

土坡稳定分析通用条分法及其改进

陈祖煜

(水利水电科学研究院, 北京)

提 要

本文简要总结了土坡稳定分析条分法的各种方法, 提出了条分法的普遍平衡方程式。对于求解此平衡方程的摩根斯顿-普赖斯法进行了如下改进:

1. 指出了对多余未知数进行假定时应注意其边界值是固定的, 不能任意假定。
2. 改进了数值计算方法, 解决了有时遇到的收敛困难的问题。
3. 建立了在变分原理基础上的数值计算方法, 找出受合理性条件控制的安全系数的上、下限, 从而获得了安全系数的严格解。

一、前 言

根据极限平衡理论建立起来的边坡稳定分析的条分法是在工程实践中得到广泛应用的一种方法。费伦纽斯(Fellenius)^[1]最初提出这种方法时, 带有相当程度的经验性质。几十年来, 许多学者致力于改进这种方法, 在理论上建立了一个完整的体系。

(一) 进行边坡稳定安全系数分析的基本原则

1. 土的破坏准则

设想土坡的一部分沿着某一滑裂面滑动。在这个滑裂面上, 土体处处达到极限平衡, 即正应力 σ'_n 和剪应力 τ 满足库伦-莫尔强度准则。

$$\tau = c' + \sigma'_n \operatorname{tg} \phi' \quad (1)$$

式中, c' , ϕ' ——为土的有效抗剪强度指标。

2. 安全系数定义

土坡沿着某一滑裂面滑动的安全系数 F 是这样定义的, 将土的抗剪强度指标降低为 c'/F 和 $\operatorname{tg} \phi'/F$, 则土体沿着此滑裂面处处达到极限平衡, 即

$$\tau = c'_e + (\operatorname{tg} \phi'_e) \sigma'_n \quad (2)$$

$$\text{式中 } c'_e = c'/F \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \phi'_e = \operatorname{tg} \phi'/F \quad (4)$$

3. 静力平衡条件

将滑动土体分成条块, 对每个条块和整个滑动土体都要满足力和力矩平衡条件。在根据静力平衡条件建立起来的方程组里, 未知数的数目超过了方程式的数目。在极限平衡方法中, 解决这一静不定问题的办法是对多余未知数进行假定, 使剩下的未知数的数目和方程数目相等, 从而解出安全系数的值。

4. 合理性要求

对多余未知数的假定并不是任意的。摩根斯顿-普赖斯^[2](Morgenstern-Price)指出, 它必须使所得的解满足下列合理性要求:

(1) 沿着划分的土条两侧垂直面上的剪应力不能超过在这个面上所能发挥的抗剪能力(参见图1), 即

$$F_v = [E' \operatorname{tg} \phi'_{ave} + c'_{ave}(y - z)] / X > F \quad (5)$$

或
$$F_{ve} = F_v / F = [E' \operatorname{tg} \phi'_{ave} + c'_{ave}(y - z)] / X > 1 \quad (6)$$

上两式中

F_v —— 沿着土条垂直面的安全系数;

F_{ve} —— 沿着土条垂直面的相对安全系数;

E' —— 作用在土条垂直面的法向有效压力;

X —— 作用在土条垂直面的剪应力;

ϕ'_{ave}, c'_{ave} —— 土条垂直面的有效平均抗剪强度指标;

$\operatorname{tg} \phi'_{ave}, c'_{ave}$ —— 分别为 $\operatorname{tg} \phi'_{av}, c'_{av}$ 被 F 值除后的值;

y —— 滑裂面的纵坐标值;

z —— 土坡面的纵坐标值。

(2) 为保证在土条接触面上不产生拉力, 作用在土条上的有效力的合力作用点不应落在土条垂直面的外面(参考图1)。

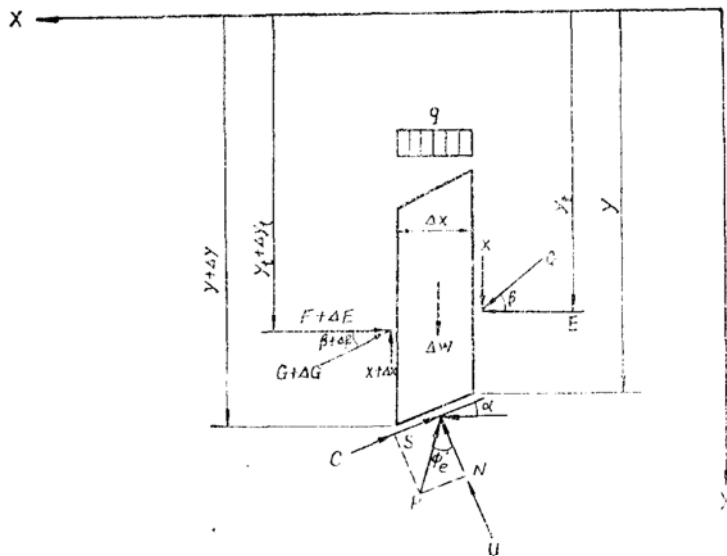


图1 作用在土条上的力

$$0 < A'_c < 1 \quad (7)$$

$$A'_c = (y - y'_t) / (y - z) \quad (8)$$

式中 y'_t ——作用在土条垂直面上的有效法向力的作用点的纵坐标值。

摩根斯顿和普赖斯指出,对多余未知量进行一系列的假定而求出一系列的安全系数后可以发现,凡是满足合理性要求的相应安全系数值互相差别都不大。也就是说,从工程实用的角度看,我们在方法中引进的假定并不影响最终求得的安全系数的值。

边坡稳定分析的任务就是要找出满足静力平衡条件又满足合理性要求的所有安全系数解的集合;确认这个集合的上、下限是非常接近的,从实用观点看,只是一个点。相应于这一点的数值就是该土坡的稳定安全系数。按这样的步骤解得的安全系数被称为“严格解”。

在上述理论体系形成的过程中,出现过一系列简化计算方法,诸如毕晓普(Bishop)的简化法^[8],斯潘塞(Spencer)^[4]法,杨布(Janbu)法^[5,6]等。摩根斯顿-普赖斯法是——在滑裂面的形状、静力平衡要求、多余未知数的选定各方面均不做任何假定的严格的方法。但是这个方法的数学处理比较粗糙,对边界条件的考虑不够周到。使用者在克服数值计算的收敛及选择假定函数进行试算等方面都时常遇到麻烦。

(二)本文目的

1.回顾和总结现有的各种土坡稳定计算方法。建立统一的静力平衡方程组。如果该方程组对相应的条件进行简化,就可以回归到目前常用的各种简化方法。如毕晓普法、斯潘塞法等。

2.对摩根斯顿-普赖斯法的数值计算方法进行改进,以解决收敛困难问题。

3.提出一整套完整的分析方法,找出满足平衡方程和合理性要求的所有安全系数解的上、下限,使摩根斯顿-普赖斯法的运算过程理论化,计算机化,不需依靠使用者的经验和判断。

二、静力平衡方程的普遍形式和相应的边界条件

笔者和摩根斯顿^[7]从分析土条所作用的力和力矩平衡出发,列出静力平衡的微分方程,并结合相应的边界条件,导出下面带有普遍意义的土坡极限平衡方程式:

$$\int_a^b p(x)s(x)dx = 0 \quad (9)$$

$$\int_a^b p(x)s(x)t(x)dx = 0 \quad (10)$$

其中

$$p(x) = -\frac{dW}{dx} \sin(\phi'_c - \alpha) + q \sin(\phi'_c - \alpha) - r_u \frac{dW}{dx} \sec \alpha \sin \phi'_c + c'_e \sec \alpha \cos \phi'_c \quad (11)$$

$$s(x) = \sec \psi'_e \exp \left[- \int_a^x \operatorname{tg} \psi'_e \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right] \quad (12)$$

$$t(x) = \int_a^x (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha) \exp \left[\int_a^\xi \operatorname{tg} \psi'_e \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right] d\xi \quad (13)$$

式中 $\frac{dW}{dx}$ ——土条单位宽度重量;
 α ——土条底面线对 x 轴的倾角;
 q ——坡面垂直荷重;
 r_u ——孔隙压力比;
 β ——土条侧向作用力 G 对 x 轴的倾角;
 ψ' —— $\phi'_e - \alpha + \beta$;
 a, b ——滑动土体两端 x 座标;
 ξ, ξ ——积分变量。

式中符号参考图 1。

式(9)、(10)分别反映了滑动土体力学和力距的平衡要求。此两式中, 仅安全系数 F 和 $\beta(x)$ 是未知的。求解土坡滑动安全系数的问题, 具体化为计算相应于某一 $\beta(x)$ 的分布形状, 满足式(9)和式(10)的 F 值的问题。在满足合理性要求的前提下, 对 $\beta(x)$ 的假定是可以任意的。但是, 还应该注意 $\beta(x)$ 的值在两个端部的土条上是确定值, 不能任意假定。这一点在以往的工作中被忽略了。

端部的土条(图2) ABC 是一个特殊的土条, 它具有三角形形状。在这个土条的垂直面上有

$$\operatorname{tg} \beta_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{X}{E} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (14)$$

式中 β_a —— $\beta(x)$ 在端部的值;

τ_{xy}, σ_x ——分别为作用在边条块 ABC 的垂直面 CB 上的剪应力和垂直应力。

式(14)说明, 如果 A 点的应力形态是确定的, 则 β 在端点 A 处的值也是确定的。就图 2 的具体情况而言, τ_{xy} 的值是零, 在 σ_x 不等于零的时候, β_a 的值就是零。换句话说, 如果 $\beta(x)$ 的值在端点被假定为非零的话, 在端部, 剪应力成对的原理就有可能受到破坏。

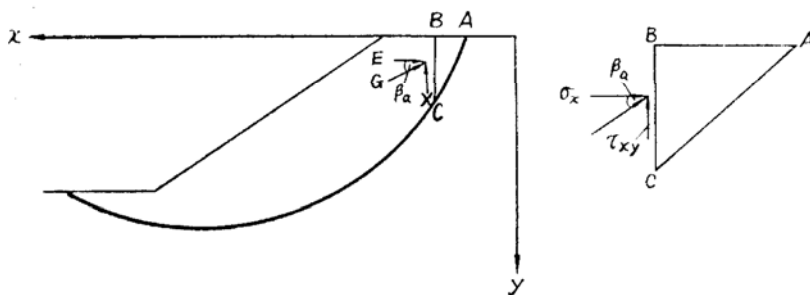


图2 端部条块 β 值的确定

笔者曾对端部条块的力矩平衡进行过推导^[8], 得到如下结论: 如果端部条块是三角形形状, 且其宽度取得足够小的话, 端部条块垂直面上的土条间总作用力应平行于该土条土坡面的方向。即 β_a 等于端点处土坡面的倾角。

三、静力平衡方程式的近似解

对静力平衡方程式(9)、(10)作近似解, 包括对下列条件进行简化: ①假定滑裂面曲线 $y(x)$ 为一特定曲线, 例如直线、圆弧、对数螺旋线等; ②假定 $\beta(x)$ 的值为一特定函数, 如假定 $\beta(x)$ 为零, 为一常数; ③只求解式(9)和式(10)中一个, 而不管另一平衡方程式是否满足。

表1列出了常用的各种简化方法及其简化条件。这些方法, 大部分可以从式(9)和式(10)导出。

表1 土坡稳定分析的各种方法

方 法	静力平衡		对 多 余 未 知 量 的 假 定	合 理 性 要 求	滑 裂 面 形 状
	力矩 平衡	力的 平衡			
楔形体滑动 ^[9]	不满足	满足	需假定滑裂面转折处 β 值	不校核	折 线
瑞典法 ^[1]	满足	部分 满足	假定土条间作用力合力平行条底	不校核	圆 弧
毕晓普法 ^[3]	满足	部分 满足	假定 $\beta = 0$	不校核	圆 弧
对数螺旋线法 ^[10]	满足	满足	不假定	不校核	对数螺旋线
扬布法 ^[5,6]	满足	满足	假定 $A_c = 1/3$	校 核	任 意 形 状
斯潘塞法 ^[4]	满足	满足	假定 β 为常数	不校核	圆 弧
美国陆军工程师团法 ^[11]	不满足	满足	假定 β 等于土坡平均坡度	不校核	任 意 形 状
摩根斯顿-普赖斯法 ^[2]	满足	满足	假定 β 为各种可能的函数	校 核	任 意 形 状

(一)楔形体滑动

在这种情况下(图3(a)), 滑裂面 AFB 为一折线, 在 F 点有一转折。滑裂面的倾角由 α_1 变成 α_2 。由于 α 是常数, 故有 $d\alpha/dx = 0$, 式(12)的积分可由解析法获得,

$$\begin{aligned}
 s(x) &= \sec(\phi'_{e1} - \alpha_1 + \beta_a) && \text{当 } a < x < c \\
 s(x) &= \sec(\phi'_{e1} - \alpha_1 + \beta_a) \frac{\sec(\phi'_{e2} - \alpha_2 + \beta_c)}{\sec(\phi'_{e1} - \alpha_1 + \beta_c)} && \text{当 } c < x < b \quad (15)
 \end{aligned}$$

将式(15)代入式(9), 可得

常用的分析方法是图解法求解的^[9]。如果我们分析滑动土体右半部 $ADEF$ (图3(b))的平衡,把作用在土体上的力投影到与水平线夹角为 $\alpha_1 - \phi'_{c1}$ 的线 AA' 上,可以求得作用在 EF 面上的力 G 。

$$G = \sec(\alpha_1 - \phi'_{c1} - \beta_c) [W_1 \sin(\alpha_1 - \phi'_{c1}) + U_1 \sin \phi'_{c1} - C_{L1} \cos \phi'_{c1}] \quad (17)$$

同样,分析滑动土体左半部 EFB (图3(c))的平衡,可得

$$G = \sec(\phi'_{c2} - \alpha_2 + \beta_c) [W_2 \sin(\phi'_{c2} - \alpha_2) - U_2 \sin \phi'_{c2} + C_{L2} \cos \phi'_{c2}] \quad (18)$$

式(17), (18)中, W , U , C_L 分别代表土体的重量、作用在滑裂面上的孔隙压力和凝聚力引起的抗滑力。脚标1和2分别代表右、左两个滑动土体相应的量。

由式(17), (18)可得

$$\begin{aligned} & \sec(\phi'_{c1} - \alpha_1 + \beta_c) [W_1 \sin(\phi'_{c1} - \alpha_1) - U_1 \sin \phi'_{c1} + C_{L1} \cos \phi'_{c1}] \\ & = -\sec(\phi'_{c2} - \alpha_2 + \beta_c) [W_2 \sin(\phi'_{c2} - \alpha_2) - U_2 \sin \phi'_{c2} + C_{L2} \cos \phi'_{c2}] \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)和式(16)是等同的。这说明,由普遍平衡方程式(9)简化得到式(16)反映了常用的图解法的力学原理。

(二)斯潘塞法

斯潘塞法^[4]假定 β 为常数(图4)即 $\frac{d\beta}{dx} = 0$, 由此可得

$$s(x) = \sec(\phi'_c - \alpha + \beta) \quad (20)$$

$$t(x) = \sin \beta \cdot x - \cos \beta \cdot y - (\sin \beta \cdot a - \cos \beta \cdot y_a) \quad (21)$$

其中 a , y_a 分别为端点 A 的横、纵坐标。

将式(20)、(21)代入式(9)、(10)可得

$$\int_a^b \sec(\phi'_c - \alpha + \beta) p(x) dx = 0 \quad (22)$$

$$\int_a^b \sec(\phi'_c - \alpha + \beta) p(x) (\sin \beta \cdot x - \cos \beta \cdot y_a) dx = 0 \quad (23)$$

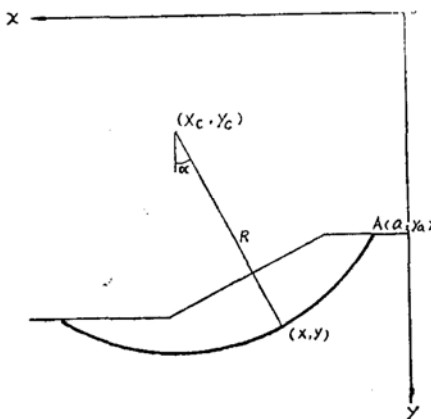


图4 圆弧滑动

对于圆弧滑裂面,可将下式代入式(23)

$$x = x_c - R \sin \alpha \quad (24)$$

$$y = y_c - R \cos \alpha \quad (25)$$

其中 x_c , y_c 分别为圆心的横、纵坐标, R 为圆弧半径。

经简化可得

$$\int_a^b \sec(\phi'_c - \alpha + \beta) \cos(\beta - \alpha) p(x) dx = 0 \quad (26)$$

不难证明,式(22)和式(26)与斯潘塞最初提出的力和力矩平衡方程^[4]是等同的。

(三) 毕晓普法

毕晓普^[8]假定 $\frac{dX}{dx} = 0$ ，由于边界条件的限制，这意味着 $\beta(x) = 0$ ，同时毕晓普法仅满足圆弧滑裂面的力矩平衡方程式(26)。这样，式(26)化简为

$$\int_a^b \frac{\cos \alpha}{\cos(\phi'_e - \alpha)} p(x) dx = 0 \quad (27)$$

不难证明，式(27)和毕晓普最初提出的公式^[3]是等同的。

(四) 美国陆军工程师团法

美国陆军工程师团法^[11]假定 $\beta(x)$ 为常数，并假定 $\beta(x)$ 等于平均边坡值 β_{ave} ，滑裂面为任意形状。该法仅满足力的平衡，故将 $\beta = \beta_{ave}$ 代入式(22)得

$$\int_a^b \sec(\phi'_e - \alpha + \beta_{ave}) p(x) dx = 0 \quad (28)$$

笔者曾用式(28)分析文献[11]中相同的例题，得到与美国陆军工程师团采用图解法相同的安全系数^[12]。

以上推导说明，静力平衡式(9)、(10)反映了各种简化法的力学原理。这样，土坡稳定分析的各种简化方法就被统一起来，同时也已被包括在一个具有多功能的计算机程序中^[13]。

四、静力平衡方程的严格解—— 摩根斯顿-普赖斯法及其改进

我们在前言中已经谈到了“严格解”的意义。这个严格解可通过以下步骤求得：

第一步 假定一个 $\beta(x)$ 的分布形状，求解式(9)和式(10)，获得满足该方程组的一个解 $\beta^*(x)$ 和 F^* 。这就是通常的摩根斯顿-普赖斯法。笔者和摩根斯顿又对该法进行了改进^[7]：

①程序中加入了功能，保证了本文提出的结论获得实现，即 $\beta(x)$ 的边值必须是确定的。②改进了数值计算方法，保证了数值计算的收敛性。

第二步 在已经求得的一个解 $\beta^*(x)$ 和 F^* 基础上，求出同样满足式(9)、(10)的一个邻近解 $\beta^*(x) + \Delta\beta$ 和 $F^* + \Delta F$ 。采用这个步骤，可有意识地改变 $\beta^*(x)$ 的形状。使原来满足合理性要求的解过渡到不满足合理性要求的解。这样，也就发现了向这一方向过渡的边界。变换过渡方向，重复此类运算，依赖电子计算机，最终可以获得所有满足合理性要求的解的边界，即安全系数的上、下限。如果这个上、下限确实是很接近的，这就是所要寻求的该滑弧稳定安全系数的严格解。

下面分别叙述这两个步骤。

(一) 数值计算方法的改进

假定 $\tan\beta$ 取以下形式：

$$\tan\beta = \lambda f(x) + f_0(x) \quad (29)$$

其中 $f(x)$ 是假定的一个函数, 在端点 A 和 B 处其值为零; $f_0(x)$ 是另一假定函数, 在端点 A 和 B 处其值等于 β 在边界上要求的值, 即

$$\begin{aligned} f(a) &= 0; & f(b) &= 0; \\ f_0(a) &= \operatorname{tg} \beta_a; & f_0(b) &= \operatorname{tg} \beta_b. \end{aligned}$$

一旦 $f(x)$ 和 $f_0(x)$ 设定后, 将式(29)代入式(9), (10), 可解出 F 和 λ 的值。具体的数值计算是通过牛顿-勒普逊 (Newton-Raphson) 迭代法实现的。假设一个 F_1 和 λ_1 代入式(9)和式(10),

$$G_n = G(\lambda_1, F_1) = \int_a^b p(x, \lambda_1, F_1) s(x, \lambda_1, F_1) dx \quad (30)$$

$$M_n = M(\lambda_1, F_1) = \int_a^b p(x, \lambda_1, F_1) s(x, \lambda_1, F_1) t(x, \lambda_1, F_1) dx \quad (31)$$

如果 G_n 和 M_n 与零的差值不在允许范围内, 则下一个较为精确的 $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, $F_2 = F_1 + \Delta F$ 可由下式发现⁷⁾

$$\Delta\lambda = \frac{-G_n \frac{\partial M_n}{\partial F} + M_n \frac{\partial G_n}{\partial F}}{\frac{\partial G_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial F} - \frac{\partial G_n}{\partial F} \frac{\partial M_n}{\partial \lambda}} \bigg|_{\lambda = \lambda_1, F = F_1} \quad (32)$$

$$\Delta F = \frac{G_n \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} - M_n \frac{\partial G_n}{\partial \lambda}}{\frac{\partial G_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial F} - \frac{\partial G_n}{\partial F} \frac{\partial M_n}{\partial \lambda}} \bigg|_{\lambda = \lambda_1, F = F_1} \quad (33)$$

多次重复上述过程, 可以最终得到满足精度要求的 λ 和 F 值。为了保证上述过程收敛, 我们采用了多种数值计算技巧。一个十分重要的改进是直接通过解析方法, 求得了 $\frac{\partial M_n}{\partial F}$, $\frac{\partial G_n}{\partial F}$, $\frac{\partial M_n}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial G_n}{\partial \lambda}$ 的精确表达式:

$$\frac{\partial G_n}{\partial F} = \int_a^b p(x) s(x) \left[k(x) - \int_a^x \sec^2 \psi'_e \frac{d\phi'_e}{dF} \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right] dx \quad (34)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial F} = \int_a^b p(x) s(x) \left[k(x) t(x) - \int_a^x t \sec^2 \psi'_e \frac{d\phi'_e}{dF} \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right] dx \quad (35)$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial \lambda} = \int_a^b p(x) s(x) \left[- \int_a^x \sec^2 \psi'_e \frac{d\beta}{d\lambda} \frac{d\alpha}{d\xi} d\xi + D_i \right] dx \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} = & \int_a^b p(x) s(x) \left[- \int_a^x t \sec^2 \psi'_e \frac{d\beta}{d\lambda} \frac{d\alpha}{d\xi} d\xi + D_{ti} \right. \\ & \left. + \int_a^x \cos \phi'_e \sec \alpha \sec \psi'_e \exp \left(\int_a^{\xi} \operatorname{tg} \psi'_e \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right) \frac{d\beta}{d\lambda} d\xi \right] dx \quad (37) \end{aligned}$$

其中

$$f(x) = - \left[\left(\frac{dW}{dx} + q \right) \sin \phi'_e \cos \beta - r_u \frac{dW}{dx} \sec \alpha \cos(\beta - \alpha) \sin \phi'_e + c'_e \sec \alpha \cos \phi'_e \cos(\beta - \alpha) \right] \cos \phi'_e / \left\{ F \left[\left(\frac{dW}{dx} + q \right) \sin(\phi'_e - \alpha) - r_u \frac{dW}{dx} \sec \alpha \sin \phi'_e + c'_e \sec \alpha \cos \phi'_e \right] \cos(\phi'_e - \alpha + \beta) \right\} \quad (38)$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \cos^2 \beta f(x) \quad (39)$$

$$D_i = \operatorname{tg} \phi'_{ei} \cdot \frac{d\beta}{d\lambda} \bigg|_{x=a} - \sum_{i=1}^s \left[\operatorname{tg} \phi'_{ei} \frac{d\beta_i}{d\lambda} \right]^r \quad (40)$$

$$D_{ti} = - \sum_{i=1}^s \left[t_i \operatorname{tg} \phi'_{ei} \frac{d\beta_i}{d\lambda} \right]^l \quad (41)$$

其中 D_i, D_{ti} 为考虑了 ϕ'_e 和 α 可能出现不连续的系数。在第 i 个不连续点, ϕ'_{ei} 或 α_i 由 $[\phi'_{ei}]_r$ 或 $[\alpha_i]_r$ 突然变为 $[\phi'_{ei}]_l$ 或 $[\alpha_i]_l$, 脚标 r 和 l 分别代表相应值在 i 点右边和左边的数值。

式(34)至(37)的推导见文献[8]。

经过如上改进后, 数值计算的收敛性能有很大改善。图5列出圆弧滑裂面1和非圆弧滑裂面2采用改进后的摩根斯顿-普赖斯法以及杨布法的迭代过程。对滑裂面1, 两种方法初始假定安全系数均为1.861, 从图5(b)中可以看出, 改进后的摩根斯顿-普赖斯法经过第一次迭代即得到最后的解1.976。第二次与第三次迭代的值差已小于0.001, 经两次迭代即获得收敛结果。使用杨布法, 我们要求前后两次迭代的安全系数差值小于0.005。这样在第十次迭代时, 前后两次的安全系数分别为1.972和1.977。两种方法最后结果十分接近, 但迭代次数相差甚大。如果第一次迭代假定的安全系数离最终值较远, 例如改进后的摩根斯顿-普赖斯法采用1.607, 杨布法采用1.582, 则可从图5(c)看到, 前法经过三次即收敛, 得到安全系数1.976的结果。后法需要更多次的迭代才能得到收敛的结果。

当进行非圆弧滑裂面2的计算时, 从图5(d)中可以看出, 改进后的摩根斯顿-普赖斯法经过三次迭代, 即能收敛。而杨布法则无法得到收敛解。

(二)安全系数上、下限的确定

假定已经找到满足式(9)和式(10)的一组解 F^* 和 $\beta^*(x)$

$$G_n = \int_a^b p(F^*, \beta^*) s(F^*, \beta^*) dx = 0 \quad (42)$$

$$M_n = \int_a^b p(F^*, \beta^*) s(F^*, \beta^*) t(F^*, \beta^*) dx = 0 \quad (43)$$

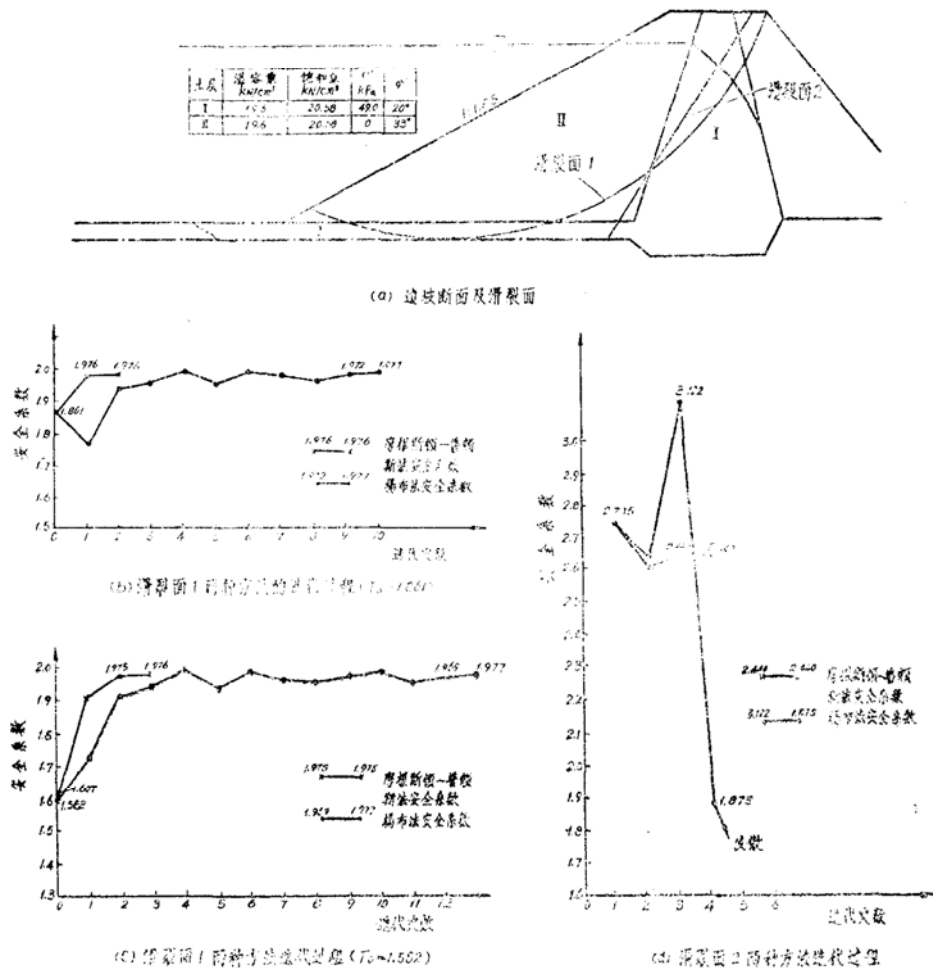


图5 数值分析收敛性能比较例题

如果邻近 $F^* + \Delta F$, $\beta^* + \Delta\beta$ 也满足式(9)、(10), 则

$$\begin{aligned} \Delta G_n = & \int_a^b p(F^* + \Delta F, \beta^* + \Delta\beta) s(F^* + \Delta F, \beta^* + \Delta\beta) dx \\ & - \int_a^b p(F^*, \beta^*) s(F^*, \beta^*) dx = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_n = & \int_a^b p(F^* + \Delta F, \beta^* + \Delta\beta) s(F^* + \Delta F, \beta^* + \Delta\beta) t(F^* + \Delta F, \beta^* + \Delta\beta) dx \\ & - \int_a^b p(F^*, \beta^*) s(F^*, \beta^*) t(F^*, \beta^*) dx = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

如果我们取

$$\Delta\beta = \varepsilon\eta(x) \quad (46)$$

其中 ε 是一个微小量, 使 $\Delta\beta$ 相对于 β 足够小。通过变分运算, 式(45)可简化为

$$\Delta G_n = K_{g1}\Delta F + K_{ga}\varepsilon + 0(\Delta F, \varepsilon) \quad (47)$$

$$\Delta M_n = K_{m1}\Delta F + K_{ma}\varepsilon + 0(\Delta F, \varepsilon) \quad (48)$$

其中

$$K_{gf} = \int_a^b p(x) s(x) \left[k(x) - \int_a^x \sec^2 \psi'_e \frac{d\phi'_e}{dF} \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right] dx \quad (49)$$

$$K_{mf} = \int_a^b p(x) s(x) \left[k(x) t(x) - \int_a^x t \sec^2 \psi'_e \frac{d\phi'_e}{dF} \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right] dx \quad (50)$$

$$K_{ga} = \int_a^b p(x) s(x) \left[- \int_a^x \sec^2 \psi'_e \frac{d\alpha}{d\xi} \eta(\xi) d\xi + B_i \right] dx \quad (51)$$

$$K_{ma} = \int_a^b p(x) s(x) \left[- \int_a^x t \sec^2 \psi'_e \frac{d\alpha}{d\xi} \eta(\xi) d\xi + B_{ti} \right. \\ \left. + \int_a^x \cos \phi'_e \sec \alpha \sec \psi'_e \exp \left\{ \int_a^\xi t g \psi'_e \frac{d\beta}{d\xi} d\xi \right\} \eta(\xi) d\xi \right] dx \quad (52)$$

$$B_i = - \sum_{i=1}^s \left[t g \psi'_{e,i} \eta(x_i) \right]_l^r + t g \psi'_{e,a} \eta(a) \quad (53)$$

$$B_{ti} = - \sum_{i=1}^s \left[t_i t g \psi'_{e,i} \eta(x_i) \right]_l^r \quad (54)$$

式(49)~(52)的推导详见文献[8]。

0($\Delta F, \varepsilon$)代表一个比 ΔF 和 ε 高阶的小量,忽略此小量,式(44)和式(45)变为

$$K_{gf}(F^*, \beta^*) \Delta F + K_{ga}(F^*, \beta^*, \eta(x)) \varepsilon = 0 \quad (55)$$

$$K_{mf}(F^*, \beta^*) \Delta F + K_{ma}(F^*, \beta^*, \eta(x)) \varepsilon = 0 \quad (56)$$

只有在下式成立时, ΔF 和 ε 才有非零解。

$$\begin{vmatrix} K_{gf}(F^*, \beta^*) & K_{ga}(F^*, \beta^*, \eta(x)) \\ K_{mf}(F^*, \beta^*) & K_{ma}(F^*, \beta^*, \eta(x)) \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

式(57)说明,为要在已知解 F^*, β^* 基础上求得邻近的一组新的解 $F^* + \Delta F, \beta^* + \varepsilon \eta(x)$,则选择的 $\eta(x)$ 必须使式(57)成立。一旦找到了这样的函数,就可以选用一个 ε 值而得出这个新的解。 ε 选得越小,新的解也就越精确。连续反复进行多次,就可以得出一个远离原来解 F^* 和 β^* 的一组新的解。

笔者和摩根斯顿曾建议用如下的方法^[7]求得 $\eta(x)$ 。令

$$\eta(x) = m\eta_1(x) + \eta_2(x) \quad (58)$$

$\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$ 为任意函数,它们之间线性无关,即没有常数 C_1 和 C_2 可以使下式成立,

$$\eta_2(x) = C_1 \eta_1(x) + C_2 \quad (59)$$

将式(58)代入式(57)可得

$$m = - \frac{K_{gf}(F^*, \beta^*) K_{ma}(F^*, \beta^*, \eta_2(x)) - K_{mf}(F^*, \beta^*) K_{ga}(F^*, \beta^*, \eta_2(x))}{K_{gf}(F^*, \beta^*) K_{ma}(F^*, \beta^*, \eta_1(x)) - K_{mf}(F^*, \beta^*) K_{ga}(F^*, \beta^*, \eta_1(x))} \quad (60)$$

求得 m 值后, 可以得到 $\eta(x)$, 进而根据设定的 ε 求得 ΔF 。

笔者和摩根斯顿建议采用如下两组 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$ ^[7]:

第一组 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$ 分别为椭圆和抛物线(图6中的曲线1和2)。如果 ε 取正值, 则按照式(58), $\eta(x)$ 就有可能使 $\Delta\beta$ 在区间的中间部分为正值, 两旁为负值。换句话说, 它将使 $\beta(x)$ 的值在中间部分增加, 两旁减少。反之, 如果 ε 为负, $\beta(x)$ 的中间部分减少, 两旁增加。

第二组 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$ 为三次曲线(图6中的曲线3和4)其峰值分别在左侧和右侧。当 ε 为正时, 有可能获得一个在区间左半部为正, 右半部为负的 $\Delta\beta$, 换句话说, 它将使 $\beta(x)$ 的峰值左移。当 ε 为负时, $\beta(x)$ 的峰值右移。

由于 $\beta(x)$ 包含有 F_{ve} 这个合理性要求指标的特性, $\beta(x)$ 的峰值的移动将最终使 F_{ve} 的值达到边界, 越过此边界, F_{ve} 越过了1, 合理性要求不再满足。

此外, 从公式

$$y_t = y + \frac{\int_a^x G(\sin\beta - \cos\beta \tan\alpha) dx}{G \cos\beta} \quad (61)$$

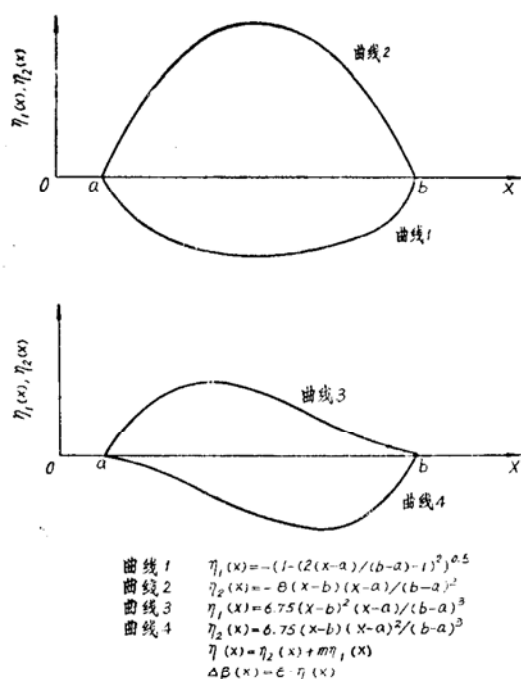


图6 积分函数 $\eta(x)$

还可看出, 在区间 (a, x) 之间, $\beta(x)$ 的平均值如果增加, y_t 在 x 的值就有可能增加, A_c 值则减少, G 为土条侧向总作用力, 参见图1。作为合理性要求的另一指标 A'_c 的值就有可能发生本质的变化。如果 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$ 采用曲线3和4, 就有可能实现 $\beta(x)$ 的平均值在区间 (a, x) 之间增加这一目的。

这样, 通过选择恰当的 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$, 我们就有可能变化 F_{ve} 和 A'_c , 而最终找到受合理性要求控制的边界。

下面, 通过算例来说明这个过程。

【算例】 找出图7所示的滑弧滑动安全系数的上、下限。

滑裂面的两个端部都终止在水平的土坡面上, 因此 β_a 和 β_b 应为零。取 $f_0(x)$ 为零, $f(x)$ 为正弦曲线。将式(29)代入式(9)、(10)中, 即可求得摩根斯顿-普赖斯方法的一组解; 安全系数 F 为1.465, 相应的 λ 为0.360, 相应的

F_{ve} 和 A_c 的图形如图8中标有“初始解”的那些曲线所示。可见, F_{ve} 和 A'_c 的值都满足合理性要求。但在区间的中部, F_{ve} 的值十分接近“ $F_{ve} = 1$ ”线。如果继续增大中部的 $\beta(x)$ 值, F_{ve} 在中部的值必将小于1, 相应的解也就变成不满足合理性要求的解。采用曲线1和2作为

$\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$, 取 ε 为0.025。从图8可以看出, 经过12次积分后, 在中间部分, F_{ve} 的值变得比1小了。相应的新解安全系数 F 值从原来的1.465变成了1.471。如果 ε 为-0.05, 如图9所示, 则两边的 β 值将增加, 经过12次积分后, 左边部分的 F_{ve} 值减少到比1小。此时, 安全系数 F 为1.455。再采用曲线3, 4, 使 $\beta(x)$ 的峰值向左或向右移。分别采用 ε 值为0.04和-0.025, 如图10和图11所示。其相应的安全系数 F 为1.470和1.444。

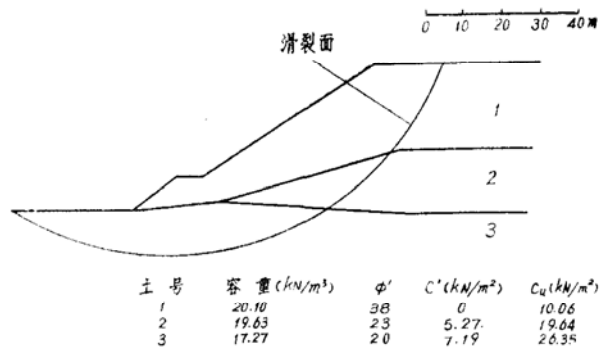
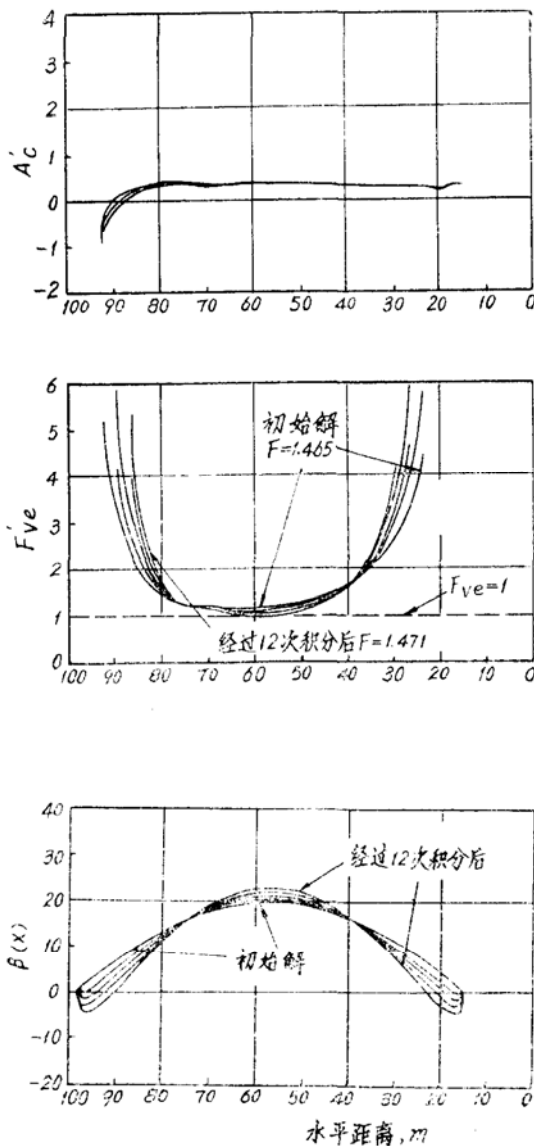
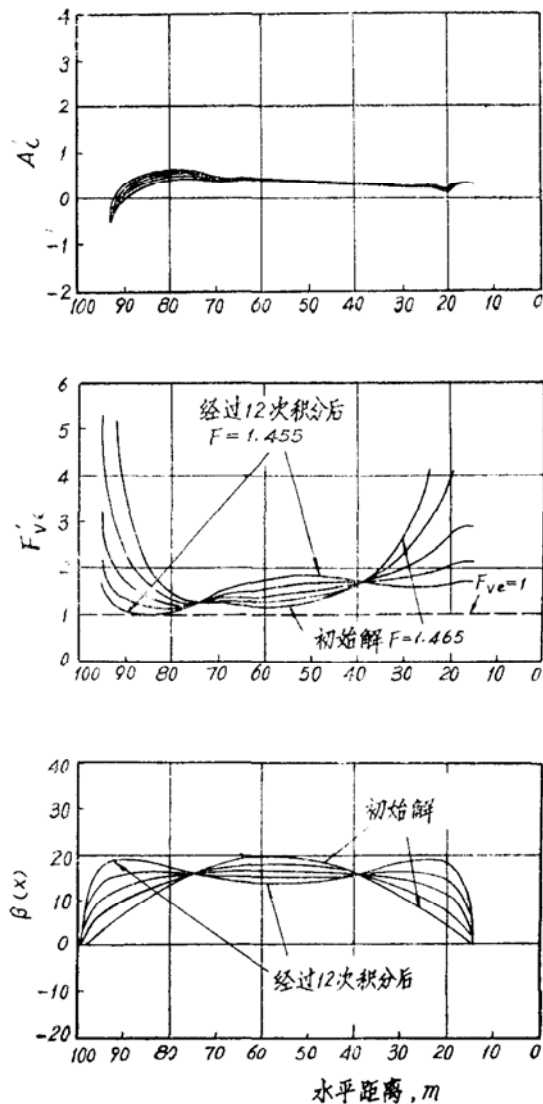
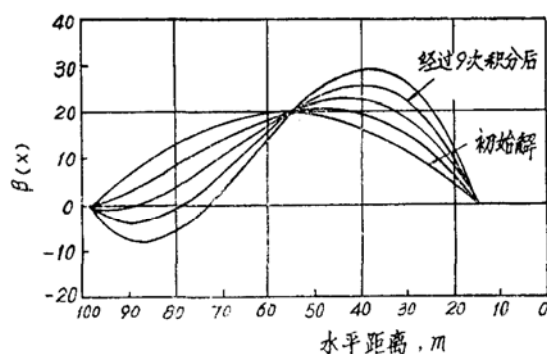
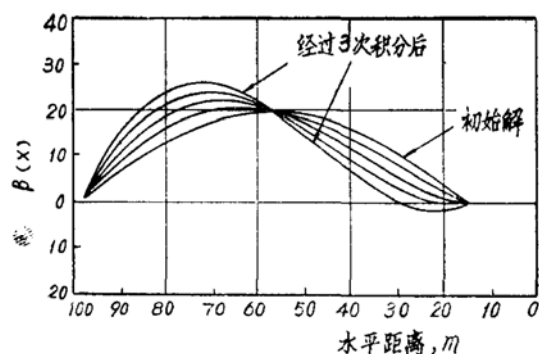
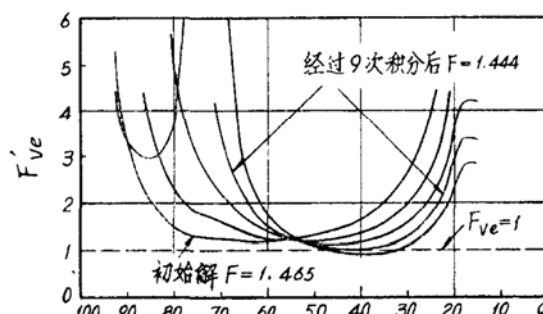
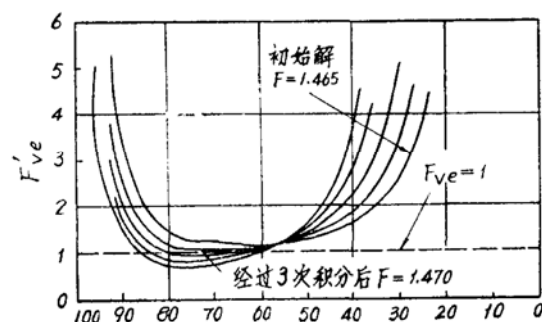
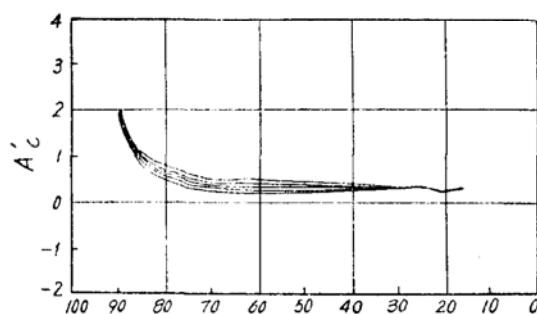
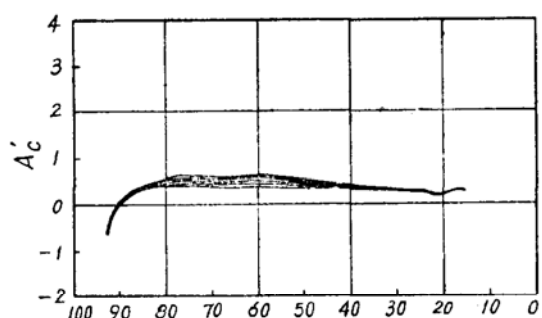


图7 算例

图8 $\beta(x)$ 的峰值上移图9 $\beta(x)$ 的峰值下移

图10 $\beta(x)$ 的峰值左移图11 $\beta(x)$ 的峰值右移

可以看到,在所有上述情况中, A'_c 值都是合理的。

现在,所假定的 $\beta(x)$ 已经复盖了相当大的区域,每一方向的积分都达到了合理性要求的边界。尽管还可以作更多的试算,但安全系数的上、下限可以很合理地确定为在 1.471 和 1.444 之间。

五、结 论

1. 土坡稳定分析的条分法已从初期带有相当经验成份的方法发展成一个建立在库伦-莫尔破坏准则基础上、不对滑裂面形状作任何假定、静力平衡条件和合理性要求得到满足的完整的理论体系。合理性要求的提出弥补了在处理静不定问题时对多余未知量作假定的缺陷,使该法在理论上更为严谨。由于条分法在工程中得到广泛的应用,其分析结果又往往与滑坡实

例相符,这一理论体系的完善对于滑坡分析方法的进一步发展是十分有意义的。

2.求解安全系数的问题,可归结为求满足式(9)和式(10)的F值问题。在求解过程中,如果选用某一特定的 $\beta(x)$ 值,对滑裂面形状作特定的假定,甚至可只解式(9)、(10)中的一个而置其他一个不顾,式(9)、(10)即可简化为目前常用的各种简化方法,如楔形体的滑动、毕晓普简化法等等。如果对各环节都不作简化,得到的结果就是理论意义上的严格解。

3.在以往的工作中,忽略了土条间作用力的方向 $\beta(x)$ 和其作用位置 A_c 的值在边界上应为确定的一点。引进这一结论,可以使搜索安全系数严格解的工作量大为减轻。

4.本文提出了一个建立在变分原理上的、应用电子计算机求解受合理性条件控制的、满足全部静力平衡要求的安全系数上、下限的方法。由于上、下限的值十分接近,因此,事实上,获得了安全系数的严格解。

本文方法的计算机程序已顺利地移植到水科院M-160H机上,运行正常。原程序经过扩充,可以进行瑞典法、毕晓普简化法、陆军工程师团法、斯潘塞法等各种简化方法的计算。使用这个程序,还可以进行摩根斯顿-普赖斯法、杨布法等严格方法的计算,也可以执行本文提出的更严格的计算步骤^[18]。

这项工作是笔者在加拿大阿尔伯达大学进修期间,在摩根斯顿教授指导下进行的。笔者对帮助这项工作顺利开展的加拿大朋友,特别是摩根斯顿教授表示衷心的感谢。上海业余工业大学陈禹年同志仔细审查了本文方法的全部数学推导,谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] Fellenius, W., Erdstatische Berechnungen, Berlin, W. Ernst und Sohn (revised edition, 1939), 1927.
- [2] Morgenstern, N. R. and Price, V. E., The Analysis of the Stability of General Slip Surface, Geotechnique, XV, No.1, 1965, pp. 79~93.
- [3] Bishop, A. W., The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes, Geotechnique, X, No.1, 1955, pp.7~17.
- [4] Spencer, E., A Method of Analysis of Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-slice Forces, Geotechnique, XVII, No.1, 1967, pp. 11~26.
- [5] Janbu, N., Application of Composite Slip Surface for Stability Analysis, Proc. European Conf. on Stability of Earth Slopes, Sweden 3, 1954, pp. 43~49.
- [6] Janbu, N., Slope Stability Computations, Embankment Dam Engineering, Wiley, New York, 1973, pp. 5~26.
- [7] Chen, Z. and Morgenstern, N. R., Extensions to the Generalized Method of Slices for Stability Analysis, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 20, No.1, 1983, pp. 104~119.
- [8] Chen, Z., On the Side Force in Limit Equilibrium Analysis of Slopes, Internal Report, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Canada, 1981.
- [9] Lambe, T. W. and Whitman, R. V., Soil Mechanics, SI Version, John Wiley and Sons, 1968,
- [10] Taylor, D. W., Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley and Sons, New York, 1948.
- [11] U. S. Army Corps of Engineers, Stability of Earth and Rockfill Dams, Engi-

-neering Manual, EM 1110-2-1902, 1970.

[12] 陈祖煜, 土石坝边坡稳定分析计算中的几个问题——土石坝边坡稳定分析程序〈STAB〉编制中间报告, 水利水电科学研究院, 1983.

[13] 水利水电科学研究院, 土石坝边坡稳定分析程序〈STAB〉使用说明, 1983.

The Generalized Method of Slices for Slope Stability Analysis and Its Modifications

Chen Zu-yu

(Water Conservancy and Hydroelectric Power Research Institute, Beijing)

Abstract

Based upon a comprehensive study of the various methods of slices for slope stability analysis, the general equilibrium equations have been put forward. Extensions have been made to the Morgenstern-Price method which is known to be a rigorous method for solving the equilibrium equations. They include:

1. The argument about the restrictions on the boundary values of the unknown variables when assumptions are made for them.

2. A refinement of the numerical process to solve the convergence problems which have occasionally affected other methods in common use.

3. The development of a numerical procedure based on the calculus of variations which has made it possible to find the upper and lower bound of the safety factors subjected to the restrictions of physical admissibility. The rigorous solution for the factor of safety has accordingly been obtained.