

短文

二维及三维太沙基固结方程的解法

阎 澍 旺

(天津大学)

一维太沙基固结方程的解已为人们所熟知。对于设排水砂井的三向固结轴对称问题,巴伦(R. Barron)也已得出解答。本文从一维太沙基方程的解出发,用叠加的方法得出二维及三维太沙基方程在某些边界条件下的解。同时也讨论了多维问题的固结度概念及求算方法。

一、二维太沙基固结方程的解

二维太沙基方程的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vh} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{vv} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

式中 u ——孔隙水压力;
 c_{vh} , c_{vv} ——水平向及竖直向的固结系数。

对于图 1 (a) 的边界条件可以写成

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=B} = 0 \\ u|_{x=0} &= u|_{x=H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-a)$$

若边界条件如图 1 (b)~(d) 所示, 存在不透水的边界, 则可用偶延拓的方法, 分别将边界条件写成

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=B} = 0 \\ u|_{x=0} &= u|_{x=2H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-b)$$

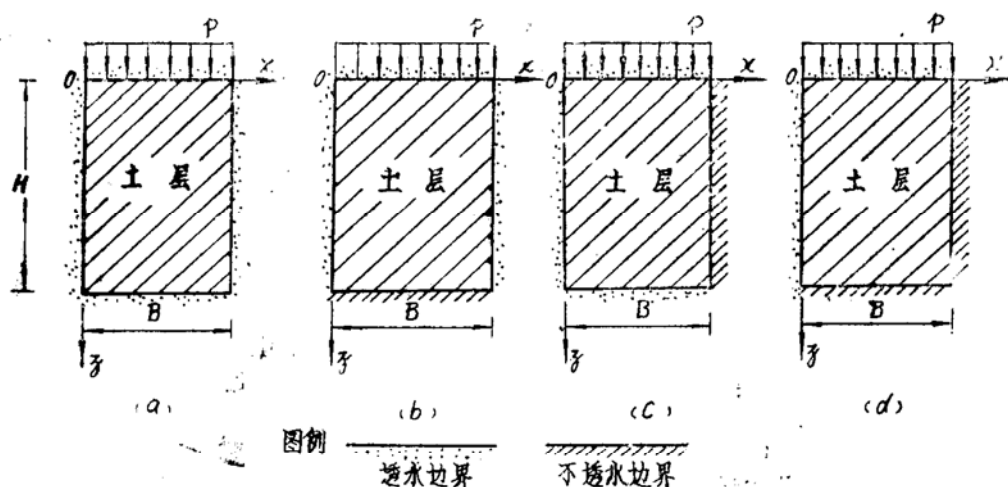


图 1 二维问题的几种边界条件

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=2B} = 0 \\ u|_{x=0} &= u|_{x=H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-c)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=2B} = 0 \\ u|_{x=0} &= u|_{x=2H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-d)$$

下面我们只讨论边界条件 (2-a)，其余情况可类推。

假定在固结的初始时刻，外荷载全部由土中水承担。对于所讨论的饱和土，由于流体等向传递压力，故在 $t = 0$ 时刻，土体中各处的超静孔隙水压力均为外荷值 p 。从而初始条件为

$$u|_{t=0} = p \quad (3)$$

对于一维太沙基方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

解其为

$$u = \frac{4}{\pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4H^2} c_v t\right) \sin \frac{n\pi}{2H} z$$

同理，我们设式(1)的解为

$$u_{mn} = A_{mn} \exp(-k_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{B} x \sin \frac{n\pi}{H} z$$

式中 k_{mn} ——待定正常数；

A_{mn} ——任意取定的常数；

m, n ——任意取定的正整数。

将上式代入式(1)中，则有

$$\begin{aligned} & -A_{mn} k_{mn} \exp(-k_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{B} x \sin \frac{n\pi}{H} z = \\ & = -\left[c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 + c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] A_{mn} \exp(-k_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{B} x \sin \frac{n\pi}{H} z \end{aligned}$$

比较等式左右两端，则有

$$k_{mn} = c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 + c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2$$

从而

$$u_{mn} = A_{mn} \exp \left\{ -\left[c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 + c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] t \right\} \sin \frac{m\pi}{B} x \sin \frac{n\pi}{H} z \quad (4)$$

式(4)必然满足泛定方程(1)，同时也易于看出其满足边界条件(2-a)。

取 $m, n = 1, 3, 5, \dots$, 将 u_{mn} 叠加作为式(1)的解, 即

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \exp \left\{ - \left[c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 + c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] t \right\} \sin \frac{m\pi}{B} x \sin \frac{n\pi}{H} z \\ &= p \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp \left[- c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 t \right] \sin \frac{m\pi}{B} x \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[- c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi}{H} z \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 p ——外荷载;

A_m, A_n ——任意取定的常数。

由于任一个 u_{mn} 均满足泛定方程(1)及边界条件(2-a), 故根据叠加原理, u 也必然满足式(1)及式(2-a)。下面用初始条件(3)确定 A_m 及 A_n 的值。将式(3)代入式(5), 可知

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{B} x \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{H} z \right) = 1 \quad (6)$$

将 1 在区间 $(0, B)$ 及区间 $(0, H)$ 上分别展开为傅立叶级数, 则其系数分别是

$$\left. \begin{aligned} b_m &= \frac{2}{B} \int_0^B 1 \cdot \sin \frac{m\pi}{B} x \, dx = \frac{4}{m\pi} \\ b_n &= \frac{2}{H} \int_0^H 1 \cdot \sin \frac{n\pi}{H} z \, dz = \frac{4}{n\pi} \end{aligned} \right\} (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (7)$$

由式(7)可见, 若取 $A_m = b_m$, $A_n = b_n$, 则式(6)必然成立, 从而式(5)作为式(1)的解也必然满足初始条件。这样, 就得到了泛定方程(1)在边界条件(2-a)及初始条件(3)时的解

$$\begin{aligned} u &= \frac{16}{\pi^2} p \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp \left[- c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 t \right] \sin \frac{m\pi}{B} x \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[- c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi}{H} z \right) \end{aligned} \quad (8)$$

对于一维太沙基方程

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= c_{vh} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0} &= u|_{x=B} = 0 \\ u|_{t=0} &= p \end{aligned} \right. \quad \text{与} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= c_{vv} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u|_{z=0} &= u|_{z=H} = 0 \\ u|_{t=0} &= p \end{aligned} \right.$$

我们知道其解分别为

$$u_x = \frac{4}{\pi} p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp\left[-c_{vx} \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 t\right] \sin \frac{m\pi}{B} x$$

及

$$u_z = \frac{4}{\pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left[-c_{vz} \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 t\right] \sin \frac{n\pi}{H} z$$

将其与式(8)比较, 易得出

$$u = \frac{u_x u_z}{p} \quad (9)$$

二、三维太沙基方程的解

三维太沙基方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{vy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (10)$$

式中 c_{vx} , c_{vy} , c_{vz} ——分别为 x , y , z 方向的固结系数。

设土体中有一六面土体, 其六面皆为透水面, 顶面受有均布荷载 p (图2)。则其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=B} = 0 \\ u|_{y=0} &= u|_{y=L} = 0 \\ u|_{z=0} &= u|_{z=H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

若土体在某一方向有一不透水面, 则可仿照二维情况做偶延拓, 变换成透水边界来求解。初始条件仍如二维的情况, 为

$$u|_{t=0} = p$$

设式(10)的解为

$$u_{mnl} = A_{mnl} \exp(-k_{mnl} t) \sin \frac{m\pi}{B} x \sin \frac{n\pi}{L} y \sin \frac{l\pi}{H} z$$

式中 A_{mnl} ——任意取定的常数;

k_{mnl} ——待定正常数;

m, n, l ——任意取定的正整数。

将上式代入式(1)中, 比较两端可得

$$k_{mnl} = c_{vx} \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 + c_{vy} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + c_{vz} \left(\frac{l\pi}{H}\right)^2 \quad (12)$$

按二维太沙基方程的求解方法, 可以得到满足式(10), (11)及(3)的解为

$$\begin{aligned} u = p \frac{64}{\pi^3} & \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp\left[-c_{vx} \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 t\right] \sin \frac{m\pi}{B} x \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left[-c_{vy} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \times \right. \\ & \left. \times \sin \frac{n\pi}{L} z \right\} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \exp\left[-c_{vz} \left(\frac{l\pi}{H}\right)^2 t\right] \sin \frac{l\pi}{H} z \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

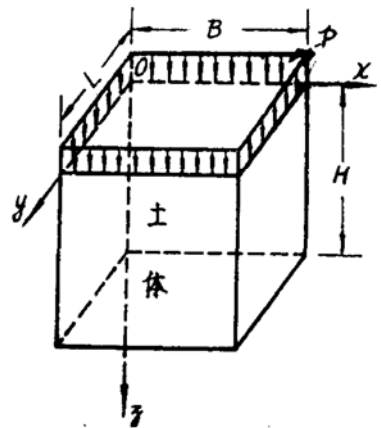


图2 三维问题的边界条件

$$(m, n, l = 1, 3, 5 \dots)$$

设 u_x, u_y, u_z 分别为 x, y, z 方向的一维固结方程的解, 则显然有

$$u = \frac{u_x u_y u_z}{p^2}$$

对于设排水砂井的轴对称问题, 巴伦也得到了类似的结果^[1]。用柱坐标表示的三维轴对称固结方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c_{vv} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (15)$$

式中 c_{vh} ——径向(水平向)的固结系数;

r ——径向坐标。

卡里洛(Carrillo)证明, 式(15)表示的轴对称渗流可以分解为沿垂直方向的渗流及垂直于 z 轴方向的平面轴对称渗流两种情况。垂直方向的渗流可由一维固结方程求解; 对于平面轴对称渗流, 巴伦是根据地面应变相等和下述边界条件及初始边界条件求得的, 即

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = c_{vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

当 $0 \leq t \leq \infty$ 时, $r = r_s, u = 0$; $r = r_c, \frac{\partial u}{\partial r} = 0$;

当 $t = 0$ 时, $r_s < r \leq r_c, u = u_0$;

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $u = 0$ 。

其解为

$$u_r = \frac{u_0}{r_c^2 F} \left(r_c^2 \ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{8}{F} T_r \right) \quad (16)$$

式中

$$T_r = \frac{c_{vh}}{4r_c^2} t \quad (17)$$

$$F = \frac{r_c^2}{r_c^2 - r_s^2} \ln \frac{r_c}{r_s} - \frac{3r_c^2 - r_s^2}{4r_c^2} \quad (18)$$

u_0 ——初始孔隙水应力;

r_s ——砂井半径;

r_c ——等效渗水圆柱体半径, 砂井为正方形排列时, $r_c = 1.13 \times \frac{D}{2}$;

D ——砂井间距。

设 u_z 为竖向一维固结解得的孔隙水应力, 则易见有

$$u = \frac{u_r u_z}{u_0} \quad (19)$$

三、固结度计算公式

根据式(8), (13)及(19), 我们可以求得在任何时刻, 固结土体内任一点的超静孔隙压力 u 。为了研究土层中超静孔隙水压力的消散程度, 工程上常用固结度的概念。对于二维及三维问题, 有意义的是研究整个固结土体的平均固结度 U , 它反映土体中超静孔隙水压力的平均消散程度。

对于二维问题, 固结开始时, 土体的平均超静孔隙水压力为

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{BH} \int_0^H \int_0^B u_0 dx dz = u_0$$

在 t 时刻, 平均超静水压力为

$$\begin{aligned} \bar{u}_t &= \frac{1}{BH} \int_0^H \int_0^B u dx dz \\ &= \frac{64}{\pi^4} p \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \exp \left[-c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 t \right] \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 t \right] \right\} \end{aligned}$$

从而二维问题的平均固结度为

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{\bar{u}_0 - \bar{u}_t}{\bar{u}_0} \\ &= 1 - \frac{64}{\pi^4} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \exp \left[-c_{vh} \left(\frac{m\pi}{B} \right)^2 t \right] \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-c_{vv} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 t \right] \right\} \\ &= 1 - (1 - U_x) (1 - U_z) \end{aligned} \quad (20)$$

U_x, U_z 分别为 x, z 向一维问题的固结度, 都具有如下形式

$$U_t = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-c_v \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 t \right] \quad (21)$$

同样, 我们可求得三维问题的平均固结度为

$$U_3 = 1 - (1 - U_x) (1 - U_y) (1 - U_z) \quad (22)$$

式中 U_y —— y 向的一维固结度。

砂井轴对称问题的平均固结度为

$$U = 1 - (1 - U_r) (1 - U_z) \quad (23)$$

式中 U_r 为平面轴对称问题的固结度, 巴伦导出其值为

$$U_r = 1 - \exp \left[-\frac{8}{F} T_r \right] \quad (24)$$

由式(20)、(22)、(23)可知, 多维固结度可以分解为几个一维固结度, 亦即可以由几个一维固结度来合成。

四、多维固结度与沉降的关系

对于一维问题(单向固结),由超静孔隙水压力所定义的固结度恰好也反映了以体积变形表示的固结度。设地基的最终沉降量为 S , t 时刻的沉降量为 S_t , U_t 表示 t 时刻的固结度,则

$$U_t = \frac{S_t}{S}$$

下面考虑二维固结的情况。从地基中取出一个单元体如图3所示^[2],设原来作用于其上的垂直和水平向压力分别为 p_1' 和 p_3' 。由于假定了在加荷初始时刻整个地基中的 $u = u_0$,根据有效应力原理 $\sigma = \sigma' + u$,可知各处的有效应力增量均为零。在固结终了,各处超静水压力消散为零,有效应力增量在各地都达到 p 。而在固结过程中的某时刻 t ,竖向有效应力增量

$$\Delta\sigma_1' = \Delta u = p - u$$

此时整个固结土体的平均固结沉降量可由下式求得

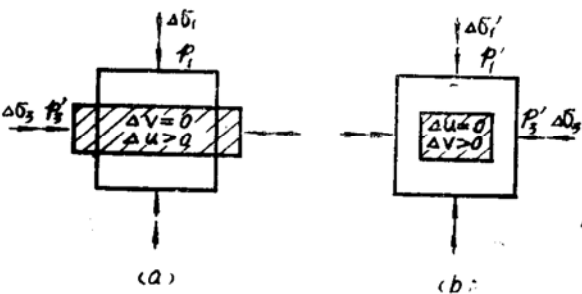


图3 固结过程中的单元应力状态

$$S_c'(t) = \frac{1}{B} \int_0^B \int_0^H m_v \Delta u dx dz = m_v \left(pH - \frac{1}{B} \int_0^B \int_0^H u dx dz \right)$$

式中 $S_c'(t)$ —— t 时刻的固结沉降量;

m_v ——体积压缩系数,设为常量。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $u = 0$,故最终固结沉降量为

$$S_c'(\infty) = \frac{1}{B} \int_0^B \int_0^H m_v p dx dz = m_v pH$$

从而以土的固结沉降表示的平均固结度

$$U_t = \frac{S_c'(t)}{S_c'(\infty)} = 1 - (1 - U_x)(1 - U_z) \quad (25)$$

与孔隙水压力表示的平均固结度相同。对于三维和砂井轴对称问题,可以得到同样的结论。

五、计算实例

综上所述,多维固结方程的解及多维固结度可用一维的相应情况来合成,同时我们也看到,固结度的大小与荷载大小及荷载方式无关。这就给某些问题的计算提供了方便和可能性。举例如下。

(一)由 c_{vv} 值推算 c_{vh}

天津新港软粘土的 c_{vv} 值已知为 $1.1 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。取 $H = 2800 \text{ cm}$,由一维固结理论,我们可推算出在60天时,一维竖向固结度为

$$U_{60} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \exp \left[-c_{vv} \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 t \right]$$

由于式(21)右端的级数收敛很快,故仅取一项计算即可满足精度要求。计算结果为 $U_{60} = 19.4\%$ 。一航局在新港软粘土地基上所做的真空抽气加固试验如图4所示^[3],试验表明,当抽气连续达60天时,加固区的平均沉降值达到最终沉降量的90%。由于地基的真空抽气加固过程实质上是土中水渗流过程,没有外荷载作用,因此不会产生初始沉降。若不计次固结沉降,则固结沉降量即为总沉降量。因而可以认为真空预压60天后,地基的固结度可达到90%。由计算砂井轴对称问题固结度公式(式(23))可得

$$U_r = \frac{U - U_z}{1 - U_z} = \frac{0.9 - 0.194}{1 - 0.194} = 0.876$$

由式(17)、(24)可导出

$$c_{vh} = - \frac{F}{8} \frac{4r_c^2}{t} \ln(1 - U_r) \quad (26)$$

由图4知 $D = 130\text{cm}$,则 $r_c = 1.13 \times \frac{D}{2} = 73.45\text{cm}$; $r_s = 3.5\text{cm}$ 。代入式(18),可得

$$F = \frac{73.45^2}{73.45^2 - 3.5^2} \ln \frac{73.45}{3.5} - \frac{3 \times 73.45^2 - 3.5^2}{4 \times 73.45^2} = 2.301$$

将 F 值及 U_r 值代入式(26),

$$c_{vh} = - \frac{2.301 \times 73.45^2 \ln(1 - 0.876)}{2 \times 60 \times 86400} = 2.5 \times 10^{-3} (\text{cm}^2/\text{s})$$

计算结果表明,天津新港粘土的 c_{vh} 值约为 c_{vv} 值的2.27倍,符合粘土的生成特点,即水平向固结系数大于竖向固结系数。

(二) 水力冲填坝坝心部分的固结度计算

设心墙底角为 45° ,两腰为透水边界,底面为不透水边界,如图5。这显然是二维固结问题。将区域I偶延拓到区域II,则这样形成的整个区域符合边界条件(2-a)。又设土为各向同性的,即各向的固结系数相同,则在图5的坐标系下,有 $c_{vx} = c_{vz}$ 。整个心墙的平均固结度可由 x, z 两个方向的一维固结度叠加得到。由于 x, z 方向固结系数相同,且渗径都是 $\sqrt{2}b$,故两个一维固结度相同,即

$$U_x = U_z = 1 - \frac{8}{\pi^2} \exp \left[-\frac{\pi^2}{2} T_v \right]$$

式中 $T_v = \frac{c_v}{b^2} t$;

U_x, U_z —— 分别为 x, z 方向的一维固结度。

从而二维固结度

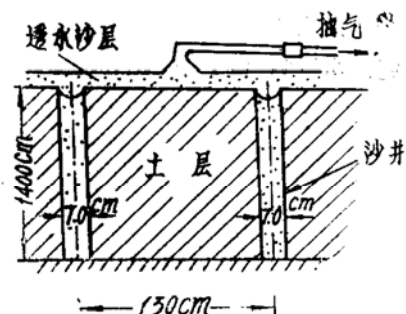


图4 真空抽气加固试验示意图

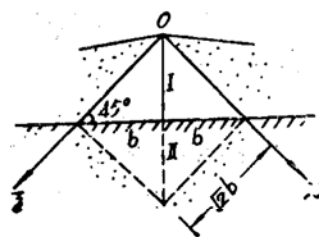


图5 心墙固结问题

$$U_2 = 1 - (1 - U_x)(1 - U_z) = 1 - \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \exp[-\pi^2 T_v]$$

由上式计算所得的固结度随时间变化曲线与用差分法所得曲线^[4]的比较如图6所示。从图中可以看到,两种解法所得到的结果比较一致。但本文方法远较差分法为简易。

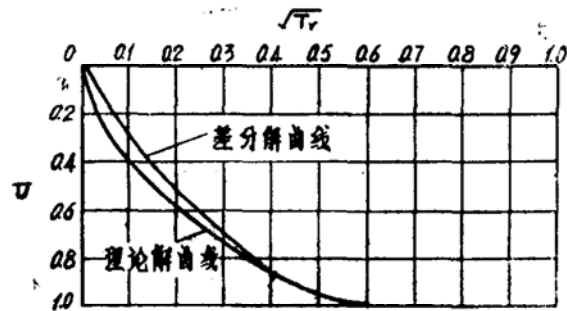


图6 心墙固结的时间——固结度曲线

结 语

在某些边界条件下,二维、三维和空间轴对称固结方程的解可以用一维或二维问题的解来表示;固结度与固结沉降有关而与外荷的大小无关,多维固结度也可以用一维固结度来表示。这样就为某些固结问题的计算带来方便和可能性。例如,我们可以由 c_{vv} 值推求 c_{vh} 值;也可用一维问题的解来合成多维问题的解,由简单问题求得复杂问题的解。

以上理论推导和计算还只是初步结果,有待大量事例来验证。

参 考 文 献

- [1] Barron, R. A., Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, Trans. ASCE, Vol. 113, 1948.
- [2] Chen, Huan, Analysis of Soil Consolidation Stress under the Action of Negative Pressure, proc. of 8th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Helsinki, 1983.
- [3] Ye, B. R., Packed Sand Drain-atmospheric Preloading for Strengthening Soft Foundation, Proc. of 8th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Helsinki, 1983.
- [4] 华东水利学院, 土工原理与计算(上册), 水利出版社, 北京, 1980.