

专题综述、讨论

## 岩土工程的可靠性分析<sup>①</sup> (续一)

高 大 钊

(同济大学, 上海)

### 四、荷载的概率估计

根据荷载的性质可以分为恒载(死荷载)、定期停留荷载(有规律的活荷载)和临时荷载三类。

由结构物材料自重所产生的重力荷载在整个使用年限内通常并不变化,称为恒载。一般来说,恒载比较容易估计得准确一些,但也存在着不定性,主要是由于材料单位重的变异性、设计尺寸的偏差、最终选用材料的变化以及一些建筑装修等因素引起的。作用在基础上的恒载是各个分量的总和,假如上部结构一个典型层的变异系数是 $V_x$ ,那末具有 $n$ 层的建筑物(假定每层的变异系数是相同的)总的恒载变异系数 $V_y$ ,由下式求得<sup>[4]</sup>:

$$V_y = V_x \sqrt{\frac{1 + (n-1)\rho}{n}} \quad (34)$$

式中  $\rho$ ——任意两层之间的相关系数。

对于以恒载为主的建筑物,荷载变异系数一般不超过0.10。

作用在基础上的许多荷载是随时间而变化的,例如居住的人群、家俱、设备等等,这种荷载称为定期停留的活荷载。对于筒仓、油罐一类构筑物,这种荷载往往起着控制的作用。

定期停留的活荷载时大时小,为了简化实用可以假定在一个停留期间其荷载大小是不变的。当然,每个停留期的长短和停留期之间的间隔可能都是不相等的,如图4所示。这类荷载一般服从泊桑分布,在整个使用年限 $T$ 年内荷载变化的平均次数为 $vT$ ,参数 $v$ 为平均的变化率。对于稳定问题和砂土的沉降问题,基础性状取决于基础使用期间的最大荷载。最大荷载 $X_{rm}$ 的概率分布函数

$$F_{xrm}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{xr}(x) \frac{e^{-vT}(vT)^i}{i!} = \exp \left\{ -vT[1 - F_{xr}(x)] \right\} \quad (35)$$

式中  $F_{xr}(x)$ ——经过每一个停留期间荷载的概率分布函数;

$i$ ——停留荷载出现次数。

假定各个停留期所共有的 $X_r$ 是相等的和独立的分布,如果在使用期间停留荷载出现的次数正好是 $n$ ,那么 $X_{rm}$ 的概率分布函数

$$F_{xrm}(x) = F_{xr}^n(x) \quad (36)$$

对于多层或高层建筑的基础设计,由于各层的最大荷载不可能是同时出现的,因此不能用简单相加的办法。总的荷载变化的频率比每一单层高得多,如图5所示。

①本文第一、二、三节见本刊83年第3期,本期刊登四、五、六节,余下七、八两节将于84年第1期登完。

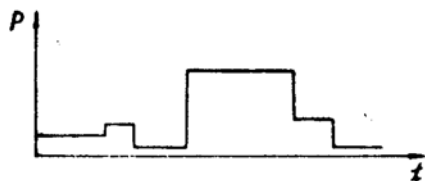


图 4

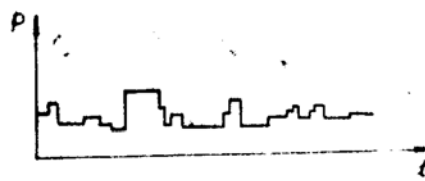


图 5

计算粘性土的固结沉降时, 不考虑使用期间的最大荷载, 因为最大荷载的停留时间很短。这种情况采用长期加权平均值  $X_e$ 。

$$X_e = \frac{\sum a_i X_{ri}}{\sum a_i} \quad (37)$$

式中  $X_{ri}$ ——第  $i$  个停留荷载;

$a_i$ ——取决于在整个固结过程中  $X_{ri}$  持续时间和出现次数的权数;

$\Sigma$ ——从 1 到  $n$  的加和,  $n$  为在固结过程中停留荷载出现的次数。

有效荷载的变异系数由下式求得:

$$V_{xe} = \frac{\sqrt{\sum a_i^2}}{\sum a_i} V_{xr} = \beta V_{xr} \quad (38)$$

式中  $V_{xr}$ —— $X_r$  的变异系数;

$\beta$ ——取决于  $n$  且小于 1 的系数。

由于固结过程比较长, 随着  $n$  增大,  $\beta$  将会减小, 因此有效荷载的变异性比土的参数(如压缩系数)的变异性或计算方法的不定性小得多。

临时荷载包括雪、风、波浪、地震以及短暂的停留荷载, 其一般特征如图 6 所示。在计算沉降时可忽略这类荷载, 但对稳定问题和瞬时变形, 临时荷载是危险的。

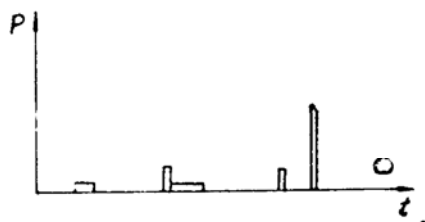


图 6

瞬时荷载服从泊桑分布, 并能用公式(35)来表示使用期间的最大荷载的概率分布函数,  $X_r$  为每一次出现时的最大荷载值。如果已知临时荷载的年最大值, 则使用期间最大荷载的概率分布函数可用与公式(36)相同的形式表示, 其中  $X_r = X_a$  为假定每年之间独立无关的年最大荷载,  $n = T$  为基础的使用年限。年最大荷载可用极值 I 型分布拟合:

$$F_{x_a}(x) = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-\beta}{a} \right) \right] \quad (39)$$

式中

$$a = \frac{\hat{\sigma}}{1.28255},$$

$$\beta = \bar{x} - 0.45005 \hat{\sigma}$$

根据公式(36)即可求得使用期  $n$  年内最大值的概率分布

$$F_{xm}(x) = \left\{ \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-\beta}{\alpha} \right) \right] \right\}^n = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-\beta-\alpha \ln n}{\alpha} \right) \right] \quad (40)$$

【例5】根据全国有雪地区年最大雪压资料, 平均值 $\bar{S}_t = 0.401S_t$ , 标准差 $\hat{\sigma} = 0.284S_t$ ,  $S_t$ 为现行规范的雪压标准值, 求50年内最大雪荷载的概率分布。

解:  $\alpha = \frac{0.284S_t}{1.28255} = 0.221S_t$

$$\beta = 0.401S_t - 0.45005 \times 0.284S_t = 0.273S_t$$

根据公式(39)得

$$F_{s1}(x) = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-0.273S_t}{0.221S_t} \right) \right]$$

根据公式(40)得

$$F_{sm}(x) = \left\{ \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-0.273S_t}{0.221S_t} \right) \right] \right\}^{50} = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-1.139S_t}{0.221S_t} \right) \right]$$

土本身产生的荷载是岩土工程中经常碰到的一种荷载, 它的概率分布与土的容重的变异性有关, 亦与地下水位的波动和土的内摩擦角的变异性有关。

土容重的变异系数一般是不大的, 从上海地区的统计资料来看, 一般在0.02~0.04之间。褐黄色表土层的变异性较大些, 最大的可达0.13, 这可能包含了地下水位随机波动的影响。

侧向土压力既与土的容重有关, 又与侧向土压力系数 $K_A$ ,  $K_P$ 及 $K_0$ 有关。前二个土压力系数都是土的内摩擦角的函数, 静止侧压力系数 $K_0$ 亦可用经验关系来表示

$$K_0 = 1 - \sin \phi' \quad (41)$$

$K_0$ 的变异系数

$$V_{K_0} = \frac{\overline{\phi'} \cos \overline{\phi'}}{1 - \sin \overline{\phi'}} V_{\phi'} \quad (42)$$

式中  $V_{\phi'}$  ——土的有效内摩擦角的变异系数;

$\overline{\phi'}$  用弧度代入。

【例6】上海某工地淤泥质亚粘土的有效内摩擦角的均值 $\overline{\phi'} = 28.5^\circ$ , 标准差 $\hat{\sigma} = 4.6^\circ$ , 变异系数 $V_{\phi'} = 0.16$ , 求静止侧压力系数的变异系数。

解:  $V_{K_0} = 0.497 \times 0.16 \frac{\cos 28.5^\circ}{1 - \sin 28.5^\circ} = 0.13$

用朗肯(Rankine)公式计算主动土压力  $E_A$  时,

$$E_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (43)$$

$$V_{EA} = \sqrt{V_\gamma^2 + \frac{4\bar{\phi}^2}{\cos^2 \phi} V_\phi^2} \quad (44)$$

式中  $V_\gamma$ ——土容重的变异系数。

地下水位的季节性随机波动亦会影响荷载的变化, 使用期最低水位的概率分布函数由下式求得:

$$F_{zmin}(z) = 1 - [1 - F_{za}(z)]^T \quad (45)$$

式中  $Z_a$ ——年最低水位;

$T$ ——使用年限。

### 五、用能力-需求模型计算破坏概率

讨论了岩土设计参数和荷载的经验分布之后就可以用能力-需求模型来计算各种岩土工程问题的破坏概率。

表5给出了某些经验分布的破坏概率计算公式, 这仅适用于能力和需求具有相同分布的情况, 假如二者的分布函数不相同, 则可将经验分布的概率密度函数代入公式(11)直接计算破坏概率。

表 5

| 分布         | $f_C(C)$                                                                                                                      | $f_D(D)$                                                                                                                      | $P_f$                                                                                                                                                  |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 均匀         | $\frac{1}{C_{max} - C_{min}}$                                                                                                 | $\frac{1}{D_{max} - D_{min}}$                                                                                                 | $\frac{1}{2} \frac{D_{max} - 2C_{min} + D_{min}}{C_{max} - C_{min}}$                                                                                   |
| 指数         | $a_C \exp(-a_C C)$                                                                                                            | $a_D \exp(-a_D D)$                                                                                                            | $\frac{a_D}{a_C + a_D}$                                                                                                                                |
| 正态         | $\frac{1}{\hat{\sigma}_C \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C - \bar{C}}{\hat{\sigma}_C}\right)^2\right]$        | $\frac{1}{\hat{\sigma}_D \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{D - \bar{D}}{\hat{\sigma}_D}\right)^2\right]$        | $\frac{1}{2} - \psi\left\{\frac{\hat{C} - \bar{D}}{\sqrt{\hat{\sigma}_D^2 + \hat{\sigma}_C^2}}\right\}$                                                |
| 对数正态       | $\frac{1}{\ln C \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln C - \bar{\ln C}}{\hat{\sigma}_{\ln C}}\right)^2\right\}$ | $\frac{1}{\ln D \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln D - \bar{\ln D}}{\hat{\sigma}_{\ln D}}\right)^2\right\}$ | $\frac{1}{2} - \psi\left\{\frac{\ln\left(\frac{\bar{C}}{\bar{D}} \sqrt{\frac{1 + V_D^2}{1 + V_C^2}}\right)}{\sqrt{\ln(1 + V_C^2)(1 + V_D^2)}}\right\}$ |
| $\beta$ 分布 | $\lambda_C (C - C_{min})^{\alpha_C - 1} \times (C_{max} - C)^{\beta_C - 1}$                                                   | $\lambda_D (D - D_{min})^{\alpha_D - 1} \times (D_{max} - D)^{\beta_D - 1}$                                                   | $\lambda_D \int_{D_{min}}^{D_{max}} \frac{B_x(a_C, \beta_C)}{B(a_C, \beta_C)} \times (D - D_{min})^{\alpha_D - 1} (D_{max} - D)^{\beta_D - 1} dD$      |

表5中  $B(\alpha_c, \beta_c) = \frac{\Gamma(\alpha_c)\Gamma(\beta_c)}{\Gamma(\alpha_c + \beta_c)}$  (见公式25和26), 称为  $B$  函数;  $B_x(\alpha_c, \beta_c)$  称为不完全的  $B$  函数, 计算方法与  $B$  函数相同, 但在用公式(24)计算归一化变量时  $x$  用  $D$ , 而上、下限则用  $C_{max}$  和  $C_{min}$ , 这个归

一化变量用  $u$  表示,  $u = \frac{D - C_{min}}{C_{max} - C_{min}}$

在基础设计中, 地基支承建筑物基础的能力就是地基极限承载力  $q$ , 而需求就是施加于地基的基底压力  $p$ ; 在土坡稳定分析中, 潜在滑动面上的抗滑力或抗滑力矩就是使土坡保持稳定的能力, 而滑动力或滑动力矩就是需求; 在挡土结构物设计中, 每一种破坏模式都可分别给出能力和需求的对应物理量。

地基极限承载力计算公式的一般形式如下:

$$q = N_B \gamma_B B + N_D \gamma_D D + N_C C \quad (46)$$

式中  $B$ ——基础宽度;  
 $D$ ——基础埋深;  
 $\gamma_B$ ——持力层土的容重;  
 $\gamma_D$ ——基础底面以上侧土容重;  
 $C$ ——土的内聚力;

$N_B, N_D, N_C$ ——取决于内摩擦角  $\phi$  的承载力系数。

地基极限承载力的标准差为:

$$\hat{\sigma}_q = \sqrt{\hat{\sigma}_c^2 \left( \frac{\partial q}{\partial c} \right)^2 + \hat{\sigma}_\phi^2 \left( \frac{\partial q}{\partial \phi} \right)^2 + \hat{\sigma}_{\gamma_D}^2 \left( \frac{\partial q}{\partial \gamma_D} \right)^2 + \hat{\sigma}_{\gamma_B}^2 \left( \frac{\partial q}{\partial \gamma_B} \right)^2} \quad (47)$$

地基极限承载力的变异系数  $V_q$  由下式求得:

$$V_q = \frac{\hat{\sigma}_q}{q} \quad (48)$$

如用普朗特(Prandtl)公式计算, 承载力系数如下式所示:

$$\left. \begin{aligned} N_D &= N_\phi e^{\pi/4 \tan \phi} \\ N_C &= (N_D - 1) \cot \phi \\ N_B &= \frac{N_D - 1}{2} \sqrt{N_\phi} \\ N_\phi &= \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

承载力系数对于  $\phi$  的一阶偏导数如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_D}{\partial \phi} &= \frac{N_D \pi}{\cos^2 \phi} + \frac{\tan(45^\circ + \frac{\phi}{2})}{\cos^2(45^\circ + \frac{\phi}{2})} e^{\pi/4 \tan \phi} \\ \frac{\partial N_C}{\partial \phi} &= \frac{\partial N_D}{\partial \phi} \cot \phi - \frac{N_D - 1}{\sin^2 \phi} \\ \frac{\partial N_B}{\partial \phi} &= \frac{N_D - 1}{2} \frac{1}{\cos^2(45^\circ + \frac{\phi}{2})} + \frac{\sqrt{N_\phi}}{2} \frac{\partial N_D}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

若已知土的设计参数的统计量,分别代入公式(46)~(48)即可求得地基极限承载力的均值、标准差与变异系数。

【例7】已知基宽3 m,埋深2 m,  $p = 360 \text{ kPa}$ ,  $V_D = 0.25$ ,  $\gamma_B = \gamma_D = 21.5 \text{ kN/m}^3$ ,  $\bar{\sigma}_1 = 0.1 \text{ kN/m}^3$ ,  $\bar{\phi} = 0.33$  (弧度),  $\bar{\sigma}_\phi = 0.024$ ,  $\bar{c} = 31.68 \text{ KPa}$ 。假定土的参数都符合正态分布,计算破坏概率。

解:用公式(49), (50)求得

$$N_\phi = 1.96, \quad N_D = 5.74, \quad N_C = 13.84, \quad N_B = 3.32,$$

$$\frac{\partial N_D}{\partial \phi} = 32.28, \quad \frac{\partial N_C}{\partial \phi} = 49.1, \quad \frac{\partial N_B}{\partial \phi} = 29.6,$$

计算四个参数的偏导数

$$\frac{\partial q}{\partial c} = 13.84, \quad \frac{\partial q}{\partial \phi} = 4848.8, \quad \frac{\partial q}{\partial \gamma_D} = 11.48, \quad \frac{\partial q}{\partial \gamma_B} = 9.96.$$

将以上数据代入公式(47), (46)得  $\hat{\sigma}_q = 127.3 \text{ kPa}$ ,  $\bar{q} = 899.4 \text{ kPa}$ 。根据公式(48)可得  $V_q = 0.14$ 。然后按正态分布计算得  $P_f = 2.8 \times 10^{-4}$ 。

对于土坡稳定问题考虑用圆弧法。若圆弧半径为  $R$ , 弧长为  $L$ , 则

$$\text{滑动力矩 } M_D = R \sum_{i=1}^n T_i;$$

$$\text{抗滑力矩 } M_C = R(cL + \text{tg}\phi \sum_{i=1}^n N_i);$$

$$\text{中心安全系数 } CFS = \frac{\bar{M}_C}{\bar{M}_D} = \frac{\bar{c}L + \text{tg}\phi \sum N_i}{\sum T_i} \quad (51)$$

假定滑动力矩为确定性数值,只考虑强度参数的变异性,抗滑力矩的标准差  $\bar{\sigma}_{M_C}$  和变异系数  $V_{M_C}$  分别为

$$\hat{\sigma}_{M_C} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{M}_C}{\partial c}\right)^2 \hat{\sigma}_c^2 + \left(\frac{\partial \bar{M}_C}{\partial \text{tg}\phi}\right)^2 \hat{\sigma}_{\text{tg}\phi}^2} \quad (52)$$

$$V_{M_C} = \frac{\hat{\sigma}_{M_C}}{\bar{M}_C} \quad (53)$$

【例8】已知土坡高度为6 m,  $\gamma = 1.9 \text{ t/m}^3$ ,  $\bar{\phi} = 12^\circ$ ,  $\bar{c} = 1.7 \text{ t/m}^2$ , 坡角  $\beta = 55^\circ$ ,  $L = 9.95 \text{ m}$ ,  $\sum T = 19.86 \text{ t/m}$ ,  $\sum N = 27.76 \text{ t/m}$ , 若  $c$  和  $\text{tg}\phi$  都服从对数正态分布, 已知  $V_c = 0.10$ ,  $V_{\text{tg}\phi} = 0.05$  计算破坏概率。

解: 
$$CFS = \frac{1.7 \times 9.95 + 27.76 \times \text{tg}12^\circ}{19.86} = 1.15$$

$$\bar{M}_C = (1.7 \times 9.95 + 27.76 \times \text{tg}12^\circ)R = 22.82R$$

$$\hat{\sigma}_c = 0.17, \quad \hat{\sigma}_{\text{tg}\phi} = 0.011$$

$$\hat{\sigma}_{Mc} = R \sqrt{(9.95 \times 0.17)^2 + (27.76 \times 0.011)^2} = 1.72R$$

$$V_{Mc} = \frac{1.72R}{22.82R} = 0.075$$

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi \left\{ \frac{\ln 1.15 \sqrt{\frac{1}{1+0.075^2}}}{\sqrt{\ln(1+0.075^2)}} \right\} = \frac{1}{2} - \psi[1.83] = \frac{1}{2} - 0.466 = 0.034$$

## 六、系统可靠性的组合

前面各节已讨论了单个破坏模式的破坏概率计算问题,但实际工程的破坏常常是许多因素共同作用的结果,这就要进一步研究各个因素引起的破坏概率的组合。如果一个工程的可靠性依赖于各个部件的可靠性,我们可以把它看成是由若干个子系统(或分量)组成的一个大系统,大系统的可靠性由每个子系统的可靠性以一定方式组合而成。

我们可以用逻辑图来研究子系统之间的相互关系及其对大系统的影响。第一步,确定系统完成预期功能的方法;第二步,确定完成系统功能所必需的部件和找出使系统失效的分量;第三步,弄清每个分量的破坏模式及其对大系统完成功能的影响,进而采取措施来保障大系统的可靠性。

图7是一个大系统模型的逻辑图,由七个分量组成,从输入到输出由三个子系统并联构成,第一个子系统是由A、B二个分量串联而成的;第二个子系统只有一个分量;第三个子系统则由E和F分量先并联再和D、G分量串联而成。

在串联系统中,任一分量的失效都会使整个系统失效;而并联系统则是由几个分量同时完成一个功能,只有每一个分量都失效,才会使整个系统失效。应当注意的是,逻辑图中的串联或并联与实际系统结构的联结形式无关,有时在系统结构图中是并联的分量,按其失效模式在逻辑图中却是串联,相反的情况也是如此。例如采用灌浆防渗时,在系统结构图中灌浆孔之间的结构联结是并联的,但任一灌浆孔的失效都会引起整个防渗功能失效,因此在逻辑图上应当用串联来表示。

串联元件的逻辑图如图8所示,从输入到输出是单行路线,象一根链条一样,任一环节的破坏都会使整个系统遭到破坏,整个系统可靠工作的前提是每一分量都要可靠,因此整个系统的可靠性R是每一分量可靠性 $R_i$ 的乘积,如有n个分量,R、 $P_f$ 可用下式表示:

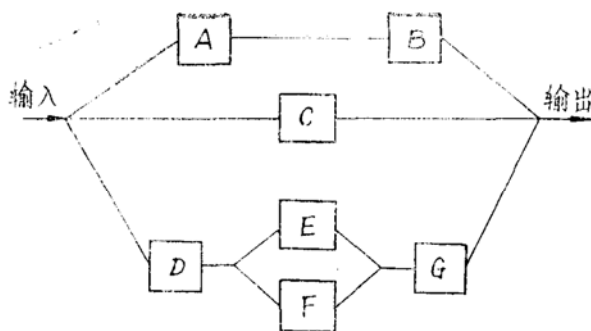


图7

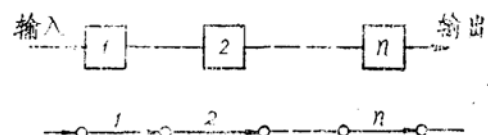


图8

$$\left. \begin{aligned} R &= \prod_{i=1}^n R_i \\ P_f &= 1 - R = 1 - \prod_{i=1}^n R_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

如果  $n$  个分量的破坏概率  $P_i$  近似相等, 且其均值等于  $P$ ,

$$\text{则} \quad P_f = 1 - (1 - P)^n \quad (55)$$

并联元件的逻辑图如图 9 所示, 从输入到输出之间有  $n$  条联络路径, 只有在全部路径被堵塞时整个系统才破坏。因此整个系统的破坏概率  $P_f$  是每个分量的破坏概率  $P_i$  之积, 即

$$P_f = \prod_{i=1}^n P_i \quad (56)$$

如果  $n$  个分量的破坏概率  $P_i$  近似相等, 且其均值等于  $P$ ,

$$\text{则} \quad P_f = P^n \quad (57)$$

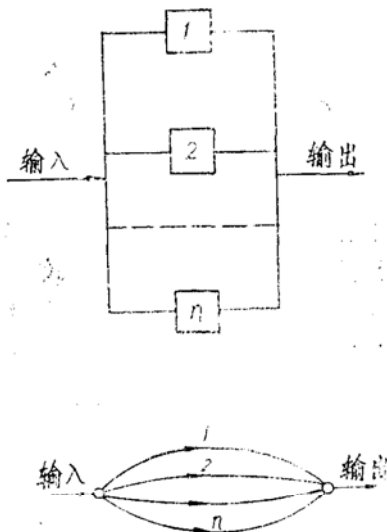


图 9

任何复杂模型都可分解为上述两种最基本元件的组合, 然后按公式(54), (56)综合求得整个系统的破坏概率。

【例 9】对图 7 所示的系统计算系统的破坏概率。

$$P_f = [1 - (1 - P_A)(1 - P_B)][P_C] \\ [1 - (1 - P_D)(1 - P_E P_F)(1 - P_G)]$$

实际工程中还会碰到这样的问题, 在由  $n$  个子系统或分量组成的大系统中, 要求至少有  $r$  个分量必须为整个系统的可靠工作起作用, 亦即当  $n-r$  个分量破坏时, 大系统仍能可靠地工作, 这可用具有冗余系统的模型来描述, 这种模型称为“ $n$ 中之 $r$ ”模型( $r$ -out-of- $n$  model)。为了讨论这种模型, 先介绍二项分布的概念。

当一个事物只有两种可能的状态或结果时可以使用二项式。研究可靠性时, 只有成功  $R$  与失效  $P$  两种状态, 且  $P + R = 1$ , 则  $(P + R)^n = 1$ , 展开后得

$$P^n + n P^{n-1} R + \frac{n(n-1)}{2!} P^{n-2} R^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} P^{n-3} R^3 + \cdots + R^n = 1 \quad (58)$$

在上式中,  $P^n$  项中  $R$  的幂次为零, 故称为零项, 则  $R$  的  $r$  次幂的项称为  $r$  项, 可表达为

$$\frac{n!}{r! (n-r)!} P^{n-r} R^r \quad (59)$$



式中  $n, r$ ——分别为事件总数及成功的事件数。

我们分析展开式(58)中每一项的意义,  $n$  表示有  $n$  个具有相同可靠性  $R$  和相同破坏概率  $P$  的分量。零项表示所有分量都破坏的概率, 相当于并联元件; 最后一项表示所有分量都可靠的概率, 相当于串联元件。中间任意  $r$  项表示只有  $r$  个分量是可靠的概率, 也就是  $n$  中之  $r$  模型要讨论的问题。如令公式(59)

中的系数  $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$ , 并称为二项系数, 则公式(59)就称为二项分布  $b(r; n, P)$

$$b(r; n, P) = \binom{n}{r} (1-P)^r P^{n-r} \quad (60)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, n$$

在  $n$  中之  $r$  模型中, 至少要有  $r$  个分量起作用, 即意味着包括  $r+1, r+2, \dots$  直至  $n$  个分量全部起作用在内, 因此整个系统的可靠性用下式计算:

$$R = \sum_{k=r}^n b(k; n, P) \quad (61)$$

整个系统的破坏概率

$$P_f = 1 - \sum_{k=r}^n b(k; n, P) = 1 - \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} (1-P)^k P^{n-k} \quad (62)$$

$n$  中之  $r$  模型从输入到输出之间有  $\binom{n}{r}$  条路径, 每条路径包含有  $r$  个不同的单元, 这是从  $n$  个分量中任意抽取组合的。

**【例10】**  $n$  中之  $r$  模型中每一分量的破坏概率  $P=0.01$ ,  $n=5$ ,  $r=4$ , 试画出逻辑图并计算整个系统的破坏概率。

解:  $\binom{n}{r} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!} = 5$ , 有 5 条路径, 逻辑图如图10所示。

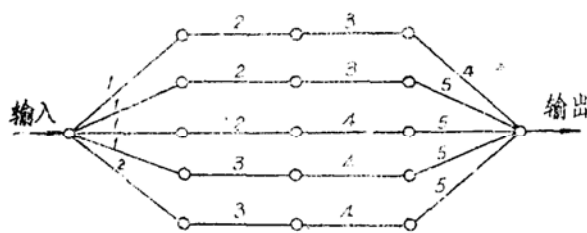


图10

用公式(62)计算整个系统的破坏概率

$$P_f = 1 - \sum_{k=4}^5 \binom{5}{k} (1-P)^k P^{5-k} = 1 - \binom{5}{4} (1-P)^4 P - \binom{5}{5} (1-P)^5 P^0 = 0.001$$

#### 参 考 文 献

- [4] Tang, W. H., Probabilistic Evaluation of Loads, J. Geotech. Div., ASCE, Vol. 107, No. SM3, 1981, pp. 287~304.