨论,对大面积砂井预

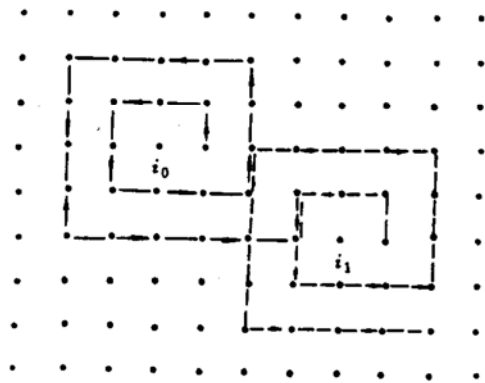


图4 求和序数顺序

压的情况,确定解的待定常数的代数方程简化为式(24)。对式(5)的逆变换采用 Durbin^[6]的数值 Laplace 逆变换的方法实施。

4 数值计算结果

笔者对本文给出的严格的解析解作了数值计算,并把所得结果与现有的解析结果^[1,2]进行比较,讨论了砂井地基固结的空间渗流和群井效应,并给出了超静孔隙水压力的分布及地基平均固结度的各对比曲线(图 5~7)。计算中假定砂井按正方形排列,间距为 1.5m,土层厚度 $H=8\text{m}$, $k_h/k_v=4$ 。与软土厚度 H 相比,堆载预压面积很大,其他参数由图中给出。文中的平均孔隙水压力和平均固结度是影响域($r_e=0.564a$ 圆域, a 为砂井间距)内的平均值,图中 $T_r=c_h t/4r_e^2$, $n=r_e/r_w$, $G=k_h H^2/4k_w r_e^2$ 。

图 5 和 6(a)是本文与文献[1]的孔隙水压力分布和平均固结度的对比曲线,而图 6(b)~7 是本文与文献[2]的平均孔隙水压力分布和平均固结度的对比曲线。文献[1]给出的解是等效单一砂井轴对称径向固结的解析解,忽略了空间渗流和群井的相互作用。在地表附近竖向渗流比较明显,地表邻近两者的孔隙水压力的对比,可衡量空间渗流效应;而软土底层附近竖向渗流小,底层附近两者孔隙水压力的对比可衡量群井效应。从给出的结果可见,砂井地基固结的空间渗流和群井效应不可忽视。

文献[2]把砂井地基等效为单一砂井情况,给出了满足上下排水边界条件、井阻条件并考虑涂抹作用的解析解,比文献[1]的解更加完善。但单一砂井的等效分析方法难于全面完善地考虑空间渗流和群井效应。从图 7 可见,排水砂层(地表)附近本文的平均孔隙水压力消散比文献[2]的快些,这是竖向排水效应所致;而软土底层(非排水层)附近本文的平均孔隙水压力的消散比文献[2]的慢些,这是群井相互作用所致。图 6 是综合衡量空间渗流和群井效应的平均固结度,从图中可见,本文的平均固结度比文献[1]的更大,而与文献[2]的结果比较接近。计算表明,在式(25)中取 $N=8$ 或 24(即考虑邻近的一至两排砂井的相互作用)时,数值结果有足够的精度。

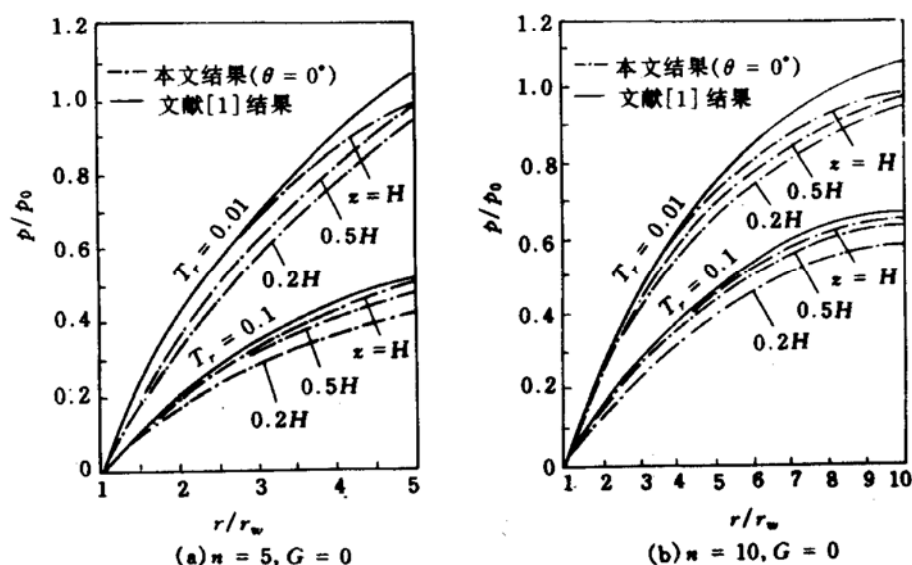


图 5 孔隙水压力径向分布

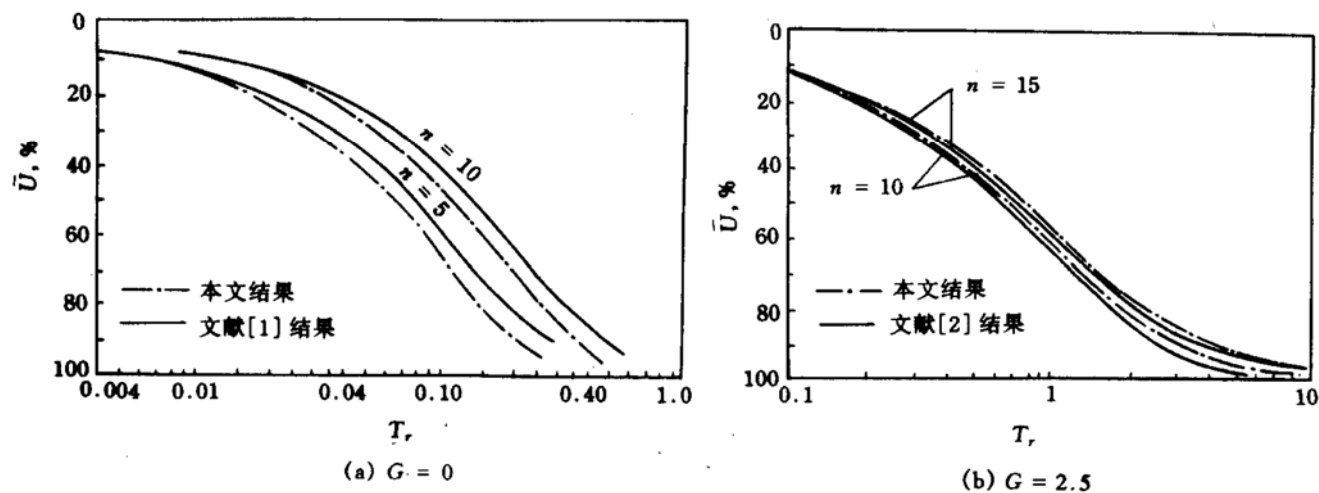


图6 地基平均固结度

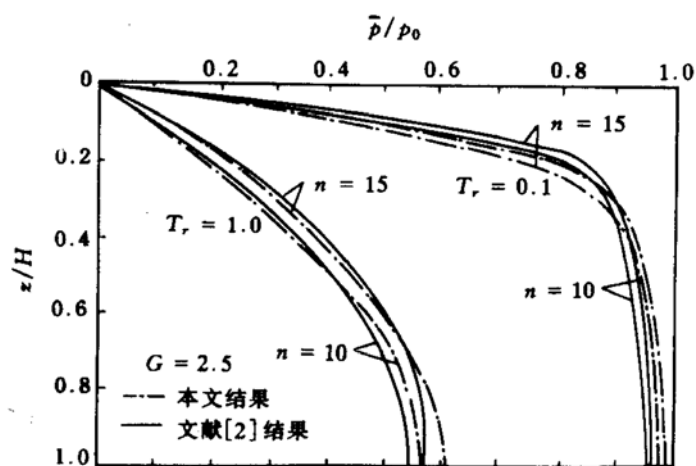


图7 平均孔隙水压力竖向分布

5 结 论

(1) 本文对砂井地基固结给出的解析分析,可考虑空间渗流、群井效应和井阻作用对孔隙水压力的消散及地基固结度的影响。

(2) 空间渗流作用加快孔隙水压力的消散,增加固结速度。

(3) 文献[2]的单一砂井等效分析结果与本文的结果(考虑群井效应)相比时,群井效应使孔隙水压力消散有所减慢。

(4) 由平均固结度衡量空间渗流和群井效应时,与文献[1]相比,空间渗流和群井效应加速地基固结,与文献[2]相比,空间渗流和群井效应对地基固结稍有减缓,但两者结果接近。

参 考 文 献

- 1 Barron R A. Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Wells. Trans. ASCE, 1948, 113:718~742.
- 2 曾国熙,谢康和. 砂井地基固结理论的新发展. 见:中国土木工程学会第五届土力学及基础工程学术会议论文选集. 北京:中国建筑工业出版社,1987.471~478.

- 3 朱百里,沈珠江.计算土力学.上海科学技术出版社,1990.100~106,112~113.
- 4 赵维炳.砂井地基固结分析半解析方法的改进.岩土工程学报,1991,13(4):51~58.
- 5 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论.北京:科学出版社,1979.436~439.
- 6 Durbin F. Numerical Inversion of Laplace Transform: An Effect Improvement to Dubner and Abate's Method. The Computer Journal, 1974,17:371~376.

Analysis for the Effect of 3-D Seepage and Sand Drain Group on Consolidation of Foundation

Fang Ying-guang

(Dept. of Civil Engineering, Guangdong Institute of Technology, Guangzhou, 510090)

Abstract Analysis for the effect of 3-D seepage and sand drain group on consolidation of foundation is performed with Terzaghi-Rendulic's 3-D consolidation equation in this paper. Analytical solution which takes into account the effect of the interaction between sand drains, 3-D seepage and well resistance, and satisfies the drainage condition on the top and bottom boundary of the soil as well as the flow continuous and well resistance conditions of each sand drain is presented. The effect of 3-D seepage and sand drain group on the pore pressure dissipation and foundation consolidation is also discussed through numerical computation.

Key words sand drains, consolidation of foundation, analytical solution, effect of 3-D seepage, drain group.

本刊特辟博士简介专栏启事

为向海内外读者介绍我国岩土工程界新秀、博士学位获得者,本刊从1995年起,每年第6期集中介绍一年来获得博士学位人员简况。凡从事岩土工程研究而获得博士学位者,请自行草拟简介文稿,寄来本部。内容包括:博士论文选题,文摘(限500字),以及姓名,性别,出生年月,获得学位年月,学位授予单位,现在供职单位,技术职称及简历,博士生导师姓名、单位等。

因版面所限,对1993年以前(含1993年)获得博士学位者,介绍简况时文摘从略。

[注]1. 第一批简介文稿已于1995年第6期刊出。

2. 本栏目的文稿不收取费用。

(本刊编辑部)