

岩石在三向压力作用时的屈服条件

王 敬 健

(太原工学院)

一、均方剪应力

假定材料的屈服是一种宏观的滑移现象, 而此滑移又是在许多随机取向截面上的颗粒微观滑移的基础上产生的。若假定微观滑移的条件是 $\tau_n = \tau_{cr}$ (式中 τ_n 是某一随机取向截面上的剪应力, τ_{cr} 是沿该面滑移的临界剪应力), 由于该截面取向可以是任意的, 因此在研究宏观滑移和屈服条件时, 必须取全部随机取向截面上的 τ_n 和 τ_{cr} 的均方值来考虑, 亦即研究均方剪应力 $\overline{\tau_n^2}$ 和临界均方剪应力 $\overline{\tau_{cr}^2}$, 下面首先计算均方剪应力。

取某点为中心、半径 r 为无限小的圆球^[1], 受 σ_1 , σ_2 和 σ_3 的三向应力作用, 在该球面上取一外法线为 $\vec{n}$ (其方位由球面坐标经纬度 θ, φ 确定) 的微元面积 $d\Omega$, 其上作用有剪应力 τ_n , 它表示 σ_1 , σ_2 和 σ_3 在该取向 (θ, φ) 截面上作用的微观滑移效果。为了研究应力的总的(宏观)作用效果, 则应求出全部随机取向截面的剪应力 τ_n 的均方剪应力 $\overline{\tau_n^2}$, 其算式为

$$\overline{\tau_n^2} = \frac{1}{\Omega} \oint \tau_n^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \tau_n^2 r^2 \sin\theta d\theta$$

式中 $\tau_n^2 = (\sigma_1^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sigma_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \sigma_3^2 \cos^2\theta) - (\sigma_1 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \sigma_3 \cos^2\theta)^2$
积分并化简得

$$\overline{\tau_n^2} = \frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

令

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

则

$$\overline{\tau_n^2} = \frac{2}{5} J_2 \quad (1)$$

即 τ_n^2 与 J_2 成正比。称 J_2 为应力偏张量的第二不变量。由于 J_2 是与畸变比能 u_f 和八面体剪应力的平方 τ_8^2 成正比的, 所以 $\overline{\tau_n^2}$ 也与 u_f 和 τ_8^2 成正比。该正比关系不难直接从三个量的物理意义去理解: $\overline{\tau_n^2}$ 作为均方剪应力和某一特征面(等倾面)上的剪应力的平方 τ_8^2 成正比是很自然的, 因为 τ_n^2 值与剪切应变能 $\tau_n^2/2G$ 成正比, 所以 τ_n^2 的平均值 $\overline{\tau_n^2}$ 也与总平均剪切应变能成正比, 故和畸变比能 u_f 成正比。总之 $J_2, \overline{\tau_n^2}, \tau_8^2$ 与 u_f 四个量之间都只相差常数项因子。

二、临界均方剪应力

对岩石类材料来说静水压力对屈服极限有很大的影响。米色斯(Mises)理论没有反映这一事实, 莫尔

(Mohr)虽然承认了这一事实,但在表达此关系时未能反映中间主应力 σ_2 的影响,这与试验结果不符^[2]。为了反映静水压力和 σ_2 对屈服极限的影响这个事实,可考察任一随机取向滑移面的情况,设材料抵抗沿该随机面滑移的临界剪应力为

$$\tau_{cr} = \tau_0 + \mu \sigma_n$$

式中 σ_n 是作用在滑移面上的压应力

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta$$

τ_{cr} 和 σ_n 是表示随机取向截面上的两个量,是微观性质的量。为了求得材料整体(宏观)抵抗滑移的临界应力,需采用与求均方剪应力 $\overline{\tau_n^2}$ 相类似的步骤,即应先求出个别截面临界剪应力 τ_{cr} 的值,再求出全部随机取向截面上的临界均方剪应力 $\overline{\tau_{cr}^2}$,其临界均方剪应力 $\overline{\tau_{cr}^2}$ 的算式应为

$$\overline{\tau_{cr}^2} = \frac{1}{\Omega} \oint \tau_{cr}^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\tau_0 + \mu \sigma_n)^2 r^2 \sin \theta d\theta$$

积分并化简得

$$\overline{\tau_{cr}^2} = \tau_0^2 + \frac{2}{3} \mu \tau_0 I_1 + \frac{1}{9} \mu^2 I_1^2 + \frac{4}{15} \mu^2 J_2 \quad (2)$$

式中 $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ 是应力张量第一不变量,它等于静水压力的三倍。

式(2)表明, $\overline{\tau_{cr}^2}$ 除了和材料性质有关以外,还随着静水压力的增加而增加。与 $\overline{\tau_n^2}$ 相类似,也可认为 $\overline{\tau_{cr}^2}$ 的数值和临界八面体剪应力的平方 τ_{8cr}^2 ,以及临界畸变比能 u_{fcr} 都只相差相应的常数项因子。

三、屈服条件及屈服曲面

从前面的分析中,不难得出结论:当均方剪应力达到其临界值时,材料发生宏观的滑移,滑移条件或屈服条件为

$$\overline{\tau_n^2} = \overline{\tau_{cr}^2} \quad (3)$$

将式(1),(2)代入式(3)化简后得

$$6(3 - 2\mu^2)J_2 - 5(\mu I_1 + 3\tau_0)^2 = 0 \quad (4)$$

式中的两个材料常数 τ_0 及 μ ,应通过三向压力试验或有压应力作用时的剪切试验来确定。从物理意义上讲,该条件(即式(3))既是剪力产生滑移的条件,也是均方剪应力条件。但若将式(3)两边同乘某一常数项因子,则该条件也可视为畸变比能条件或八面体剪应力条件,因而与米色斯条件有相似之处,但在本文中考虑了静水压力的影响,因此该条件也可视为广义的米色斯条件。亦即米色斯条件是本条件在材料的内摩擦系数很小($\mu \approx 0$)时的特例。

应当指出,曾有人提出 $J_2 = f(I_1)$ 形式的屈服条件,例如德鲁克-普拉格(Drucker-Prager)^[3]曾建议 $\sqrt{J_2} = K - 3\alpha I_1$ 为屈服条件,式中 K 和 α 是与材料的粘聚力和内摩擦系数有关的常数。很明显此条件和本文所述的条件在表达式上是相类似的,但思考问题的方法却不一样,本文是从微观和宏观滑移条件出发来考虑屈服的,有较清晰的物理图象,而德鲁克-普拉格仅只将 $\sqrt{J_2}$ 和 I_1 的函数式从数学上进行线性化处理。又例如茂木(Mogi)^[2]根据其试验结果建议将屈服条件写成 $\tau_8 = f(I_1)$ 的形式,并建议将其理解为畸变比能条件,其中材料的临界畸变比能不是常数而是随静水压力单调增加的函数。至于具体的函数式茂木并没有多作深入的讨论,只是说由实验曲线看出是一近似于直线的微向上凸的曲线关系。如前所述本文也可理解为畸变比能屈服条件,因此和茂木的建议并不矛盾。但本文却更深入了一步,即通过清晰的物理

图象由临界均方剪应力的计算, 得到了(相差常数项因子的)临界畸变比能随静水压力而单调增加的具体函数式(2), 并建立了 $\sqrt{J_2} = f(I_1)$ 的屈服条件式(4)。

为了使所研究的屈服条件能形象化的表现出来, 可在主应力空间中描绘屈服曲面^[4], 以便能清楚地表示屈服曲面的形状。因此, 建议建立 x, y, z 直角坐标系, 使其 z 轴与原来的 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 三轴成等倾角, 此时 $I_1 = \sqrt{3}z$, $J_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $J_2 = \frac{1}{2}r^2$ 。现在可在 x, y, z 坐标系中来研究 $J_2 = f(I_1)$ 形式屈服条件的图象, 若 $I_1 = 0$ 或常数 c_1 , 则 $z = 0$ 或 $z = c_1/\sqrt{3}$, 此即为垂直于 z 轴的 xy 平面或与之平行的平面。此时 $J_2 = f(0)$ 或 $J_2 = f(c_1)$ 也是常数 c_2 或 c_3 , 因而 $r = \sqrt{2J_2}$ 也是常数 $\sqrt{2c_2}$ 或 $\sqrt{2c_3}$, 即为半径不同的圆, 因此屈服曲面是以 z 轴为对称轴的旋转曲面, $r-z$ 曲线即为此屈服旋转面的母线。现在再来讨论 $J_2 = f(I_1)$ 形式的屈服条件式(4), 很明显此时 $\sqrt{J_2}-I_1$ 曲线为一曲线, 若将其纵坐标乘以不同的常数, 则得到 $r-z$ 曲线以及 τ_8-I_1 曲线也相应的为一曲线。屈服曲面则是以 z 为轴以 $r-z$ 直线为母线的圆锥面。

四、理论与试验结果的对比

如前所述, 屈服条件式(4)表明 $\sqrt{J_2}-I_1$ 以及 τ_8-I_1 曲线均应为一直线。现在来研究试验结果。首先引用戈挺根(Gottingen)大学关于大理石和砂石的实验数据^[5]绘出 $\sqrt{J_2} = f(I_1)$ 的曲线, 它与本文中在 x, y, z 坐标系中的 $r-z$ 曲线(屈服旋转面的母线)相似, 根据本文所述, 它们应为一斜直线。由图(1)可见,

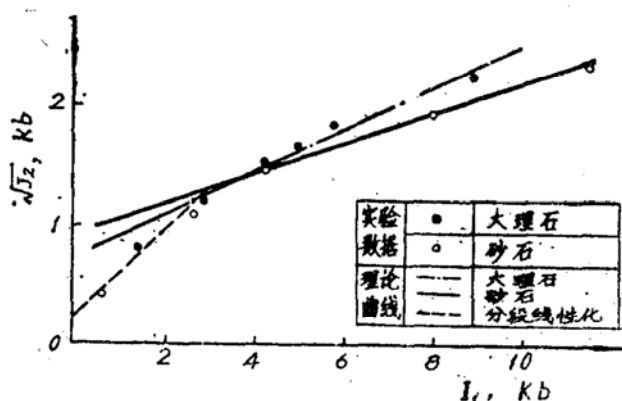


图1 大理石和砂石的 $\sqrt{J_2}-I_1$ 曲线

除了 I_1 最小的一个点(此时围压为零)以外, 其他各点实验值都在这一直线附近, 因而和本文所论述理论相符。近十多年来茂木和汉丁(Handin)^[6]都作了大量的岩石的三轴压力试验, 二人的试验都用 $\tau_8(\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{J_2})-p_m(\frac{1}{3}I_1)$ 曲线表示, 试验表明 τ_8-p_m 曲线为一非常接近直线的微向上凸的曲线, 如图(2)所示, 这

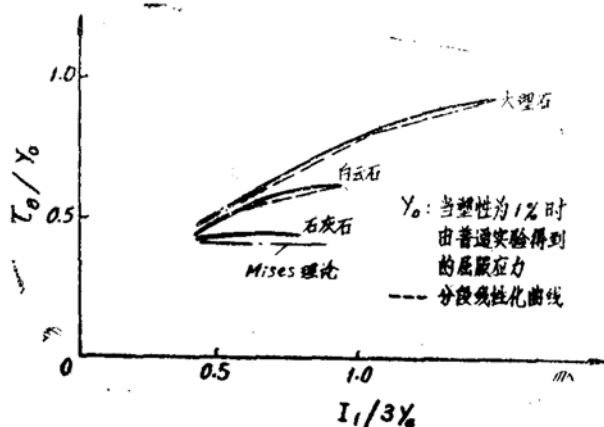


图2 茂木试验 τ_8-I_1 曲线

和本文所述理论也基本相符,实际是偏离理论直线的,为什么会有这种差别呢?因本文曾假定,对于一个剪切面来说其临界剪应力与压应力成线性关系即 $\tau_{cr} = \tau_0 + \mu\sigma_n$, 由此线性关系并经过求均方值的运算推导出的是 $\sqrt{J_2}$ 或 τ_8 与 I_1 成线性关系的屈服条件。但更精确的单面剪切试验表明, τ_{cr} 与 σ_n 的关系不是线性的,其方程为^[7]

$$\tau_{cr} = \frac{\tau_0 + \mu\sigma_n}{1 + \frac{\mu\sigma_n}{\tau_i - \tau_0}} \quad (5)$$

式中 τ_0 , μ 及 τ_i 等材料常数可查文献[7]中的表。此式表明, $\tau_{cr}-\sigma_n$ 曲线是一条微向上凸的曲线。关于 $\tau_{cr}-\sigma_n$ 的非线性关系也可从其他许多资料如文献[8]中得到。不难想像,由 $\tau_{cr}-\sigma_n$ 的微向上凸的关系,经过求均方值的运算,所得到的 $\sqrt{J_2}(\tau_8)-I_1$ 曲线也是一微向上凸的曲线,这样理论曲线便和试验曲线完全相符了。在实际应用时,假若用较精确的式(5)中的 τ_{cr} 去计算 $\overline{\tau_{cr}^2}$, 则计算十分复杂,因此可将 $\tau_{cr}-\sigma_n$ 曲线分段线性化,即用两段或多段直线代替单一的直线,这样得到的 $\sqrt{J_2}(\tau_8)-I_1$ 曲线也是由相应的直线段组成的一条折线。究竟分几段合适,则应根据问题所需的精度而定。对于一般的实际问题,由试验曲线可见分两段即可达到足够的精度。分界点大约在 σ_n 为 1 kb 或 I_1 为 3 kb 附近,如图(1), (2)中虚线所示。不言而喻在主应力空间中的屈服曲面,也相应的由一个圆锥精确化为两个(或多个)圆锥段所组成的旋转面,直至最后为一曲线旋转面。

五、结 论

1. 通过分析任一随机取向截面的滑移条件 $\tau_n = \tau_{cr}$, 求其均方值可得到宏观屈服条件 $\overline{\tau_n^2} = \overline{\tau_{cr}^2}$, 此条件可表为 $J_2 = f(I_1)$ 的形式, 它能反映 I_1 和 σ_2 对屈服有影响的事实, 因而较米色斯理论(认为 I_1 与屈服无关)和莫尔理论(认为 σ_2 与屈服无关)更全面些, 特别适用于岩石类材料。

2. 由一个剪切面的 τ_{cr} 和 σ_n 的线性关系, 导出了 $\sqrt{J_2}$ 或 τ_8 与 I_1 也成线性关系的屈服条件。单面剪切试验指出 $\tau_{cr}-\sigma_n$ 的更精确的关系不是线性的, 而是一微向上凸的曲线。按照本文的推理, $\sqrt{J_2}-I_1$ 曲线及 τ_8-I_1 曲线也应是一微向上凸的曲线, 这与戈挺根大学以及茂木, 汉丁等人的试验结果完全符合。

3. 在实际应用时, 可将 $\tau_{cr}-\sigma_n$ 曲线分段线性化, 这意味着将 $\sqrt{J_2}-I_1$ 曲线以及 τ_8-I_1 曲线也分段线性化。这样既能使理论更好地符合实际情况, 又不会使计算过分复杂。

笔者在撰写本文时曾得到穆霞英、杨桂通、许菁中同志的帮助, 特此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 蒋咏秋、穆霞英, 塑性力学基础, 机械工业出版社, 1981年, 第30~31, 243~244页。
- [2] Mogi, K., Fracture and Flow of Rocks under High Triaxial Compression, Jour. of Geophy. Res., Vol. 76, 1971, pp. 1255~1269.
- [3] Drucker, D. C. and Prager, W., Soil Mechanics of Plastic Analysis or Limit Design, Q. Appl. Math., Vol. 10, 1952, pp. 157~165.
- [4] 王仁、黄文彬, 塑性力学引论, 北京大学出版社, 1982年, 第50~67, 101~103页。
- [5] 摩尔工程力学论文选辑, 吴之翰译, 李国豪校, 上海科技出版社, 1966年, 第142~157页。
- [6] Handin, John, etc., Effect of the Intermediate Principle Stress on the Failure of Limestone, Dolomite and Glass at Different Temperature and Strain Rate, Jour. of Geophy. Res. Vol. 72, 1967, pp. 611~640.
- [7] Vutukuri, V. S., etc., Handbook on Mechanical Properties of Rocks, Vol. I, 岩石力学性质手册, 第1册, 水利水电岩石力学情报网译, 水利出版社, 1981年, 第81~82页。
- [8] 重庆建筑工程学院、同济大学编, 岩体力学, 中国建筑工业出版社, 1981年, 第23~24页。