

地下水不稳定渗流达西速度计算新方法

谢春红 赵文良 张天岭

(南京大学数学系, 210008)

丁家平

(南京水利科学研究院水工所, 210029)

1 前言

在水资源评价和地下水污染质运移研究中, 地下水流速的计算是非常重要的。传统的方法是从二阶不稳定渗流方程出发, 求出地下水头分布, 然后用达西定律按差分法或有限元法求出达西速度^[2]。用这种古典方法求出地下水达西速度, 相对误差一般达20~30%, 并且在理论上存在局部质量不守恒问题^[1], 特别在水头变化较大地区, 误差更大。本文直接从达西定律和质量守恒定律出发, 进行离散, 得到以各点水头和地下水达西速度为未知数的联立代数方程组, 同时求出各点水头和达西速度, 而且在每个单元上质量是守恒的。此法亦称为混合有限元法^[1]。模型试算与解析相比较, 达西速度相对误差仅为3%, 其精度较古典方法提高了近10倍。同时, 本文所提供的迭代方法具有占用内存小, 速度快的优点。

2 二维不稳定渗流的混合有限元法

众所周知, 二维地下水非稳定渗流问题的微分方程为

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] = f \quad (1)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$h(x, y, t) = g(x, y, t), (x, y) \in \partial\Omega, t > 0 \quad (3)$$

式中 $h(x, y, t)$ 为水头; T_x, T_y 分别为 x, y 方向的导水系数; $h_0(x, y), g(x, y, t)$ 为给定的函数; Ω 为渗流区域; $\partial\Omega$ 为区域边界; S 为贮水系数。

令

$$u^x = -T_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad T_x \geq T_0 > 0 \quad (4)$$

$$u^y = -T_y \frac{\partial h}{\partial y}, \quad T_y \geq T_0 > 0 \quad (5)$$

则式(1)变为

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u^x}{\partial x} + \frac{\partial u^y}{\partial y} = f \quad (6)$$

解式 (4) ~ 式 (6) 可以同时求得 u^x , u^y 和 $h(x, y, t)$ 。

将式 (6) 乘上函数 W , 沿区域 Ω 上积分, 则得

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} W dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial u^x}{\partial x} W dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial u^y}{\partial y} W dx dy = \int_{\Omega} f W dx dy \quad (7)$$

将式 (4), 式 (5) 分别乘上 v^x , v^y , 并在 Ω 上积分, 得

$$\int_{\Omega} \frac{u^x v^x}{T_x} dx dy = - \int_{\partial\Omega} v^x h \cos(n, x) ds + \int_{\Omega} h \frac{\partial v^x}{\partial x} dx dy \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \frac{u^y v^y}{T_y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} v^y h \cos(n, y) ds + \int_{\Omega} h \frac{\partial v^y}{\partial y} dx dy \quad (9)$$

为了简单起见, 设 Ω 为正方形并用 $x = x_0, x_1, \dots, x_m$ 和 $y = y_0, y_1, \dots, y_n$, 将 Ω 分割为小矩形, 边界条件为

$$h(x_0, y, t) = -g_1, h(x_m, y, t) = -g_2, h(x, y_0, t) = -g_3, h(x, y_n, t) = -g_4 \quad (10)$$

作函数

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ 0, & (x, y) \notin [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \end{cases} \quad (11)$$

$$Q_{0,j}^x = \begin{cases} \frac{-x + x_1}{x_1 - x_0}, & (x, y) \in [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \\ 0, & (x, y) \notin [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \end{cases} \quad (12)$$

$$Q_{i,j}^x = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}, & (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \\ 0, & (x, y) \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \end{cases} \quad (13)$$

$$Q_{m,j}^x = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & (x, y) \in [x_{m-1}, x_m] \times [y_{j-1}, y_j] \\ 0, & (x, y) \notin [x_{m-1}, x_m] \times [y_{j-1}, y_j] \end{cases} \quad (14)$$

以上各式中 $i=1, 2, \dots, m-1, j=1, 2, \dots, n$; $\in$ 表示属于; $\notin$ 表示不属于。

在 Ω 上,

$$h = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{i,j} W_{i,j} \quad (15)$$

$$u^x = \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j}^x Q_{i,j}^x \quad (16)$$

其中 $u_{i,j}^x$ 表示 u^x 在 $x = x_i, \hat{y}_j = \frac{1}{2}(y_j + y_{j-1})$ 点之值; $h_{i,j}$ 为 h 在 $x = x_i, y = y_j$ 点之值。

作函数

$$Q_{i,0}^y = \begin{cases} \frac{-y + y_1}{y_1 - y_0}, & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_0, y_1] \\ 0, & (x, y) \notin [x_{i-1}, x_i] \times [y_0, y_1] \end{cases} \quad (17)$$

$$Q_{i,j}^y = \begin{cases} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}, & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j}, & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}] \\ 0, & (x, y) \notin [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \end{cases} \quad (18)$$

$$Q_{i,n}^y = \begin{cases} \frac{y - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, & (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{n-1}, y_n] \\ 0, & (x, y) \notin [x_{i-1}, x_i] \times [y_{n-1}, y_n] \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{在 } \Omega \text{ 上,} \quad u^y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n u_{i,j}^y Q_{i,j}^y \quad (20)$$

其中 $u_{i,j}^y$ 表示 u^y 在 $\hat{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, y_j 点之值。

在式 (8) 中, 取 $v^x = Q_{0,j}^x$, 可得

$$\int_{\Omega} \frac{1}{T_x} u^x Q_{0,j}^x dx dy = - \int_{\partial\Omega} Q_{0,j}^x h \cos(n, x) ds + \int_{\Omega} h \frac{\partial}{\partial x} Q_{0,j}^x dx dy$$

在 $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 上, 设 T_x 近似为常数 $T_{i,j}^x$, 则上式计算得

$$\frac{1}{3} \frac{1}{T_{1,j}^x} (x_1 - x_0) u_{0,j}^x + \frac{1}{6 T_{1,j}^x} (x_1 - x_0) u_{1,j}^x + h_{1,j} = -g_1^j \quad (21)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

其中 g_1^j 表示 g_1 在 $[y_{j+1}, y_j]$ 上之值。

在式 (8) 中, 取 $v^x = Q_{i,j}^x$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{1}{T_{i,j}^x} (x_i - x_{i-1}) u_{i-1,j}^x + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{T_{i,j}^x} (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{T_{i+1,j}^x} (x_{i+1} - x_i) \right] u_{i,j}^x \\ + \frac{1}{6} \frac{1}{T_{i+1,j}^x} (x_{i+1} - x_i) u_{i+1,j}^x - h_{i,j} + h_{i+1,j} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n, i \neq 0, i \neq m)$$

在式 (8) 中, 取 $v^x = Q_{m,j}^x$, 可得

$$\frac{1}{6} \frac{1}{T_{m,j}^x} (x_m - x_{m-1}) u_{m-1,j}^x + \frac{1}{3 T_{m,j}^x} (x_m - x_{m-1}) u_{m,j}^x - h_{m,j} = g_2^j \quad (23)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

在式 (9) 中分别取 $v^y = Q_{i,0}^y$, $v^y = Q_{i,j}^y$, $v^y = Q_{i,n}^y$, 可得

$$\frac{1}{3 T_{i,1}^y} (y_1 - y_0) u_{i,0}^y + \frac{1}{6 T_{i,1}^y} (y_1 - y_0) u_{i,1}^y + h_{i,1} = -g_3^i \quad (24)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{1}{T_{i,j}^y} (y_j - y_{j-1}) u_{i,j-1}^y + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{T_{i,j}^y} (y_j - y_{j-1}) + \frac{1}{T_{i,j+1}^y} (y_{j+1} - y_j) \right] u_{i,j}^y \\ + \frac{1}{6} \frac{1}{T_{i,j+1}^y} (y_{j+1} - y_j) u_{i,j+1}^y - h_{i,j} + h_{i,j+1} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{1}{6} \frac{1}{T_{i,n}^y} (y_n - y_{n-1}) u_{i,n-1}^y + \frac{1}{3} \frac{1}{T_{i,n}^y} (y_n - y_{n-1}) u_{i,n}^y - h_{i,n} = g_4^i \quad (26)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

在式 (7) 中, 取 $W = W_{i,j}$, 并记 $h(x_i, y_j, t_n) = h_{i,j}^n$, 则式 (7) 变为

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u^x}{\partial x} + \frac{\partial u^y}{\partial y} - f) dx dy = 0$$

上式取 h 对 t 的导数, 进行差分并积分, 得

$$\begin{aligned} h_{i,j}^n &= h_{i,j}^{n-1} - \frac{\Delta t}{S(x_i - x_{i-1})} (u_{i,j}^x - u_{i-1,j}^x) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{S(y_j - y_{j-1})} (u_{i,j}^y - u_{i,j-1}^y) + \frac{\Delta t}{S} F_{i,j}^n \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $F_{i,j}^n = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y, t_n) dx dy$.

对于式 (21) ~ 式 (27) 方程组可采用迭代法求解。最简单迭代方法为

$$(u_{0,j}^x)^{(k+1)} = -\frac{1}{2}(u_{1,j}^x)^{(k)} - \frac{3T_{1,j}^x}{x_1 - x_0} h_{1,j}^{(k)} - g_1^j \frac{3T_{1,j}^x}{x_1 - x_0} \quad (28)$$

$$(u_{i,j}^x)^{(k+1)} = -\frac{\alpha_{i,j}^1}{\beta_{i,j}^1} (u_{i-1,j}^x)^{(k)} - \frac{\alpha_{i+1,j}}{\beta_{i,j}^1} (u_{i+1,j}^x)^{(k)} + \frac{1}{\beta_{i,j}^1} h_{i,j}^{(k)} - \frac{1}{\beta_{i+1,j}^1} h_{i+1,j}^{(k)} \quad (29)$$

$$(u_{m,j}^x)^{(k+1)} = -\frac{1}{2}(u_{m-1,j}^x)^{(k)} + \frac{3T_{m,j}^x}{x_m - x_{m-1}} h_{m,j}^{(k)} + g_2^j \frac{3T_{m,j}^x}{x_m - x_{m-1}} \quad (30)$$

$$(u_{i,0}^y)^{(k+1)} = -\frac{1}{2}(u_{i,1}^y)^{(k)} - \frac{3T_{i,1}^y}{y_1 - y_0} h_{i,1}^{(k)} - g_3^i \frac{3T_{i,1}^y}{y_1 - y_0} \quad (31)$$

$$(u_{i,j}^y)^{(k+1)} = -\frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} (u_{i,j-1}^y)^{(k)} - \frac{\alpha_{i,j+1}^2}{\beta_{i,j}^2} (u_{i,j+1}^y)^{(k)} + \frac{1}{\beta_{i,j}^2} h_{i,j}^{(k)} - \frac{1}{\beta_{i,j+1}^2} h_{i,j+1}^{(k)} \quad (32)$$

$$(u_{i,n}^y)^{(k+1)} = -\frac{1}{2}(u_{i,n-1}^y)^{(k)} + \frac{3T_{i,n}^y}{y_n - y_{n-1}} h_{i,n}^{(k)} + g_4^i \frac{3T_{i,n}^y}{y_n - y_{n-1}} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{(k+1)} &= -\gamma_i^1 ((u_{i,j}^x)^{(k+1)} - (u_{i-1,j}^x)^{(k+1)}) - \gamma_j^2 ((u_{i,j}^y)^{(k+1)} \\ &\quad - (u_{i,j-1}^y)^{(k+1)}) + h_{i,j}^{n-1} + F_{i,j}^n \frac{\Delta t}{S} \end{aligned} \quad (34)$$

式中 k 为迭代次数; 未知数为 $h_{i,j}$, $u_{i,j}^x$, $u_{i,j}^y$ 在 t_n 时的值; 系数 $\alpha_{i,j}^1$, $\beta_{i,j}^1$... 分别为

$$\alpha_{i,j}^1 = \frac{1}{6T_{i,j}^x} (x_i - x_{i-1}),$$

$$\beta_{i,j}^1 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{T_{i,j}^x} (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{T_{i+1,j}^x} (x_{i+1} - x_i) \right],$$

$$\gamma_i^1 = \frac{\Delta t}{S(x_i - x_{i-1})},$$

$$\alpha_{i,j}^2 = \frac{1}{6T_{i,j}^y} (y_j - y_{j-1}),$$

$$\beta_{i,j}^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{T_{i,j}^y} (y_j - y_{j-1}) + \frac{1}{T_{i,j+1}^y} (y_{j+1} - y_j) \right],$$

$$\gamma_j^2 = \frac{\Delta t}{S(y_j - y_{j-1})},$$

迭代初值的选取: 在式 (28) ~ 式 (33) 中, 开始时所有的 $h_{i,j}^{(k)}$ 均取为上一时段 $h(x_i, y_j, t_{n-1})$; $(u_{i,j}^x)^{(k)}$, $(u_{i,j}^y)^{(k)}$ 均取为零, 由式 (28) ~ 式 (33) 求出 $(u_{i,j}^x)^{(k+1)}$, $(u_{i,j}^y)^{(k+1)}$ 后, 再代入式 (34) 求出 $h_{i,j}^{(k+1)}$, 然后再代回式 (28) ~ 式 (33), 求出 $(u_{i,j}^x)^{(k+2)}$, $(u_{i,j}^y)^{(k+2)}$, 再代入式 (34) 求出 $(h_{i,j})^{(k+2)}$, ..., 直至

$$\begin{aligned} |(u_{i,j}^x)^{(k+2)} - (u_{i,j}^x)^{(k+1)}| &< \epsilon, \\ |(u_{i,j}^y)^{(k+2)} - (u_{i,j}^y)^{(k+1)}| &< \epsilon, \\ |h_{i,j}^{(k+2)} - h_{i,j}^{(k+1)}| &< \epsilon, \end{aligned}$$

其中 ϵ 为指定的精度。

3 计算实例

有一考虑地下水非稳定渗流问题的微分方程为

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = e^{-t} \sin x \sin y$$

边界条件: $h(0, y, t) = 0, h(\pi, y, t) = 0, h(x, 0, t) = 0, h(x, \pi, t) = 0$

始值条件: $h(x, y, 0) = \sin x \sin y$

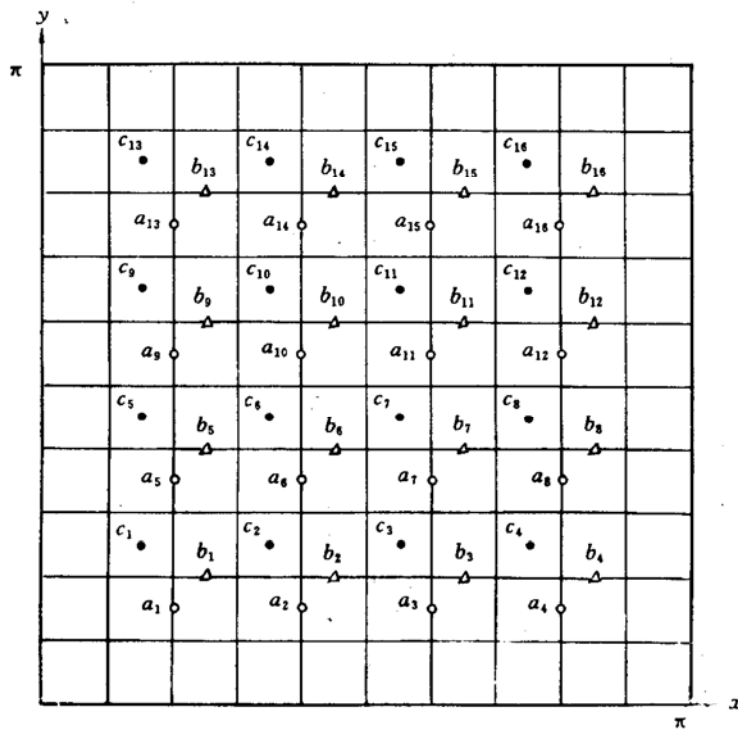


图 1

为简单起见, 设参数 $S=1$, $T=1$, 该问题的解析解为

$$h(x, y, t) = e^{-t} \sin x \sin y$$

其渗流区域如图 1 所示, 整个区域 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 分成 10×10 等分, 时间步长为 Δt 取为 0.002, 计算 10 个时段, 求得 $t=0.02$ 时的达西速度。在此区域取 48 个点, 其中 16 个点 ($a_1 \sim a_{16}$) 用本文方法求得 x 轴方向速度 $u_{i,j}^x$; 16 个点 ($b_1 \sim b_{16}$) 用本文方法求得 y 轴方向达西速度 $u_{i,j}^y$; 16 个点 ($c_1 \sim c_{16}$) 用本文方法计算 $h_{i,j}$ 并分别与解析解进行比较。

用混合有限元和解析法求得 $t = 0.02$ 时 x 轴方向的达西速度 $u_{i,j}^x$ 值分别列于表 1 中。

表 1

点	解析法	混合有限元法	绝对误差	相对误差 (%)
a_1	$-3.600133E-01$	$-3.710776E-01$	$1.106435E-02$	3.073317
a_2	$-1.375128E-01$	$-1.417371E-01$	$4.224241E-03$	3.071889
a_3	$1.375129E-01$	$1.417379E-01$	$4.225045E-03$	3.072473
a_4	$3.600133E-01$	$3.710760E-01$	$1.106268E-02$	3.072854
a_5	$-7.065659E-01$	$-7.282816E-01$	$2.171570E-02$	3.073415
a_6	$-2.698841E-01$	$-2.781745E-01$	$8.290350E-03$	3.071819
a_7	$2.698842E-01$	$2.781769E-01$	$8.292735E-03$	3.072701
a_8	$7.065659E-01$	$7.282779E-01$	$2.171195E-02$	3.072883
a_9	$-7.832342E-01$	$-8.073058E-01$	$2.407157E-02$	3.073356
a_{10}	$-2.991688E-01$	$-3.083586E-01$	$9.189725E-02$	3.071752
a_{11}	$2.991689E-01$	$3.083610E-01$	$9.192079E-01$	3.072538
a_{12}	$7.832343E-01$	$8.073018E-01$	$2.406752E-02$	3.072838
a_{13}	$-5.607338E-01$	$-5.779670E-01$	$1.723319E-02$	3.073329
a_{14}	$-2.141812E-01$	$-2.207606E-01$	$6.579310E-03$	3.071842
a_{15}	$2.141813E-01$	$2.207622E-01$	$6.580889E-03$	3.072579
a_{16}	$5.607339E-01$	$5.779642E-01$	$1.723039E-02$	3.072829

用混合有限元和解析法求得 $t = 0.02$ 时 y 轴方向达西速度 $u_{i,j}^y$ 值, 分别于表 2。

表 2

点	解析法	混合有限元法	绝对误差	相对误差 (%)
b_1	$-5.607339E-01$	$-5.779672E-01$	$1.723331E-02$	3.073350
b_2	$-7.832342E-01$	$-8.073059E-01$	$2.407169E-02$	3.073371
b_3	$-7.065659E-01$	$-7.282813E-01$	$2.171540E-02$	3.073373
b_4	$-3.600132E-01$	$-3.710775E-01$	$1.106429E-02$	3.073302
b_5	$-2.141812E-01$	$-2.207604E-01$	$6.579131E-03$	3.071759
b_6	$-2.991689E-01$	$-3.083585E-01$	$9.189665E-02$	3.071732
b_7	$-2.698841E-01$	$-2.781743E-01$	$8.290231E-03$	3.071775
b_8	$-1.375128E-01$	$-1.417368E-01$	$4.223987E-03$	3.071705
b_9	$2.141813E-01$	$2.207622E-01$	$6.580859E-03$	3.072565
b_{10}	$2.991689E-01$	$3.083615E-01$	$9.192586E-03$	3.072708
b_{11}	$2.698842E-01$	$2.781765E-01$	$8.292317E-03$	3.072547
b_{12}	$1.375128E-01$	$1.417379E-01$	$4.225105E-03$	3.072517
b_{13}	$5.607339E-01$	$5.779645E-01$	$1.723063E-02$	3.072871
b_{14}	$7.832343E-01$	$8.073025E-01$	$2.406818E-02$	3.072922
b_{15}	$7.065659E-01$	$7.282774E-01$	$2.171159E-02$	3.072833
b_{16}	$3.600132E-01$	$3.710762E-01$	$1.106298E-02$	3.072937

用混合有限元和解析法求得在 $t=0.02$ 时水头 $h_{i,j}$ 值分别示于表 3 中。

表 3

点	解析法	混合有限元法	绝对误差	相对误差 (%)
c_1	$3.146632E-01$	$3.203571E-01$	$5.693913E-03$	1.809526
c_2	$6.175612E-01$	$6.287361E-01$	$1.117492E-02$	1.809524
c_3	$6.845719E-01$	$6.969594E-01$	$1.238751E-02$	1.809527
c_4	$4.900993E-01$	$4.989678E-01$	$8.868486E-03$	1.809528
c_5	$4.395222E-01$	$4.474756E-01$	$7.953346E-03$	1.809544
c_6	$8.626109E-01$	$8.782202E-01$	$1.560932E-02$	1.809544
c_7	$9.562115E-01$	$9.735146E-01$	$1.730305E-02$	1.809542
c_8	$6.845719E-01$	$6.969595E-01$	$1.238763E-02$	1.809545
c_9	$3.964987E-01$	$4.036735E-01$	$7.174790E-03$	1.809537
c_{10}	$7.781725E-01$	$7.922539E-01$	$1.408136E-02$	1.809542
c_{11}	$8.626109E-01$	$8.782201E-01$	$1.560926E-02$	1.809537
c_{12}	$6.175612E-01$	$6.287362E-01$	$1.117504E-02$	1.809543
c_{13}	$2.020261E-01$	$2.056818E-01$	$3.655717E-03$	1.809527
c_{14}	$3.964986E-01$	$4.036734E-01$	$7.174760E-03$	1.809530
c_{15}	$4.395221E-01$	$4.474754E-01$	$7.953316E-03$	1.809537
c_{16}	$3.146631E-01$	$3.203570E-01$	$5.693942E-03$	1.809536

表 1~表 3 中相对误差是指解析解与混合有限元解之差的绝对值除以解析解的绝对值。从表 1 及表 2 看出, 用混合有限元计算的达西速度, 相对误差为 3%, 而文献 [2] 用 Yeh. G. T 方法计算的达西速度, 相对误差为 20~30%, 精度提高近 10 倍。从表 3 可以看出, 用混合有限元求得的水头与用解析法求得的水头, 相对误差为 2%。

4 结 论

(1) 用混合有限元法求解不稳定渗流的达西速度, 精度比用古典有限元方法高, 且符合局部质量守恒定律, 因而具有理论价值和实用价值。

(2) 本文所提供的迭代方法, 由于不要求解线性代数方程组, 因此不需要贮存代数方程系数矩阵, 从而具有占用内存小和计算速度快的优点。

参 考 文 献

- 1 谢春红, 张 勤, 丁家平. 稳定渗流有限元计算的新方法. 水利学报, 1995, (12).
- 2 Yeh G T. On the Computation of Darcian Velocity and Mass Balance in the Finite Element Modeling of Groundwater Flow, Water Resour. Res 1981, 17 (5): 1529~1534.