

岩土介质中应力波传播问题的有限元分析

孙 钧 吴逸群

(同济大学, 上海)

提 要

本文以八节点等参数有限单元法研究了二维时空域岩土介质内弹性平面应变波的传播问题, 以及波与地下结构相互作用的动力反应。当荷载对时间的导数有间断时, 在求解上述波传播问题的有限元数值计算中将普遍出现所谓的“初始病态”和“超越现象”。本文从变分原理和波动理论出发, 对出现以上情况的原因作了分析; 提出了考虑加速度间断特性来改进数值解精度的方法。并作了详尽的讨论。若干算例均与理论解作了比较, 其结果是满意的。

一、波传播计算中有限元法存在的问题

采用有限元法解波传播问题的基本思路是将所关心的区域先作几何剖分, 在每个子区域内用多项式函数定义位移函数, 使子域内任一点的位移可由其节点位移唯一表出。再利用弹性力学公式将区域内的应力和应变分别用节点位移矢量表示。最后, 用变分原理或虚功方程把波动方程化为一组等价的常微分方程, 并按数值积分化为线性代数方程组求解。

本文使用八节点等参单元, 单元特性的数值积分根据 2×2 高斯求积法计算。使用集中质量矩阵。节点应力计算进行了应力修匀。运动方程的解采用无条件稳定的威尔逊 (Wilson)- θ 法, θ 取用 1.4。计算公式可参见有关资料^[1]。

采用上述方法对一维平面波在弹性介质中的传播进行了有限元数值计算。算例模型和文献[2]所取的相似, 见图1所示。单元为 1^4 个, 节点为73个, 底部边界设置了人为的粘性阻尼^[3]。

计算表明, 当荷载随时间变化剧烈并有急骤转折, 或者网格划分较粗疏(对波速而言)、时间步长取得较大(对给定的荷载特征时间而言)时, 数值计算结果将普遍存在着所谓的“初

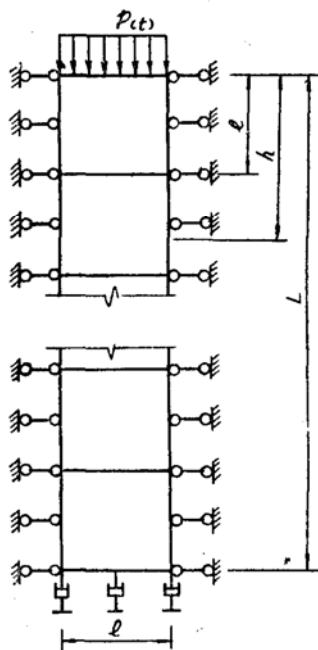


图1 一维平面波传播问题计算模型

始病态”和“超越现象”。这是指在加载早期荷载由零向上转折而升压时,其最初一些时步的计算值往往显著低于理论值;而在以后荷载随时间变化发生向下转折时,计算值又显著高于理论值。在实际计算时,往往由于计算机贮存容量和计算时间的限制而不得不采用较粗网格和较大步长时,情况更为严重。在相同条件下,遇到波形复杂、荷载折角较多时,这种误差将愈大,随着波传播距离增加,应力峰值衰减加剧,甚至使波形根本失真。这是数值方法本身具有的缺点。至今对于这种缺点发生的原因及其改进办法还没有得到很好的解决。

二、运动方程修正及对数值解的初始病态和超越现象的讨论

根据波动方程理论可知^[4],在波传播问题中,当边界荷载随时间变化具有折线状时,将出现弱间断解,即解的二阶导数或加速度出现间断点,而且加速度间断将沿着特征线传播。这是波传播问题中很重要的一个特征。但是,在现有的动力问题有限元控制方程中,并没有考虑到这个特征。认为解出的动位移 $\{w(t)\} \in C^2[0, T]$,即位移的二阶导数在所讨论的整个时间域 $0 \rightarrow T$ 内为连续。本节根据变分原理^[5](或虚功方程)和波动方程动力学条件,以一维平面弹性波为例,对现有的波动问题有限元控制方程提出了修正。这个修正当边界荷载属于 $C^1[0, T]$ 时(即为古典解时)与现有方程相等价,而当边界荷载属于 $C^0[0, T]$ 而不属于 $C^1[0, T]$ 时,将出现上述的加速度间断的修正项。这是现有数值方法没有考虑到的。由此,将可阐明现有方法在数值计算结果中出现初始病态和超越现象的原因是:在时间积分各步长间没有反映上述的加速度间断性质。现将本文建议的修正计算演引如下:

(一)对有限元离散化运动方程的讨论及修正

文献[5]指出了均匀各向同性、弹性小变形动力问题运动微分方程相应的等价变分问题是寻找满足位移边界条件的位移函数 $u_i (i=1, 2, 3)$,使

$$\delta \int_0^T L dt = 0 \quad (1)$$

其中, $L = T - U$, 是拉格朗日函数。

$$\text{动能} \quad T = \frac{1}{2} \int_v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \rho dv \quad (2)$$

$$\text{势能} \quad U = \int_v A(e_{ij}) dv - \int_{S_0} \bar{p}_i u_i ds \quad (3)$$

$$\text{应变能密度} \quad A(e_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (4)$$

上三式中, σ_{ij}, e_{ij} ——分别为任一点的应力和应变张量;

u_i ——为该点沿 x_i 方向的位移分量;

ρ ——材料密度;

$\bar{p}_i$ ——为应力边界 S^σ 上沿 x_i 方向给定的外力分量。

将以上能量关系代入式(1), 可得

$$\int_0^T \left[\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dv - \delta T - \int_{S^\sigma} \bar{p}_i \delta u_i ds \right] dt = 0 \quad (5)$$

式(5)即通常所称的虚功方程。将用节点位移 $\{w(t)\}$ 表示的位移函数式代入上式, 经过分部积分, 并利用初始条件, 可得

$$\int_0^T \delta \{w(t)\}^T \left([M] \{\ddot{w}(t)\} + [K] \{w(t)\} - \{R(t)\} \right) dt = 0 \quad (6)$$

式中 $[M]$, $[K]$ 和 $\{R(t)\}$ 分别为质量矩阵、刚度矩阵和动载等效节点力矩阵。

显然, 当假定式(6)中圆括号内的函数在所讨论的时间段 $[0, T]$ 内为连续, 即

$$\{w(t)\} \in C^2[0, T] \quad (7)$$

时, 根据拉格朗日引理, 得其等价方程为

$$[M] \{\ddot{w}(t)\} + [K] \{w(t)\} = \{R(t)\} \quad t \in [0, T] \quad (8)$$

这就是现有文献中常用的动力有限元离散化方程。

实际上, 式(7)对波动问题并不是经常能满足的。当边界荷载 $\bar{p}(t) \in C^0[0, T]$ 而 $\bar{p} \notin C^1[0, T]$ 时, 波动方程可能出现广义解, 即位移的二阶导数在特征上发生间断, 且间断沿特征传播^[4]。上述的有限元位移解具有二阶连续导数, 正是由于没有考虑到这个特征的结果。为此, 将式(5)改写成时间增量形式:

$$\sum_{i=0}^T \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dv - \delta T - \int_{S^\sigma} \bar{p}_i \delta u_i ds \right) dt = 0 \quad (9)$$

与前述的推导相类似, 并再利用 $\{w(t)\}$ 和 $\{\dot{w}(t)\}$ 的连续条件, 且假定

$$\{w(t)\} \in C^2[t_i, t_{i+1}] \quad (10)$$

可知其相应的等价方程为

$$[M] \{\ddot{w}(t)\} + [K] \{w(t)\} = \{R(t)\} \quad (11)$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

式(11)与现有方法不同, 它允许 $\{\ddot{w}(t)\}$ 在 $t_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 时刻交接处发生间断。

为完全解出方程(11), 必须确定 $\{w(t)\}$ 的间断条件。为此, 根据动力相容条件^[4]可知

$$\rho \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right| = \left| \sigma_{ij, j} \right| \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

对于内结点 m , 将有

$$\rho \left[\ddot{w}_m(t) \right] = \left[\sigma_{ij, j} \right]_m \quad (13)$$

在上两式中, 脚标 j 表示对沿 x_j 坐标方向分量的偏导数; 符号 $[\cdot]$ 表示该量左右所具有的间断跳跃值, 对于边界节点, 将根据具体荷载情况而定。

对于一维平面弹性波, 加速度间断条件有特别简单的形式, 下面作一推算。

在一维弹性平面波传播情况下, 有

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (14)$$

其中 $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, 为弹性波传播速度;

E ——介质材料的弹性模量。

式(14)的通解为

$$u = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

若只有左行波时, 解 u 只取第二项, 即

$$u = G\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (15)$$

将式(15)分别对 x 和 t 各微分一次, 可得

$$\sigma = \rho c v \quad (16)$$

式中 v ——介质材料的质点位移速度。

由解式(15)可见, 此关系式在特征线($x + ct = \text{常数}$)上具有相同的 σ 和 v 值。

设边界一端作用的动荷载 $p(t) \in C^0$ 而 $\notin C^1$, 即其本身连续, 但其一阶导数可发生间断, 则利用边界应力条件并经过简单的变量代换后可得

$$v = p\left(t + \frac{x}{c}\right) / \rho c \quad (17)$$

式(17)两边对 t 微分, 考虑到 $p(t)$ 的导数在某些点的间断性质, 可写成下面的统一式子:

$$[\dot{v}] = \left[\dot{p}\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] / \rho c \quad (18)$$

由式(18)明显可见, 当 $x + ct = \text{常数}$ 时, 其加速度间断值不变, 这就是通常所说的间断沿特征传播。

设节点 x_m , 在 t_i 时刻满足 $x_m + c(t_i - t_j) = 0$, 则

$$[\ddot{w}(x_m, t_i)] = [\dot{p}(t_j)] / \rho c \quad (19)$$

用它可确定一维弹性平面波传播时节点加速度的间断跳跃值。

根据上述推导, 由于用式(10)来代替式(7), 可取函数比原来的扩大了, 有理由期望所得的近似解将更接近于真实解。由式(19)还可以看出: 当 $p(t) \in C^1$ 时, $[\dot{p}(t)] \equiv 0$, 故 $[\ddot{w}(t)] \equiv 0$, 于是修正方程与原有的方程相等价。

(二)用威尔逊- θ 法求解修正方程, 以及对解的初始病态和超越现象的分析

利用威尔逊- θ 法对运动方程(式(11))进行数值积分, 以求解上述修正方程, 其离散的代数方程将具有与现有公式^[1]相似的形式, 不同的是公式中的起始加速度项应再附加一间断项, 即用

$$\ddot{w}_{t_i}^+ = \ddot{w}_{t_i}^- + [\ddot{w}_{t_i}] \quad (20)$$

来代替原来的 $\ddot{w}_{t_i}$ 。

为明确起见, 可将原有的数值计算公式改写为

$$\begin{aligned} [\hat{K}]\{\hat{\Delta w}_t\} &= \{\hat{\Delta R}_t\} + [M](a_2\{\dot{w}_t\} + 2\{\ddot{w}_t^+\}) \\ &= \{\hat{\Delta R}_t\} + [M](a_2\{\dot{w}_t\} + 2\{\ddot{w}_t^-\}) + 2[M]\{\ddot{w}_{t_i}\} \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\{\hat{\Delta R}_t\} = \{R_t\} - [K]\{w_t\} + \theta(\{R_{t+\Delta t}\} - \{R_t\})$$

原有的加速度和位移的增量表达式可改写成

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{w}_t &= \ddot{w}_{t+\Delta t}^- - \ddot{w}_t^+ = a_4 \hat{\Delta w}_t + a_5 \dot{w}_t + a_6 \ddot{w}_t^+ \\ &= a_4 \hat{\Delta w}_t + a_5 \dot{w}_t + a_6 \ddot{w}_t^- + a_6 [\ddot{w}_{t_i}] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_t &= \Delta t \dot{w}_t + a_3 (\Delta \ddot{w}_t + 3\ddot{w}_t^+) \\ &= \Delta t \dot{w}_t + a_3 (\Delta \ddot{w}_t + 3\ddot{w}_t^-) + 3a_3 [\ddot{w}_{t_i}] \end{aligned} \quad (23)$$

在式(21)中, 设 $\hat{\Delta w}_t = \hat{\Delta w}_t^I + \hat{\Delta w}_t^{II}$, 则

$$\begin{aligned} [\hat{K}]\{\hat{\Delta w}_t^I\} &= \{\hat{\Delta R}_t\} + [M](a_2\{\dot{w}_t\} + 2\{\ddot{w}_t^-\}) \\ [\hat{K}]\{\hat{\Delta w}_t^{II}\} &= 2[M]\{\ddot{w}_{t_i}\} \end{aligned}$$

代入式(22), 可得

$$\Delta \ddot{w}_t = \Delta \ddot{w}_t^I + \Delta \ddot{w}_t^{II} + a_6 [\ddot{w}_{t_i}] \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{w}_t^I &= a_4 \hat{\Delta w}_t^I + a_5 \dot{w}_t + a_6 \ddot{w}_t^- \\ \Delta \ddot{w}_t^{II} &= a_4 \hat{\Delta w}_t^{II} \end{aligned}$$

再将式(24)代入式(23), 可得

$$\Delta w_t = \Delta w_t^I + \Delta w_t^{II} + \Delta w_t^{III} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta w_t^I &= \Delta t \dot{w}_t + a_3 (\Delta \ddot{w}_t^I + 3\ddot{w}_t^-) \\ \Delta w_t^{\text{II}} &= a_3 \Delta \ddot{w}_t^{\text{II}} \\ \Delta w_t^{\text{III}} &= 3a_3 \{\ddot{w}_t\} + a_3 a_6 \{\ddot{w}_t\} = \frac{\Delta t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \{\ddot{w}_t\}\end{aligned}$$

最后一式是将 a_3 和 a_6 的表达式代入, 经过简单运算而得。将上述各式重新排列即得

$$\left. \begin{aligned}[\hat{K}] \{\Delta \hat{w}_t^I\} &= \{\Delta \hat{R}_t\} + [M] (a_2 \{\dot{w}_t\} + 2 \{\ddot{w}_t\}) \\ \Delta \ddot{w}_t^I &= a_4 \Delta \hat{w}_t^I + a_5 \dot{w}_t + a_6 \ddot{w}_t^- \\ \Delta w_t^I &= \Delta t \dot{w}_t + a_3 (\Delta \ddot{w}_t^I + 3\ddot{w}_t^-)\end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}\text{又} \quad [\hat{K}] \{\Delta \hat{w}_t^{\text{II}}\} &= 2 [M] \{\ddot{w}_t\} \\ \Delta \ddot{w}_t^{\text{II}} &= a_4 \Delta \hat{w}_t^{\text{II}} \\ \Delta w_t^{\text{II}} &= a_3 \Delta \ddot{w}_t^{\text{II}}\end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\Delta w_t^{\text{III}} = \frac{\Delta t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \{\ddot{w}_t\} \quad (28)$$

上三式中 $[\hat{K}] = [K] + a_1 [M];$

$$\begin{aligned}a_1 &= 6/(\theta \Delta t)^2; & a_2 &= 6/(\theta \Delta t); \\ a_3 &= \Delta t^2/6; & a_4 &= a_1/\theta; \\ a_5 &= -a_2/\theta; & a_6 &= -3/\theta.\end{aligned}$$

从式(25)可见, 由于修正方程中考虑了加速度间断项, 所得的位移增量认为由三个部份所组成。第一部份 Δw_t^I 相当于原有方法的计算值, 第二、三部份则是修正项值。第二部份 Δw_t^{II} 可看作是初始速度和初始加速度为零时在发生加速度间断节点上加上一个虚拟荷载 $[M] (2 \{\ddot{w}_t\})$ 所产生的位移增量; 第三部份 Δw_t^{III} 可看作为在发生加速度间断节点上给定一个位移增量为 $\frac{\Delta t^2}{2} (1 - 1/\theta) \{\ddot{w}_t\}$ 所产生的位移增量。而修正方法的总应力将为这三部份位移增量所产生的应力之和。

利用式(19)和式(25)~(28)可以解释用修正方法能够缓减原有数值解初始病态和超越现象两类误差的原因。为清晰起见, 现在用荷载表面节点来说明。在初始加载时, $\{p(0)\} > 0$, 相当于荷载由零随时间向上转折变化而加载, 从式(19)可见, 此时荷载表面各节点都将得到一个加速度跳跃量 $\{\ddot{w}_{t_0}\} > 0$ 。这样, 从式(27), (28)看出 $\Delta \ddot{w}_t^{\text{II}}$ 和 $\Delta \ddot{w}_t^{\text{III}}$ 也都 > 0 。由于第二、三部份位移增量所产生的应力将叠加到第一部份所产生的应力上去, 而第一部份应力即原有方法的计算值, 所有三部份应力又是同号, 故按修正方法算得的应力将比原有的方法为大, 即原有解的初始病态必将得到改善。对于原有数值解的超越现象误差有所减小也可作同样说明: 当荷载随时间变化为向下转折时(例如在 $t_{\text{升}}$ 时刻), $\{p(t_{\text{升}})\} < 0$, 因而该时刻荷载表面节

点的加速度跳跃量 $\ddot{w}_{t_{\text{升}}} < 0$ 。这样, $\Delta w_{t_{\text{升}}}^{\text{II}}$ 和 $\Delta w_{t_{\text{升}}}^{\text{III}}$ 也都小于零。由于第二部份和第三部份所产生的应力与第一部份相异号, 修正方法计算得到的应力将低于原有方法的计算值, 原有数值解的超越现象也必将得到改善。

对于各中间截面情况, 也同样可以采用如上的叠加方法对各部份分别进行说明。下面介绍的算例证明了上述论断是正确的。

三、用修正方法的计算示例

(一) 平面弹性波传播问题算例

本文使用修正方程式(11)和(19)对三个算例分别进行了计算和比较。

【例1】表面作用了有升压时间的平台形均布动载, 其按时间变化如图2所示。计算取下述参数:

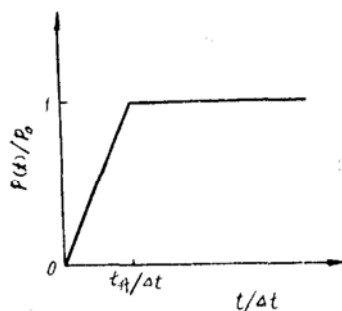


图2 有升压时间的平台形均布动载

$$\frac{c_p t_{\text{升}}}{l} = 1 ; \quad \frac{t_{\text{升}}}{\Delta t} = 1$$

$\frac{c_p t_{\text{升}}}{l}$ 和 $\frac{t_{\text{升}}}{\Delta t}$ 是当材料性质和荷载特征时间 $t_{\text{升}}$ 给定后反映网格大小 l 和时间步长 Δt 的两个参数。前者取值大时表示网格划分得细, 单元尺寸小; 后者取值大时, 表示时间步长小。 c_p 为弹性波速。此处荷载特征时间系指荷载随时间波形发生转折的时刻。计算结果如图3, 4所示。

【例2】表面上作用有随时间呈梯形变化的均布动载, 如图5所示。荷载特征时间为 t_1 , t_2 和 t_3 。计算取下列两组参数:

$$\text{第一组: } \frac{c_p t_{\text{升}}}{l} = 5 ; \text{ 而 } \frac{t_1}{\Delta t} = 5 ; \frac{t_2}{\Delta t} = 9 ; \frac{t_3}{\Delta t} = 14$$

$$\text{第二组: } \frac{c_p t_{\text{升}}}{l} = 1 ; \text{ 而 } \frac{t_1}{\Delta t} = 1 ; \frac{t_2}{\Delta t} = 2 ; \frac{t_3}{\Delta t} = 3$$

计算结果如图6, 7, 8所示。

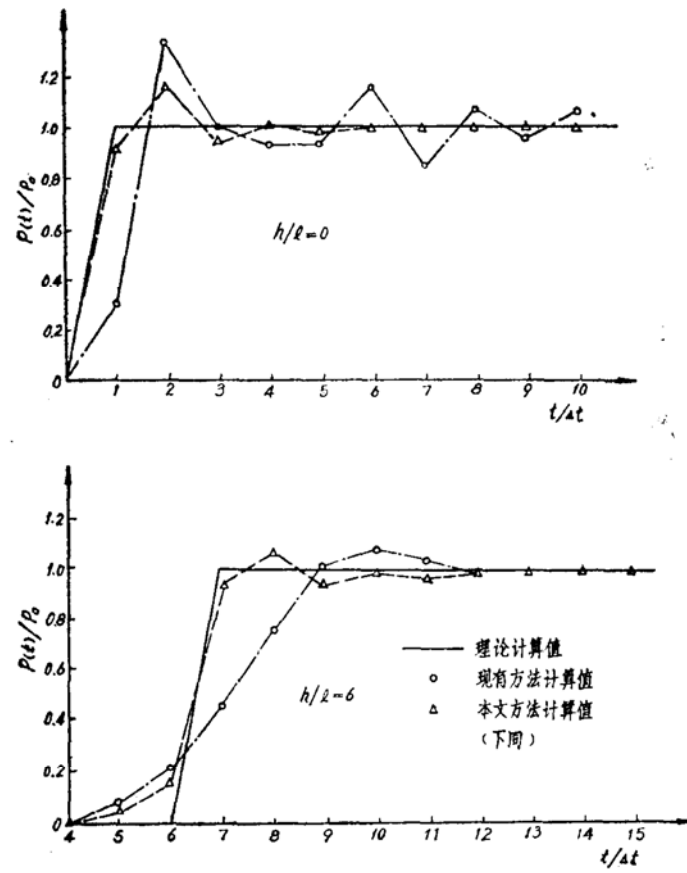


图3 不同截面的应力时程曲线

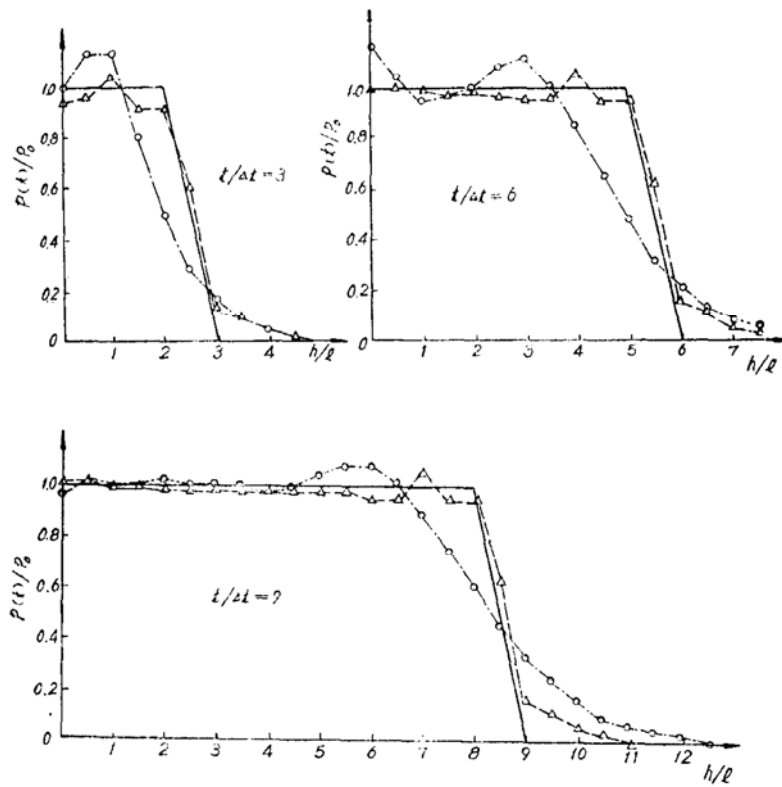


图4 不同时刻的应力空间分布

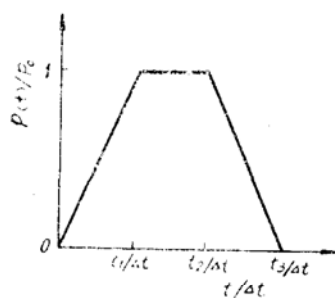


图5 随时间呈梯形变化的均布动载

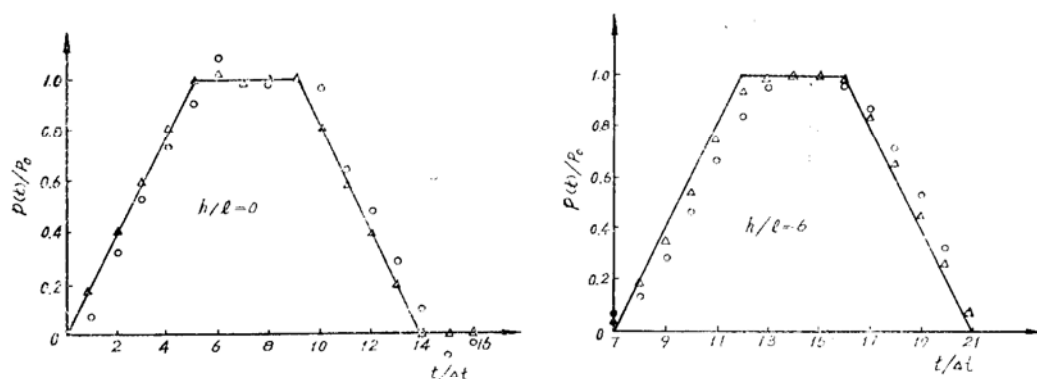


图6 第一组应力时程曲线

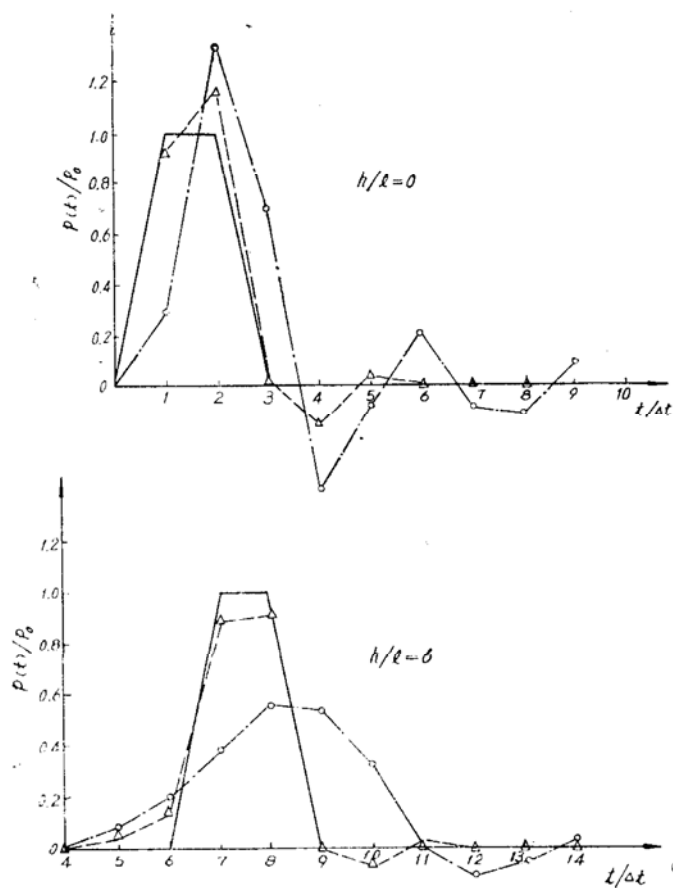


图7 第二组应力时程曲线

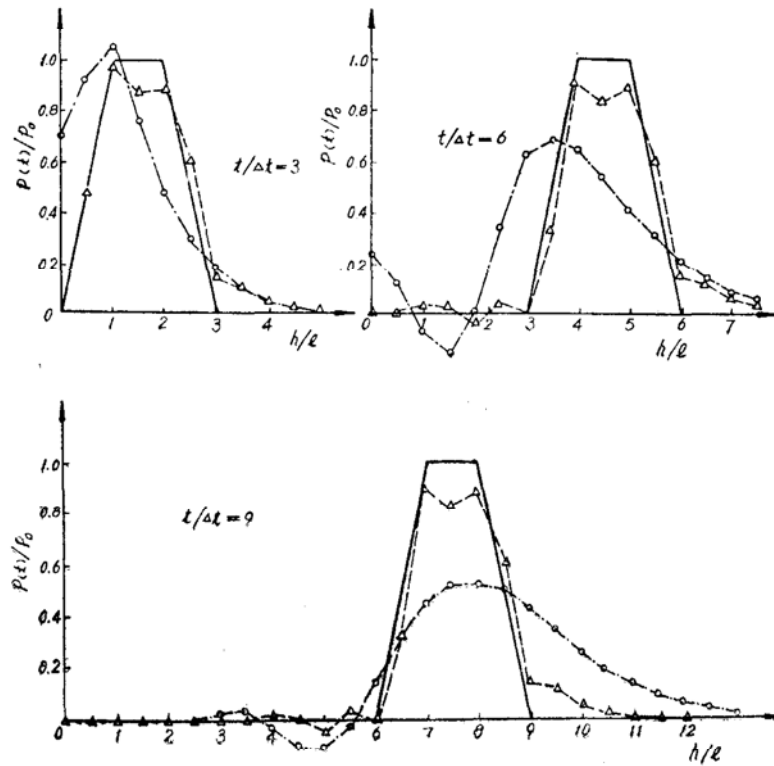


图8 第二组应力空间分布

【例3】表面上作用有随时间呈三角形变化的均布动载，如图9所示。计算参数取

$$\frac{c_p t_{\text{升}}}{l} = 1; \text{ 而 } \frac{t_{\text{升}}}{\Delta t} = 1; \frac{t^+}{\Delta t} = 4$$

计算结果如图10, 11所示。

对于有升压时间的平台形荷载，从图3和图4来看，按本文修正方法的计算结果在 $\frac{h}{l} = 0$ 处其初始病态误差减小为

8%，超越现象误差为16%；而在 $\frac{h}{l} = 6$ 处的相应误差也分别减小为8%和6%左右。随着波传播距离增加，波形失真也较小，基本上保持了原来的波形特点。对于梯形荷载，因

图6中表示的是取用网格较细密和时间步长较小的一组参数，修正计算的结果虽然比原有方法的更好些，但提高较有限，因为原有方法的计算值本身已有较好的精度，这时也可以不采取修正。反之，图7和图8则是对网格较粗疏、时间步长又较大的一组参数作出的，此处可看出修正方法的计算精度显然大大高于原有方法。同时，经修正后波形基本保持不变，峰值衰减仅约15%，这比原有方法（峰值降低几乎达50%）也显然大有改进。看来在这种情况下必须进行如上的修正计算。对于三角形荷载，从图10和图11也可看出，与上面梯形荷载的情况相类似，用修正方法计算能够收到很大效益。

从上面的一些计算可见，当荷载随时间变化关系比较复杂，或者转折较多，或者折角较剧烈，以及对于采用粗网格和较大时间步长时，原有方法是不适用的。采用本文建议的修正计算，则数值解的初始病态和超越现象两类误差都明显减小，计算精度大大提高，基本上符合了理论波形，我们认为是可取的。

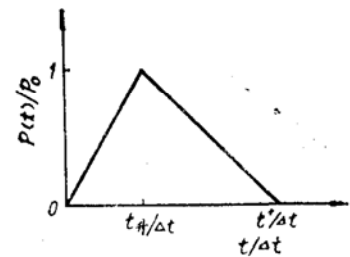


图9 随时间呈三角形变化的均布动载

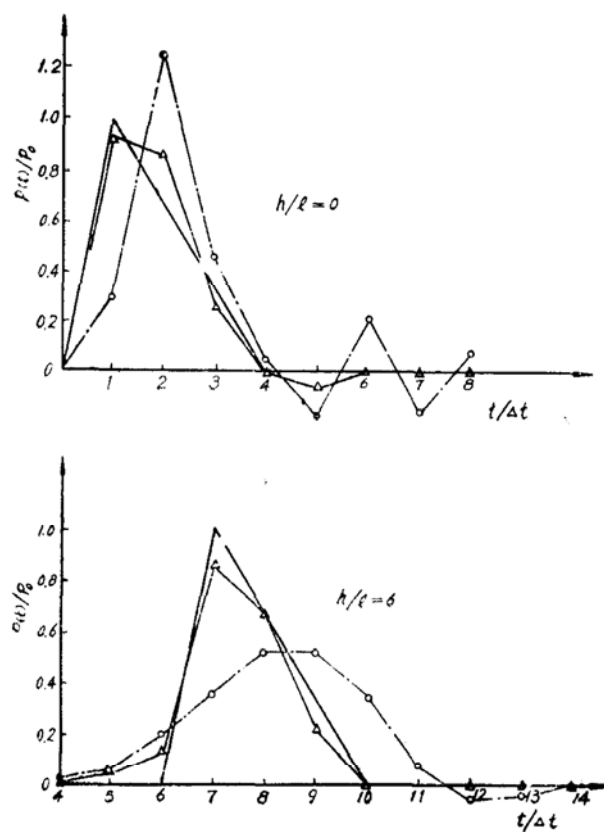


图10 不同截面的应力时程曲线

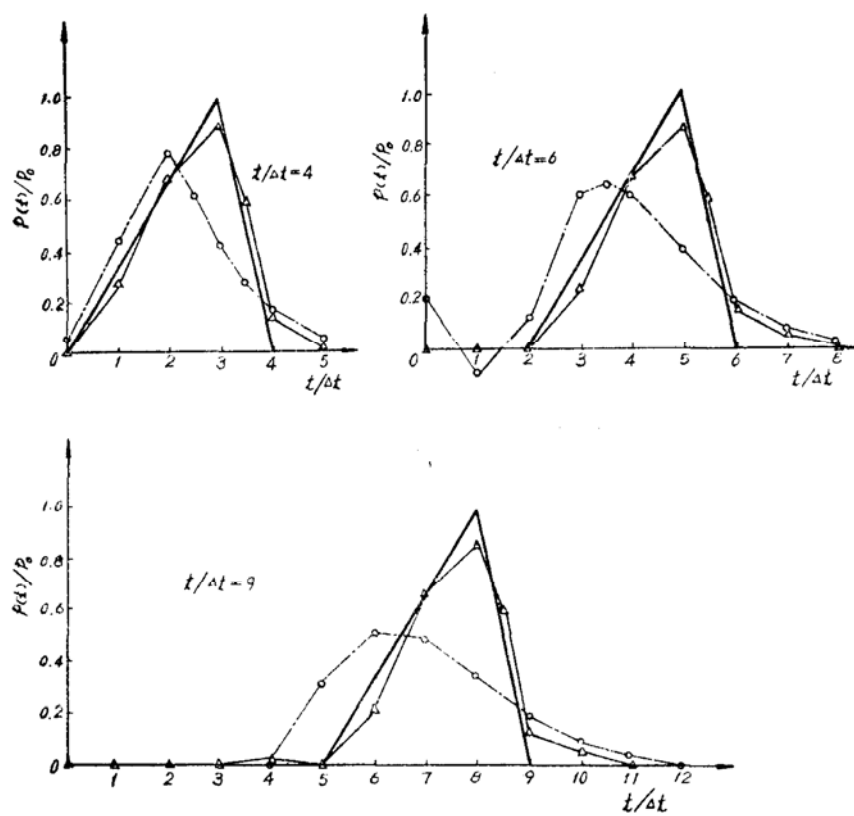


图11 不同时刻的应力空间分布

(二)弹性介质中地下结构的动力反应算例

本文利用原有方法和修正方法分别编制了岩土地层按弹性连续介质作有限元动力计算的程序,程序框图见附录,计算了圆形薄衬砌地下结构承受两种形式的地表超压作用的抗爆动力反应。两种动载形式分别为带升压时间的平台形和梯形激波。前者的升压时间取得较小,其计算结果与阶跃荷载作用下的理论解^[6]作了对比。对于梯形荷载作用,由于没有现成的理论曲线,只能比较两种方法计算值的差别。加速度间断修正仅是对结构上部土层各节点在反射波未到达之前按一维平面波结果作出修正计算。

按平面应变问题处理的边界计算模式如图12所示。地表面作用有上述的均布动载。为模拟突加的阶跃荷载以便与理论解比较,控制升压时间使 $\frac{t_{\text{升}}}{\Delta t} = 1$;而 $\Delta t = 0.02\text{ms}$ 。两侧边界水平向固定、垂直向自由。侧向尺寸应取得足够大,但考虑到计算机容量,算例只取圆孔直径的3倍左右。底部沿用人为的阻尼边界^[8],以减小底部反射波对结构应力的影响。梯形荷载(图5)参数取;

$$\frac{t_1}{\Delta t} = 1; \quad \frac{t_2}{\Delta t} = 2; \quad \frac{t_3}{\Delta t} = 3。$$

介质和结构参数与理论解取相同的值,即

$$\frac{E_m}{E} = 0.3; \quad \frac{\gamma_m}{\gamma} = 0.342; \quad \frac{\mu_m}{\mu} = 1; \quad \frac{\delta}{R} = 0.038$$

其中 $R = a + \frac{\delta}{2}$

E_m, E ——分别是介质和结构的杨氏弹性模量;

γ_m, γ ——分别是介质和结构的容重;

μ_m, μ ——分别是介质和结构的泊桑比;

δ, R, a ——分别是结构的厚度、平均半径和内半径。

有限元网格被划分成68个单元,247个节点。时间步长均取 $\Delta t = 0.02\text{ms}$ 。计算结果分别示于图13和图14。图中给出了表面分别有带升压时间的平台形和梯形两种不同形式的动载作用时,结构沿其水平直径内缘处的环向应力时程曲线。

从图13可见,由于荷载带有升压时间,与突加型的阶跃荷载作用理论解相比,波的峰值都被延缓了一段时间。修正方法计算时峰值之前的一段比原有方法的稍陡削,但基本上尚无重大差别。图中 $\sigma_{\theta\theta}$ 表示沿结构水平直径内缘处的环向应力。

从图14则可看出,修正方法与原有方法计算所得结果有较大差别。修正方法比原有方法的应力峰值约高出12%,而波形上原有方法的计算值显得较为扁平。这种现象在计算一维平面的其它波形时也出现过,对三角形荷载未作计算,但推断也会与梯形荷载的情况相近。

应该指出,两种方法所化费的计算时间是差不多的,即按修正方法计算,时间上几乎没有增加。

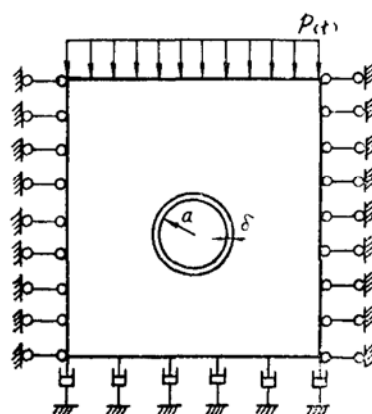


图12 岩土介质中地下结构动力反应计算模型

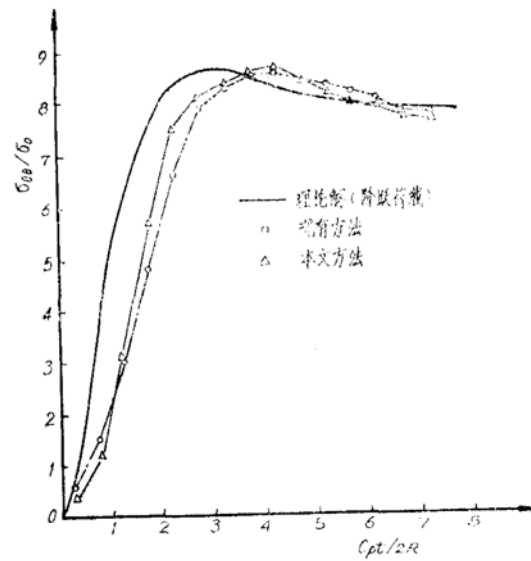


图13 有升压平台形荷载的结构水平直径处内缘环向应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 时间曲线

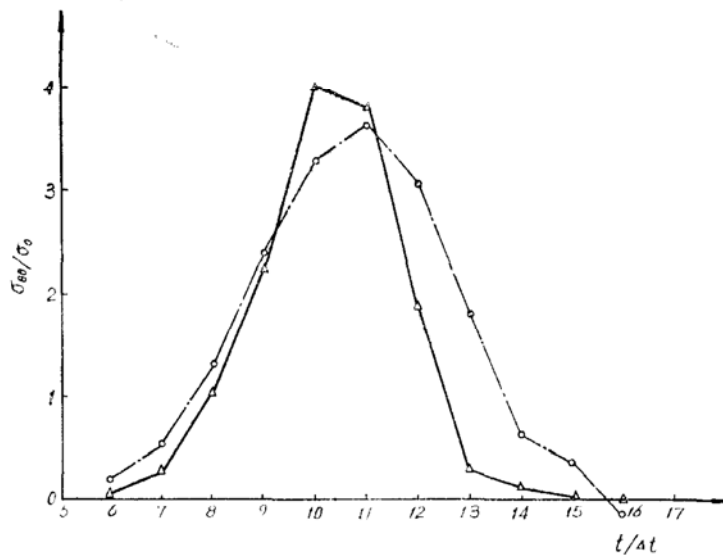


图14 呈梯形变化荷载的结构水平直径处内缘环向应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 时间曲线

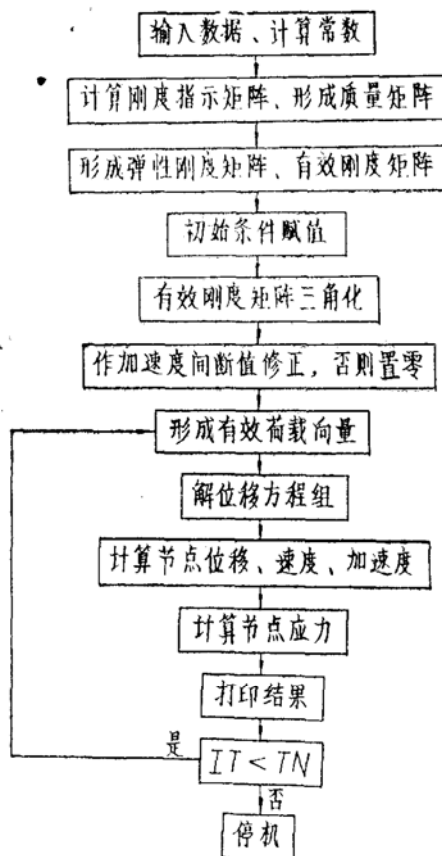
四、结 论

本文编制了用八节点等参单元分析应力波在岩土介质中传播的弹性平面应变问题并考虑加速度间断特性的有限元动力计算程序。用该程序计算了一维弹性平面波的传播以及弹性介质中地下结构的动力反应。计算结果与理论解作了比较。计算表明：只当荷载波形简单，网格划分细密，时间步长又取得足够小时，现有方法的计算结果才是可以应用的。但当荷载随时间变化比较复杂，尤其是转折较多或较剧烈；或限于计算机容量和计算时间，网格划分较粗疏、时间步长又取得较大时，仍沿用原有方法就会在数值积分中出现初始病态和超越现象，计算精度大大降低，计算波形也严重失真，因而使现有的有限元数值方法失效。本文认为，出现上述现象主要是由于在有限元离散化运动方程中忽略了对时间作数值积分时在各时步交

接上出现的加速度间断特性所造成的。本文在弹性程序方面对直接逐步时间积分的这种加速度间断性质详细地进行了研讨。采用本文建议的修正方法计算,能够改善精度,使数值计算结果更切实实用。此外,对节约内存和计算时间也是有意义的。

附录

程序框图



注: IT——实际计算的次数;

TN——计算总步数。

参 考 文 献

- [1] Bathe, K. J. & Wilson, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] 苏士功、吴逸群等, 地下结构在爆炸作用下的动力反应——有限单元法, 全国第一届爆炸力学会报告, 1977.
- [3] Lysmer, J., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Proc. ASCE. EM4, Vol 95, 1969.
- [4] 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第二分册, 1979年4月.
- [5] 钱伟长, 变分法及有限单元法(上册), 第一版, 科学出版社, 1980年8月.
- [6] Gasnet, H. & Pascal, J.C., Transient Response of a Circular Cylinder of Arbitrary

Thickness in an Elastic Medium to a Plane Dilational Wave, J. Appl. Mech., Vol., 33, No.3, Sept, 1966.

Finite Element Analysis of Stress Wave Propagation Problems in Geo-medium

Sun Jun and Wu Yi-qun

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

In this paper, a program is made using the 8-nodes isoparametric finite element method to study wave propagation problems and its interaction with the underground structure of a two-dimensional space-time domain in geo-medium elastic plane strain computer code. When a discontinuity in the derivative of the load with respect to time occurs, in the finite element numerical computations for solving the above-mentioned wave propagation problems, it will generally lead to the so-called 'initial illness' and 'overshoot phenomenon'. In the finite element analysis for solving wave propagation problems, based on the variational principle and the wave motion theory, this paper analyzes the causes which account for the above occurrence. A method to improve the computational accuracy for numerical solution by considering the acceleration-discontinued characteristics has been given and discussed in detail. Several examples are compared with theoretical solutions, the computational results are satisfactory.