

桩侧摩阻力计算的简单数学模型

黄 强

(中国建筑科学研究院地基所, 北京)

一、前 言

划分桩侧摩阻力和桩端承力对单桩的计算具有重要意义,也是分析桩荷载传递机理的基础、是确定摩阻力和端承力的前提。国内外对这一课题已有多年的研究,解决的方法基本上有两类:一类是应用触探仪。如荷兰锥等,通过探测土层的物理参数与试桩资料对比,以建立经验公式或修正曲线,从而来划分桩侧摩阻力和桩端承力;另一类方法是通过桩静载试验的分析来划分。这类方法包括:①切线图解法;② $P-S$ 曲线直线段延长法;③ $S-\log P$ 图解法。然而,对于特定的问题应选用哪种方法却无一定的标准。就某种具体的图解法而言,由于求解是在作图过程中完成的,因此,从取值的随机性和作图的精确度而言都可能使所得结果因人而异,导致较大的误差。另一方面,图解法的工作量也较大,因此在使用上也不方便。

基于上述,为寻求一种解析函数用以计算桩侧摩阻力及分析桩的受力机理,笔者对已有的实测资料进行了综合分析,得出了与实测结果基本一致的桩侧摩阻力 F 、桩顶荷载 P 及沉降 S 的函数关系。

二、摩阻力函数的建立

对于任一根桩,摩阻力 F 总是可以表示成桩侧土与桩身的摩擦系数 f_1 、桩端土弹簧系数 k_1 、桩身材料 E_1 、桩断面面积 A_1 及桩顶荷载 P 的函数:

$$F = g(f_1, k_1, E_1, A_1, P) \quad (1)$$

然而,由于上述各物理参数取值的不准确性及桩侧摩阻力沿桩长分布曲线形态假定的不合理性,至今,函数 g 的精确表达式仍未获得。式(1)的复杂性致使有些人认为如果没有各自独立的测量系统,则无法分开计算桩端阻力和桩侧摩阻力。诚然,由于客观条件的限制,式(1)是难以获得与实测相接近的解,但桩静载试验曲线提示我们其中是否存在一个综合参数,这个参数包括了式(1)中的各种材料所代表的物理量,显然,从桩静载试验曲线中,我们可将摩阻力写成如下形式:

$$F = f(S) \cdot P \quad (2)$$

式中 F ——桩侧总摩阻力, kN; P ——桩顶荷载, kN; $f(S)$ ——摩阻力分配函数。

摩阻力分配函数 $f(S)$ 的确定是式(2)成立与否的关键。

桩侧摩阻力的发展大体可分为两个阶段。在前阶段,施加于桩顶的荷载大部分由桩侧摩阻力承担,桩身逐段发生的压缩使桩与桩壁之间有不大的相对位移,从而产生与此变形相当的摩阻力。随着荷载的加大,除了上述不大的相对位移外,还因桩底土的受压而产生刚性沉降,桩与土之间产生了更大的相对滑移,从而形成了比上述更大的摩阻力。在此阶段内的初始部分(刚施荷于桩顶的瞬时),桩顶荷载全部由桩侧摩阻力承担,其相应的数学表达式为

$$\lim_{P \rightarrow 0^+} F' = \lim_{P \rightarrow 0^+} \frac{dF}{dP} = 1 \quad (3)$$

当荷载继续增加,摩阻力虽仍在增加,但 F/P 比值则在不断地减小, R/P (R 为桩端力)则不断提高,桩的沉降中更多地包含了土的塑性变形。当 P 继续增大到某一数值 P_i 时,摩阻力发展到最大值,尔后,桩顶荷载的增量完全由桩端承受。文献[1]中认为,当试桩的 P - S 曲线的末段开始出现直线段时,桩侧摩阻力趋于常数,即此时所对应的 P_i 值即在单桩极限承载力 P_u 之后而接近于 P_u 点。文献[2]与文献[3]所给出的实测桩侧摩阻力与位移曲线(图1及图2)都表明了,在静载试验的 P - S 曲线(图3)中,确有某极限荷载 P_u 存在,使得桩周摩阻力达到极限值 F_u ,这种实测现象的数学表达式为

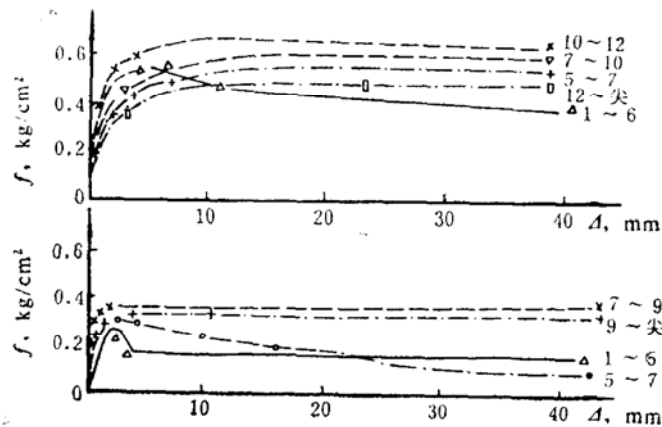


图1 国内某大桥桩侧摩阻力与桩顶位移的实测曲线

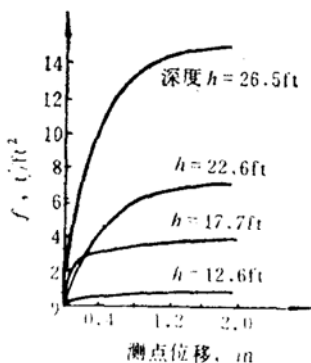


图2 国外某试验桩的桩侧摩阻力与桩身位移实测曲线

注: $1\text{t}/\text{ft}^2 = 107.3\text{kPa}$
 $1\text{ft} = 0.3048\text{m}$

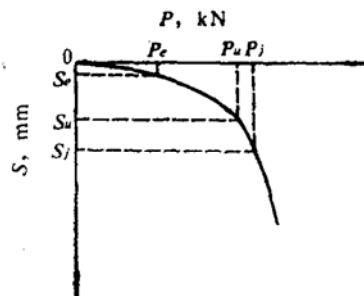


图3 静载试验桩 P - S 曲线

$$\lim_{P_j \rightarrow P_u^+} F' = \lim_{P_j \rightarrow P_u^+} \frac{dF}{dP} = 0 \quad (4)$$

显然, 式(2)的摩阻力分配函数 $f(S)$ 必须满足由实测现象所决定的式(3)及式(4)。为了获得 $f(S)$, 笔者分别假定了 $f(S)$ 的不同形式, 对一部分实测资料进行了验证、比较, 最后建议摩阻力分配函数采用以下简单形式:

$$f(S) = e^{ks} \quad (5)$$

式中 e ——自然数; k ——由试验决定的摩阻指数; S ——桩顶沉降, mm。

将式(5)代入式(3)即得桩侧总摩阻力

$$F = Pe^{ks} \quad (6)$$

显然

$$\lim_{P \rightarrow 0^+} \left[e^{ks} \left(1 + Pk \frac{dS}{dP} \right) \right] = 1 \quad (7)$$

符合式(3)的条件。

为了获得摩阻指数 k 的解, 将式(6)代入边界条件方程式(4)可得

$$\lim_{P_j \rightarrow P_u^+} \left[e^{ks} \left(1 + Pk \frac{dS}{dP} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

$$\text{即} \quad 1 + P_u k \lim_{P_j \rightarrow P_u^+} \frac{dS}{dP} = 0 \quad (9)$$

解之得

$$k = \frac{1}{P_u \lim_{P_j \rightarrow P_u^+} \left(\frac{dS}{dP} \right)} \quad (10)$$

若将图3所示的 P - S 曲线以泰勒级数表示, 即

$$S = \sum_{m=0}^n a_m P^m \quad (11)$$

$$\text{则} \quad \lim_{P_j \rightarrow P_u^+} \left(\frac{dS}{dP} \right) = \sum_{m=1}^n m a_m P_u^{m-1} \quad (12)$$

式中 a_m 值可由以下方程求得:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_1^2 & \cdots & P_1^n \\ P_2 & P_2^2 & \cdots & P_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n & P_n^2 & \cdots & P_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中 $[P]$ 及 $\{S\}$ 矩阵值可由 P - S 曲线上相应的 n 个对应点或从静载试验读数表上查得。

若考虑到桩顶荷载为 P_u 之后, P 与 S 成直线关系(大部分静载试桩曲线具有此性质), 则由图3的几何关系有

$$\lim_{P_j \rightarrow P_u} \left(\frac{dS}{dP} \right) = \frac{S_j - S_u}{P_j - P_u} \quad (14)$$

代入式(10)可得

$$k = - \frac{P_j - P_u}{P_u(S_j - S_u)} \quad (15)$$

式中 S_u ——相应于极限荷载 P_u 时的桩顶沉降值, mm; P_j —— P_u 之后一级荷载值, kN; S_j ——相应于 P_j 的桩顶沉降值, mm。

将式(15)代入式(6), 极易得到由静载试验 P - S 曲线划分的桩侧摩阻力与桩端承力的简单数学表达式

$$\left. \begin{aligned} F &= P \cdot \exp \left[\frac{P_j - P_u}{P_u(S_j - S_u)} S \right] \\ R &= P - F \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

桩的极限摩阻力 F_u 为

$$F_u = P_u \cdot \exp \left[- \frac{P_j - P_u}{P_u(S_j - S_u)} S_u \right] \quad (17)$$

式中符号意义与前述一致。

三、摩阻力函数适用性验证

桩侧摩阻力分配函数表达式(5)是建立在分析实测资料, 且仅满足两个边界条件(式(3)与式(4))的经验函数。由于它把与桩工作性能密切相关的种种复杂因素用最为明了的 P - S 曲线来概括, 即把桩尖土、桩侧土、桩材料及断面面积等几何物理性质综合反映于 P - S 曲线上, 因此, 式(5)的正确与否必须由实测的 F - P - S 值来检验。

为了检查由式(6)计算的桩侧摩阻力与实测值的误差范围, 以验证式(6)的适用性, 笔者搜集了在国内不同地区进行的18根试桩资料^①, 共有测点(极限荷载范围内)186个, 各种误差范围的出现频率如表1所示。并选择了不同地区的5个试验点用公式(16)计算, 所得到的计算值与实测值比较如表2所示。

表1 误差值出现频率表

实测与计算误差范围(%)	0~5	6~10	11~16	合计
发生此误差的测点数	161	19	6	186
占总测点的百分数(%)	86.56	10.22	3.22	100

①沈保汉, S - $\log P$ 法评价单桩极限荷载及划分摩阻力和端承力的新方法, 北京市建筑工程研究所, 1979年8月。

表2 部分测点实测与计算对比表

试桩地点	加荷等级 (kN)	桩顶沉降 (mm)	实测 F' (kN)	计算 F (kN)	$\frac{F - F'}{F'} \times 100$
吉林某松花江大桥1*试桩	980.7	1.000	980.7	975.7	-0.510
	2059.0	2.610	2053.0	2032.0	-1.000
	3138.0	6.310	3083.0	3038.0	-1.470
	4217.0	18.560	3780.0	3832.0	1.390
	5001.0	31.710	4126.0	4255.0	2.350
	5541.0*	41.110	4317.0	4483.0	3.850
	5786.0	49.510	4359.0	4483.0	2.840
山东某黄河大桥2*试桩	1912.0	2.000	1912.0	1885.0	-1.290
	2942.0	3.700	2854.0	2875.0	0.760
	2962.0	7.420	3628.0	3783.0	4.290
	4943.0	19.270	4021.0	4370.0	8.670
	5394.0	29.970	4560.0	4541.0	-0.430
	5874.0*	38.790	4697.0	4621.0	-1.640
	6423.0	53.230	4776.0	4621.0	-3.250
山东某地7*试桩	292.0	1.790	291.0	290.6	-0.210
	710.0	2.680	707.5	703.8	-0.480
	1020.0	5.880	1014.0	1001.0	-1.300
	1177.0	11.280	1167.0	1135.0	-2.800
	1335.0	20.880	1321.0	1248.0	-5.510
	1383.0*	27.480	1362.0	1265.0	-7.130
	1412.0	33.980	1384.0	1265.0	-8.620
陕西某大桥12*试桩	262.0	1.740	253.0	258.9	2.240
	523.0	7.300	498.8	497.2	-0.000
	665.1	11.620	614.9	604.1	-1.720
	786.5	18.010	722.8	694.3	-3.970
	916.9	25.790	813.0	766.9	-5.700
	1146.4*	43.930	911.0	845.0	-7.240
	1228.8	53.930	915.9	845.0	-7.740

续表 2

试桩地点	加荷等级(kN)	桩顶沉降(mm)	实测 F' (kN)	计算 F (kN)	$\frac{F-F'}{F'} \times 100$
天津某地2*试桩	98.1	0.440	98.1	97.9	-0.230
	196.1	1.200	196.1	194.9	-0.630
	294.2	3.450	291.3	288.9	-0.800
	343.2*	7.870	337.4	329.3	-2.360
	392.3	52.160			

*代表实测的极限荷载 P_u

从上述数据所分析中可认为桩侧摩阻力、桩顶荷载及沉降三者的关系基本符合笔者所建议的关系式(6)。

四、应 用

摩阻力函数的应用之一是根据桩静载试验曲线划分桩侧摩阻力及桩端承力,确定极限摩阻力 F_u 。

【例题】 沧州某地*6试桩的实测 P - S 关系值如表3所示,试根据摩阻力函数确定此试桩的极限摩阻力及相应于各级荷载下的桩侧摩阻力。

表3 沧州某地*6试桩 P - S 原始记录表

加荷等级(kN)	120.6	241.2	361.9	422.2	482.5	542.8	603.1*	663.4
桩顶沉降(mm)	0.152	0.388	0.848	1.668	3.360	6.519	10.138	36.534

【解】 根据式(5)求摩阻指数

$$k = -\frac{P_j - P_u}{P_u(S_j - S_u)} = -\frac{663.4 - 603.1}{603.1 \times (36.534 - 10.138)} = -3.79 \times 10^{-3}$$

由式(17)求得极限摩阻力

$$F_u = P_u e^{k s_u} = 603.1 \times e^{(-3.79 \times 10^{-3} \times 10.138)} = 580.4(\text{kN})$$

本例实测的极限摩阻力 $F_u = 536.4(\text{kN})$ 。

由式(6)可得各级荷载所对应的桩侧摩阻力,计算结果列于表4。

表4 各级荷载下桩侧摩阻力计算值

$P(\text{kN})$	120.6	241.2	361.9	422.2	482.5	542.5	603.1	663.4
$F = P e^{k s}(\text{kN})$	120.5	240.8	360.7	419.5	476.4	529.6	580.4	577.6

式(16)还可有助于研究桩侧摩阻力沿桩长分布函数及桩的受力机理。目前,桩侧单位长度上摩阻力沿桩长方向的分布函数 $\tau(s)$ 有多种模型。实测资料表明,简单的线性函数是难

以满足其复杂关系的。然而,无论哪种模型,桩侧总摩阻力的表达式总可以为其提供平衡条件,即

$$F = \int_0^l \tau(s) dx = Pe^{ks} \quad (18)$$

这对于 $\tau(s)$ 的确定是有意义的。

五、结 束 语

本文所给出的函数 $F = Pe^{ks}$ 表达了桩在整个受力过程中桩侧总摩阻力随桩顶荷载及沉降的变化规律。由于式(3)及式(4)适用于任何类型的桩,因此,摩阻力函数表达式具有普遍意义。但由于文中所引用的大部分实测数据是从钻孔桩上获得的,故对于其他类型的桩,其摩阻指数 k 的确定方法还有待于进一步探讨。

参 考 文 献

- [1] VanWeele, A. F., A Method of Separating the Bearing Capacity of a Test Pile into Skin Friction and Point Resistance, Proceeding of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. II, 1957.
- [2] 刘祖德、林亚超,深钻孔桩轴向承载力的确定。中国土木工程学会第三届土力学及基础工程学术会议论文选集,中国建筑工业出版社,北京. 1981, pp. 338~353.
- [3] Reece, L. C., Hudson, W. R. and Vijayvrgiya, V. N., An Investigation of the Interaction between Bored Piles and Soil, Proceedings of the 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 2, MEXICO, 1969.