

# 基于库仑定律的 CU 总应力切线和割线强度指标数理意义释义和适用性研究

沈 扬<sup>1</sup>, 葛冬冬<sup>1</sup>, 徐海东<sup>2</sup>, 张超波<sup>3</sup>

(1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学大禹学院, 江苏 南京 210098;  
3. 河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210098)

**摘 要:** 以土体抗剪强度规律在破坏面上归结为库仑定律, 并同种各向同性土的三轴试验有效应力强度指标唯一存在为立论基础展开分析, 通过建立不排水条件的库仑强度定律与三轴固结不排水剪切(CU)试验破坏时超静孔压的联系, 对 CU 试验总应力强度指标线性存在的数学基础和物理意义进行了解析。结果表明: 由排水和不排水条件下库仑强度规律的线性特征, 可证明破坏面上与法向应力相关的孔压系数  $D_f$  为常数; 而 CU 总应力强度包线之所以线性存在是由于斯开普敦孔压系数  $A_f$  能与  $D_f$ 、黏聚力及破坏时的偏应力建立起特定的数量关系, 并明确提出了该关系的数学表达式。同时利用 CU 试验所得参数, 求解了 CU 总应力割线强度指标  $\phi_R$ ,  $c_R$  的值。割线强度指标的确定为已定滑动面的工程问题提供更为合理和可操作的强度计算方法, 而若选用切线强度指标, 强度值可能会有 10%以上的高估, 带来极大的安全隐患。

**关键词:** 库仑定律; 原状黏土; 三轴压缩试验; 总应力强度指标; 孔压系数

中图分类号: TU435 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2013)S1-0044-08

**作者简介:** 沈 扬(1980-), 男, 博士, 副教授, 主要从事土的静、动力学特性和本构理论的研究。E-mail: shenyang1998@163.com。

## Mathematical and physical significances and applicability of tangent and secant strength indices of total stress of consolidated undrained triaxial tests based on Coulomb's law

SHEN Yang<sup>1</sup>, GE Dong-dong<sup>1</sup>, XU Hai-dong<sup>2</sup>, ZHANG Chao-bo<sup>3</sup>

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;  
2. Dayu College, Hohai University, Nanjing 210098, China; 3. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** Most of the strength criteria for soils should satisfy the Coulomb's law on the failure surface, and the effective stress strength indices of isotropic soil are unique under different drainage conditions. The mathematical and physical meanings of triaxial total stress strength indices are investigated based on the relationship between the excess pore pressure at failure in Coulomb's law under undrained conditions and that in consolidated undrained (CU) triaxial tests. The results show that, in view of the linear envelope of the Coulomb's law under drained and undrained conditions, the pore pressure coefficient  $D_f$  is proved to be constant, which is related to the normal stress state on the failure surface. The existence of linear total stress failure envelop of CU is based on the certain relationship among Skempton's pore pressure coefficients  $A_f$ ,  $D_f$ , cohesion and deviator stress at failure. The corresponding expression is also obtained. Furthermore through the strength parameters of CU tests, the secant strength indices,  $\phi_R$  and  $c_R$ , are obtained. It provides more reasonable and operational method for engineering problems with known sliding surfaces. However if the total stress tangent strength indices of CU are used, the strength will be overvalued by more than 10%, which will cause great security risk.

**Key words:** Coulomb's law; undisturbed clay; triaxial compression test; total stress strength index; pore pressure coefficient

## 0 引 言

三轴压缩试验和直剪试验是最常见的室内土体强

基金项目: 国家自然科学基金高铁联合项目(U1134207); “长江学者和创新团队发展计划资助”(IRT1125)  
收稿日期: 2013-03-02

度试验。直剪试验中土体破坏面固定, 能清晰辨识有效应力和总应力状态研究的是同一破坏面, 其分别揭示的是排水与不排水条件下的库仑强度定律。

而三轴不排水剪试验中, 由于有效应力和总应力强度指标中内摩擦角的不同, 依据强度包线将得到两个不同的“剪破面”。但本质上有效应力指标揭示了真实的强度意义, 切点亦对应真实破坏面; 而总应力指标包线与总应力莫尔圆的切点并不代表土体真正的破坏位置, 亦即即使有效应力强度包线为直线, 总应力强度包线的线性存在也并不是公理性的。由此增加了三轴试验总应力强度指标能够存在的物理意义的理解难度, 导致了岩土工程实践中, 在如何正确选择和应用三轴总应力强度指标等问题上产生了长期争论, 甚至引发一些实践中的误区。

为此, 一些研究者也开展过关于三轴总应力指标存在意义及应用的讨论<sup>[1~4]</sup>, 但结论具有一定的特殊性。例如有的研究是基于土体黏聚力为 0 的条件下, 三轴压缩试验中的 Skempton 孔压系数  $A_f$  是常数, 从而得到总应力包线是直线的结果<sup>[1~3]</sup>。对于一般具有结构性的原状黏土, 黏聚力作为土体本质材料特征必然存在,  $A_f$  亦将变化<sup>[5]</sup>, 试验表明这种变化不仅与土的种类和应力历史有关, 还与破坏时刻三轴试验的主应力差有关。因此  $A_f$  为非常数时候的总应力强度包线的特征, 或者说总应力强度为直线时,  $A_f$  需满足的一定变化规律是本文讨论和剖析的重点之一。

笔者认为, 土体破坏的产生最终都应归因于破坏面抗剪强度发挥到临界状态, 从强度定律的本质上看, 都能从溯源至库仑定律。因此本文将以具有充分物理意义的库仑定律和相关试验结论为基础, 通过对库仑定律不排水条件下的孔压和三轴固结不排水 (CU) 试验破坏时孔压的分析, 给出三轴总应力强度包线线性存在的完备证明, 并由此探讨该套强度指标存在的物理意义和适用性问题。

## 1 基于 CU 总应力及有效应力强度包线关系的 Skempton 孔压系数基本表述

在承认 CU 试验所得有效应力破坏莫尔圆包线为直线的前提下, 为了分析相应总应力强度包线线性存在的原因, 先采用反推思想, 探讨 CU 总应力强度包线为直线所需具备的数学条件。

图 1 所示为一组饱和黏土的 CU 试验的 3 对破坏应力圆  $A, B, C$ 。实线表示总应力圆, 虚线为有效应力圆,  $R_{i(i=A,B,C)}$  和  $R'_{i(i=A,B,C)}$  分别表示各总应力圆和有效应力圆半径,  $\sigma_{i(i=A,B,C)}$  和  $\sigma'_{i(i=A,B,C)}$  分别为各总应力圆

和有效应力圆圆心应力值。同一试样的总应力圆和有效应力圆半径相同, 即  $R_i = R'_i$ 。

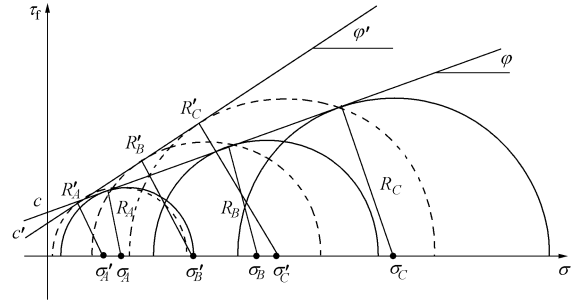


图 1 同组 CU 试验总应力圆及对应的有效应力圆

Fig. 1 Total stress circle and corresponding effective stress circle of CU triaxial tests

在有效应力强度包线为直线的前提下, 根据切点连线斜率定义, 对应的有效应力强度线上有

$$\sin \varphi' = \frac{R_A - R_B}{\sigma'_A - \sigma'_B} = \frac{R_A - R_C}{\sigma'_A - \sigma'_C}, \quad (1)$$

式中, 为有效内摩擦角。

而对饱和土 CU 试验, 超静孔压  $u_{fi}$  与主应力差有

$$u_{fi} = A_{fi}(\sigma_{li} - \sigma_{3i}) = 2A_{fi}R_i, \quad (2)$$

式中,  $u_{fi}$  ( $i=A,B,C$ ) 为破坏时各试样超静孔压;  $A_{fi}$  ( $i=A,B,C$ ) 为相应破坏应力圆的斯开普敦破坏孔压系数。

因此对两两总应力破坏圆的切线有如下关系:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{AB} &= \frac{R_B - R_A}{\sigma_B - \sigma_A} = \frac{R_B - R_A}{(\sigma'_B - \sigma'_A) + (u_{fB} - u_{fA})} \\ &= \frac{1}{\frac{\sigma'_B - \sigma'_A}{R_B - R_A} + \frac{2A_{fA}R_A - 2A_{fB}R_B}{R_B - R_A}}, \end{aligned} \quad (3a)$$

式中,  $\varphi_{AB}$  为  $A, B$  两总应力破坏圆切线的倾角。

同理也有

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{AC} &= \frac{R_C - R_A}{\sigma_C - \sigma_A} = \frac{R_C - R_A}{(\sigma'_C - \sigma'_A) + (u_{fC} - u_{fA})} \\ &= \frac{1}{\frac{\sigma'_C - \sigma'_A}{R_C - R_A} + \frac{2A_{fA}R_A - 2A_{fC}R_C}{R_C - R_A}}, \end{aligned} \quad (3b)$$

式中,  $\varphi_{AC}$  为  $A, C$  两总应力破坏圆切线的倾角。

若土体的总应力破坏圆的包线亦是一条直线, 则应有  $\sin \varphi_{AB} = \sin \varphi_{AC} = \sin \varphi$ 。

其中  $\varphi$  为破坏圆公切线与  $\sigma$  轴夹角, 即传统定义上的 CU 总应力强度包线内摩擦角。

因此, 根据式 (1), (3a), (3b) 可得 CU 总应力包线为直线的数学基础为对任何两个破坏莫尔圆的半径  $R_i, R_j$ ,  $\frac{2A_{fi}R_i - 2A_{fj}R_j}{R_j - R_i}$  亦为常数。

$$\text{令} \quad \frac{2A_{fi}R_i - 2A_{fj}R_j}{R_j - R_i} = -2m, \quad (4)$$

式中,  $m$  为常数。

进而由式 (4) 得, 对任意破坏莫尔圆,  $(A_{fi} - m)R_i$  视为常数。

$$\text{令 } (A_{fi} - m)R_i = n, \quad (5)$$

式中,  $n$  为常数。

由式 (5) 解得

$$A_{fi} = m + \frac{n}{R_i}. \quad (6)$$

这就表明, CU 试验所得的总应力强度包线为直线的数学充要条件为任意破坏圆对应的孔压系数  $A_f$  必须满足式 (6), 且式中  $m, n$  为常数。若孔压系数不能满足该式, 则总应力强度包线必不为线性。

从大量试验结果可知, 总应力强度包线接近直线的结果客观存在, 则式 (6) 的建立, 便为探求这种线性存在的本质物理原因提供可能。笔者将在本文第二部分, 从式 (6) 出发, 探求参数  $m, n$  为常数的物理根据, 并以此探讨 CU 总应力强度包线是直线所蕴涵的物理意义。

## 2 库仑定律不排水条件下孔压与 CU 试验破坏时刻孔压的内在联系

### 2.1 库仑定律不排水条件下的超静孔压表达式

为分析参数  $m, n$  为常数的根据与其物理意义, 需给出 CU 试验破坏时超静孔压的完整表达。在此之前, 需先行探求库仑定律中以滑动面法向总应力表达的超静孔压形式。

库仑定律是通过砂土的摩擦实验 (即直剪试验) 所揭示的。而库仑定律所揭示的土体强度特征一般为所有加载路径所接受。如图 2 所示, 直剪试验及三轴试验破坏极限状态均符合库仑定律的描述, 即抗剪强度都为滑动面上的法向总应力的线性函数。因此本文所进行的推导以及得到的孔压公式都是基于库仑定律, 无特定应力路径加载条件。

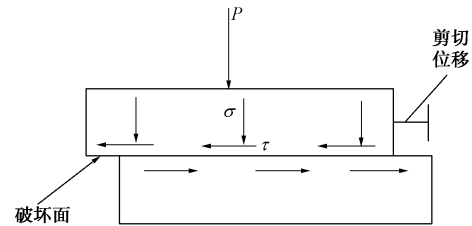
根据库仑定律的描述, 可知反映了不排水条件的库仑定律总应力强度包线, 以及反映了排水条件的库仑定律有效应力强度包线均为直线。这两条直线构成分析问题的前提, 下面即由此引出库仑定律不排水条件下孔压的表达式, 并剖析其物理含义。

如图 3 所示, 库仑总应力强度指标即为  $c_R, \varphi_R$ , 而对应的有效应力指标为  $c', \varphi'$ , 依据库仑定律描述, 同一种土这 4 个参数均为常数, 并分别构成了库仑定律总应力与有效应力强度线, 其表达式为

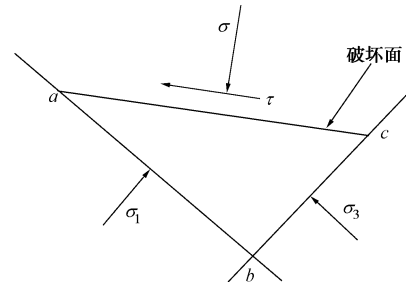
$$\tau_f = c_R + p_c \tan \varphi_R, \quad (7)$$

$$\tau_f = c' + (p_c - u_f) \tan \varphi', \quad (8)$$

式中,  $u_f$  为土体破坏时产生的超静孔压;  $p_c$  为指定破坏面上剪切前的有效法向应力。



(a) 直剪试验破坏面受力示意



(b) 三轴试验破坏面受力示意

图 2 直剪试验与三轴试验试样受剪情况

Fig. 2 Shear situation of samples in direct shear and triaxial tests

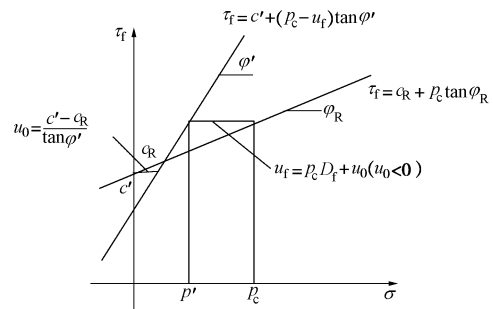


图 3 库仑定律总应力与有效应力强度线

Fig. 3 Envelopes of total and effective stresses of Coulomb's law

由式 (7)、(8) 联立可得

$$(c_R - c') + p_c \tan \varphi_R - p_c \tan \varphi' + u_f \tan \varphi' = 0, \quad (9)$$

进而解得

$$u_f = \frac{\tan \varphi' - \tan \varphi_R}{\tan \varphi'} p_c + \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'} = \left(1 - \frac{\tan \varphi_R}{\tan \varphi'}\right) p_c + \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'}, \quad (10)$$

令

$$D_f = 1 - \frac{\tan \varphi_R}{\tan \varphi'}, \quad (11)$$

$$u_0 = \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'}, \quad (12)$$

由式 (10) 可知,  $\left(1 - \frac{\tan \varphi_R}{\tan \varphi'}\right) p_c$  是土体破坏时,

由于真实破坏面上剪切前有效法向应力  $p_c$  所引起的超静孔压增量, 因此  $D_f$  的物理意义为与破坏面法向应力  $p_c$  相关孔压系数, 由于  $\varphi_R$  和  $\varphi'$  为常数, 由式 (11) 可知  $D_f$  为常数。

而  $u_0 = \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'}$  为由原状黏土结构性引起的孔压,

结构性将引起土体剪胀, 故  $u_0$  为负, 从而得到推论  $c_R > c'$ 。在一般应力水平下, 认为结构性不随围压改变时, 则  $u_0$  亦视为负常数。

于是在库仑定律不排水条件中, 根据两条强度包线的关系, 破坏时的超静孔隙水压力增量可用真实破坏面上的法向总应力表示为

$$u_f = p_c D_f + u_0 \quad (13)$$

即破坏时的超静孔压与破坏面上的法向应力成线性关系。

## 2.2 CU 试验破坏时刻超静孔压的表达式

在第 2.1 节通过引入孔压系数  $D_f$ , 得到破坏时超静孔压与真实破坏面上法向总应力的关系。由于 CU 试验在真实破坏面上也符合库仑定律, 故可以此种方式获得不同于传统三轴试验中的孔压表达方式, 从而证实式 (6) 中  $A_f$  形式的合理性。

然而 CU 试验的总应力并不能直接代入式 (13) 计算破坏时的孔压。因为虽同为总应力状态, 库仑定律反映的是真实破坏面上的抗剪强度, 而 CU 试验得到的总应力强度包线并不对应真实破坏面。

如图 4 所示, 虚线所示的 CU 有效应力破坏圆与有效强度线相切于  $M'$  点, 破坏面上破坏时的法向有效应力为  $p'$ 。

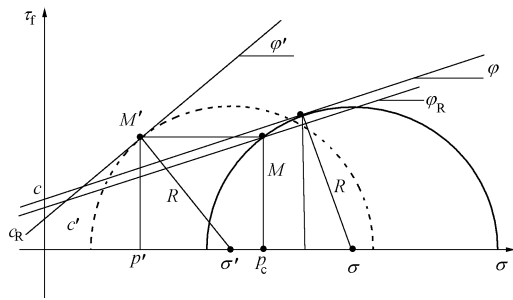


图 4 正常固结饱和黏土 CU 试验真实破坏面与总应力破坏面关系

Fig. 4 Relation between real and total stress failure surfaces of normally consolidated saturated clay of CU triaxial tests

一般认为同种土的有效应力强度指标唯一, 故可认为第 2.1 节中所述库仑定律的有效应力强度包线与 CU 试验的有效强度包线是同一条。因此, 由  $M'$  平移推定, 在实线表示的 CU 破坏总应力圆上交的  $M$  点

才落在真实破坏面上, 而相应的法向应力  $p_c$  为真实破坏面上的法向总应力, 而 CU 总应力强度包线与破坏总应力圆的切点则在  $Q$  点, 两者有明显差异。因此只有过  $M$  点的割线才是不排水条件下的库仑强度规律包线, 亦即类似于理想固结快剪的包线。显然与过切点  $Q$  的 CU 试验的总应力强度包线并非同一直线。

据此, 要将第 2.1 节中建立的不排水条件下的库仑定律孔压与应力状态关系, 应用于  $M$  点的状态分析。由式 (13) 可得  $M$  点产生的超静孔压值  $u_f$  为

$$u_f = p_c D_f + u_0 = (p' + u_f) D_f + u_0 \quad (14)$$

转化可得

$$u_f = \frac{p' D_f + u_0}{1 - D_f} \quad (15)$$

且对式中  $p'$ , 由图 4 中有效应力圆与有效应力强度指标的关系可得

$$(p' + \frac{c'}{\tan \varphi'}) \tan \varphi' = R \cos \varphi' \quad (16)$$

式中,  $R$  为破坏时莫尔圆半径。

从而:

$$p' = \frac{R \cos \varphi' - c'}{\tan \varphi'} \quad (17)$$

将式 (12)、(17) 代入式 (16), 可得

$$\begin{aligned} u_f &= \frac{\frac{R \cos \varphi' - c'}{\tan \varphi'} D_f + \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'}}{1 - D_f} \\ &= \frac{R \cos \varphi' D_f + [(1 - D_f) c' - c_R]}{(1 - D_f) \tan \varphi'} \quad (18) \end{aligned}$$

由于  $R$  是任意破坏圆的莫尔圆半径, 而其它几个参数均已证明或本身即为常数, 因此可以表明, 理论上, CU 试验破坏时的孔隙水压力与破坏主应力差值成线性关系。

## 3 孔压系数 $A_f$ 的实际表达形式

第 2.2 节获得了 CU 试验破坏时超静孔压增量  $u_f$  的表达式。根据斯开普敦孔压系数  $A_f$  定义, 对饱和土 CU 试验有

$$A_f = \frac{u_f}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{u_f}{2R} \quad (19)$$

将式 (18) 代入式 (19), 有

$$A_f = \frac{\cos \varphi' D_f}{2(1 - D_f) \tan \varphi'} + \frac{(1 - D_f) c' - c_R}{2(1 - D_f) \tan \varphi'} \cdot \frac{1}{R} \quad (20)$$

对比式 (6), 式 (20) 所表示的  $A_f$  的公式形式恰与前述保证 CU 总应力强度包线为线性的充要条件所吻合。而式 (6) 中对应的系数有如下表达:

$$m = \frac{\cos \varphi' D_f}{(1 - D_f) \tan \varphi'} \quad (21a)$$

$$n = \frac{(1-D_f)c' - c_R}{2(1-D_f)\tan\varphi'} \quad (21b)$$

由于  $D_f$  已通过式 (11) 分析说明为仅与库仑定律的两个摩擦角相关的常数, 因此在有库仑定律有效应力和总应力强度包线为线性的基础上, 式 (6) 中系数  $m, n$  也为常数。且由式 (11) 与第 2.1 节中的推论  $c_R > c'$  易知,  $m > 0, n < 0$ 。

于此, 便从物理和数学意义上均阐明了 CU 总应力强度包线是直线的原因。

此外式 (20) 亦表明, 对于无黏性土、或无结构性的重塑黏土, 即当黏聚力为 0 时, 破坏时的孔压系数  $A_f$  理论上不受剪应力的影响, 是为常数, 这与以前一些研究的结论相吻合<sup>[1~4]</sup>; 而对具有结构性或超固结特性黏性土,  $c, c_R$  不为 0, 且不相等, 此时孔压系数  $A_f$  是与破坏时主应力差值密切相关的变化参数, 且由于  $n$  为负,  $A_f$  随偏应力单调递增。根据一些工程案例中土体的 CU 指标  $c', c, \varphi', \varphi$  作出的包线也得到此单调规律<sup>[6]</sup>。

需要指出的是, 在现实三轴试验中, 由于土质关系等因素, 同组的莫尔圆难以严格线性相切, 因此试验得到的孔压系数与式 (20) 的预测可能会有一些差异, 但从理论上是不与本文推导相违背的。

## 4 CU 总应力割线强度指标建立和实用意义分析

### 4.1 CU 总应力割线强度指标 $c_R, \varphi_R$ 的建立

第 1~3 部分给出了三轴压缩 CU 总应力强度线性存在的数学和物理意义证明, 并由证明中的分析可知, CU 试验的总应力强度包线与莫尔圆的切点并不对应真实破坏面, 故该指标在应用中并非对所有工程问题都适用。

举例述之, 例如边坡问题等直接以破坏面为分析对象的情况, 此时由于 CU 试验的总应力强度包线与破坏总应力莫尔圆的切点并不对应真实破坏面, 采用该总应力指标会产生一定误差。例如图 5 所示, 点  $J, K$  的纵坐标为以破坏面上法向应力为基准, 采用 CU 总应力包线强度指标计算的抗剪强度, 而点  $M, N$  的纵坐标才是剪切面上真实的抗剪强度。线段  $MJ, NK$  的长度即为真实强度与计算强度的差值, 且显然这种差值随着计算面上的法向应力增加而增大。

而  $M, N$  点, 既然是真实破坏面上的总应力状态, 则必满足不排水条件的库仑定律, 因此  $MN$  点的连线, 实际就是不排水库仑定律的强度线, 在 CU 试验中,

根据其特征也称之为 CU 总应力强度割线。显然采用不排水的库仑定律强度指标, 即经过点  $M, N$  的强度割线指标  $c_R, \varphi_R$ , 来计算破坏面上的抗剪强度值更为合理。

然而实际中, 由于直剪试验缺陷较为突出, 导致强度测定结果不真实, 严格意义上的库仑定律不排水强度指标  $c_R, \varphi_R$  并不能从直剪试验得到; 另一方面,  $D_f, A_f$  均依赖于  $c_R, \varphi_R$  表示, 如不能准确测定  $c_R, \varphi_R$ , 则  $D_f, A_f$  的实用性也会受到制约。基于上述原因, 本节将尝试通过三轴试验, 由已有的 CU 试验总应力和有效应力两套切线强度指标, 来求解库仑定律的不排水抗剪强度指标  $c_R, \varphi_R$ 。

如图 5 所示, 同一 CU 试验中两个破坏莫尔圆及相应强度包线。显然  $MN$  就是 CU 总应力强度割线, 亦即不排水条件下的库仑定律强度线。

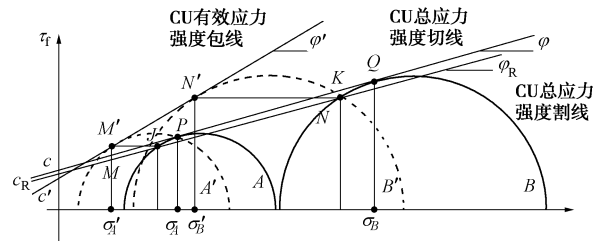


图 5 正常固结饱和黏土 CU 试验总应力强度切线与强度割线

Fig. 5 Envelopes and secants of total stress of normally consolidated saturated clay of CU triaxial tests

三轴试验中剪破面上的法向有效应力  $\sigma'$  和总应力  $\sigma$  可以由大小主应力表示为

$$\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi'\right) \quad (22a)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + u_f + \sigma'_3 + u_f) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad (22b)$$

两式相减则有

$$\sigma = \sigma' + u_f + R_i(\sin\varphi' - \sin\varphi) \quad (23)$$

如图 5 所示, 与有效应力强度包线相切的两个莫尔圆  $A', B'$ , 其切点  $M', N'$  坐标分别为  $(\sigma'_A, \sigma'_A), (\sigma'_B, \tau_B)$ 。两点连线斜率为

$$\tan\varphi' = \frac{\tau_B - \tau_A}{\sigma'_B - \sigma'_A} \quad (24)$$

对应的总应力莫尔圆  $A, B$ , 切点  $P, Q$  坐标分别为  $(\sigma'_A u_{fA} + R_A(\sin\varphi' - \sin\varphi), \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \tau_A), (\sigma'_B + u_{fB} + R_B(\sin\varphi' - \sin\varphi), \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \tau_B)$ 。  $P, Q$  两点连线即 CU 总应力强度包线斜率为

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} (\tau_B - \tau_A)}{(\sigma'_B - \sigma'_A) + (u_{fB} - u_{fA}) + (R_B - R_A)(\sin \varphi' - \sin \varphi)} \\ &= \frac{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} (\tau_B - \tau_A)}{(\sigma'_B - \sigma'_A) + \frac{D_f (\sigma'_B - \sigma'_A) + \tau_B - \tau_A}{1 - D_f} (\sin \varphi' - \sin \varphi)}, \end{aligned} \quad (25)$$

从而可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \varphi} &= \frac{(\sigma'_B - \sigma'_A) + \frac{D_f (\sigma'_B - \sigma'_A) + \tau_B - \tau_A}{1 - D_f} (\sin \varphi' - \sin \varphi)}{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} (\tau_B - \tau_A)} \\ &= \frac{\frac{1}{\tan \varphi'} \left( 1 + \frac{D_f}{1 - D_f} \right) + \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi}{\cos \varphi'}}{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}}. \end{aligned} \quad (26)$$

将式 (11) 代入 (26) 并化简得

$$\frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\frac{1}{\tan \varphi_R} + \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi}{\cos \varphi'}}{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}}, \quad (27)$$

进而可得

$$\tan \varphi_R = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi - (\sin \varphi' - \sin \varphi) \tan \varphi} \tan \varphi. \quad (28)$$

由此即通过 CU 试验的切线强度指标获得了破坏面上总应力状态下的库仑定律强度指标  $\varphi_R$ 。

而总应力状态下的库仑定律强度指标中的黏聚力  $c_R$  将按照以下方法予以计算。如图 6 取一个特殊情况的有效应力破坏圆，其与有效应力强度包线的切点落在  $\tau_f$  轴上，则其半径  $R_A$  及圆心横坐标值  $\sigma'_A$  与  $\varphi'$ 、 $c'$  的值有如下关系：

$$R_A = \frac{c'}{\cos \varphi'}, \quad (29a)$$

$$\sigma'_A = c' \tan \varphi'. \quad (29b)$$

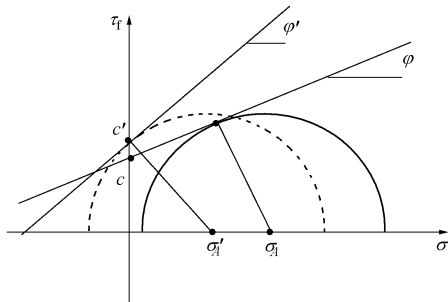


图 6 一个特殊的有效应力圆及其总应力圆

Fig. 6 Unique effective stress circle and total stress circle

对于相应的总应力莫尔圆，由几何关系得

$$R_A = \left( \sigma'_A + \frac{c}{\tan \varphi} \right) \sin \varphi, \quad (30)$$

解出  $c$  为

$$c = \frac{[R_A - \sigma'_A \sin \varphi]}{\cos \varphi}. \quad (31)$$

由式 (12)、(29b) 得

$$\sigma'_A = c' \tan \varphi' + \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'}. \quad (32)$$

再将式 (29a)、(32) 代入式 (31) 得

$$c = \frac{\left[ \frac{c'}{\cos \varphi'} - \left( c' \tan \varphi' + \frac{c' - c_R}{\tan \varphi'} \right) \sin \varphi \right]}{\cos \varphi}, \quad (33)$$

进而解得

$$c_R = \frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi} c + \left[ 1 + (\tan \varphi')^2 - \frac{\tan \varphi'}{\sin \varphi \cos \varphi'} \right] c'. \quad (34)$$

因此反映 CU 试验真实破坏面上总应力状态强度规律的割线强度指标，即不排水的库仑定律强度指标可通过三轴试验的有效和总应力强度指标建立，其强度线表达式为

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi_R + c_R, \quad (35)$$

式中：  $\tan \varphi_R = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi - (\sin \varphi' - \sin \varphi) \tan \varphi} \tan \varphi$ ；

$$c_R = \frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi} c + \left[ 1 + (\tan \varphi')^2 - \frac{\tan \varphi'}{\sin \varphi \cos \varphi'} \right] c'.$$

因此，便可以将不排水的库仑定律强度指标（即 CU 总应力割线指标）直接用于边坡稳定分析等已知破坏面上应力状态的总应力法极限应力状态计算中，其精度将比采用 CU 总应力切线强度指标显著提高。

此外，在此基础上，结合式 (11) 还可求得  $D_f$  的值，使得该孔压系数的研究分析成为可能。 $D_f$  采用 CU 试验切线强度指标的表达式为

$$D_f = 1 - \frac{\frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi - (\sin \varphi' - \sin \varphi) \tan \varphi} \tan \varphi}{\tan \varphi'}. \quad (36)$$

#### 4.2 CU 总应力强度指标实用意义分析

如前所述，CU 总应力强度割线指标（即不排水的库仑定律强度指标）的实用意义体现在已知滑动面的工程问题分析中。例如在边坡稳定分析中，计算安全系数采用的是直接滑动面上的抗剪强度，而 CU 总应力切线与莫尔圆的切点不代表真实破坏面，故采用 CU 总应力切线指标分析是不合适的。而 CU 总应力割线指标，对应了不排水条件下真实破坏面上的总应力状态。故从原理看，选取 CU 总应力割线指标应用于设定滑动面的工程问题更合理、准确。

并且由于切线指标强度线位于割线指标强度线上方，若采用 CU 总应力切线指标计算，得到的强度值



表 1 不同内摩擦角组合下 CU 总应力切线指标引起边坡安全系数高估的百分比值  $k$

Table 1 Overvalued percentage  $k$  of slope safety factor caused by CU total stress strength indices under different combinations of internal friction angles

$\varphi'$	$\varphi/(^{\circ})$										
	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
20°	1.6%	1.1%	0.6%	0.3%	0.1%	—	—	—	—	—	—
22°	2.4%	1.7%	1.1%	0.6%	0.3%	0.1%	—	—	—	—	—
24°	3.3%	2.4%	1.7%	1.1%	0.6%	0.3%	0.1%	—	—	—	—
26°	4.4%	3.4%	2.5%	1.8%	1.1%	0.6%	0.3%	0.1%	—	—	—
28°	5.6%	4.5%	3.5%	2.6%	1.8%	1.2%	0.7%	0.3%	0.1%	—	—
30°	7.1%	5.8%	4.6%	3.6%	2.6%	1.9%	1.2%	0.7%	0.3%	0.1%	—
32°	8.7%	7.3%	5.9%	4.7%	3.7%	2.7%	1.9%	1.3%	0.7%	0.3%	0.1%
34°	10.6%	9.0%	7.5%	6.1%	4.9%	3.8%	2.8%	2.0%	1.3%	0.7%	0.3%
36°	12.7%	10.9%	9.3%	7.7%	6.4%	5.1%	4.0%	3.0%	2.1%	1.4%	0.8%
38°	15.1%	13.1%	11.3%	9.6%	8.0%	6.6%	5.3%	4.1%	3.1%	2.2%	1.4%
40°	17.7%	15.6%	13.6%	11.7%	10.0%	8.4%	6.9%	5.5%	4.3%	3.2%	2.3%

和安全系数偏大，偏不安全。这种高估安全系数的程度，笔者将简单分析如下。

若对黏聚力为次要强度影响因素的高边坡高围压问题，边坡安全系数的不同，主要来自  $\tan\varphi$ 和  $\tan\varphi_R$  的差异程度。而基于式 (28)，便可得到采用总应力强度切线指标  $\varphi$ 计算得到的边坡安全系数，高估于实际值的百分比  $k$  为

$$k = \frac{\tau_f - \tau_{Rf}}{\tau_{Rf}} = \frac{\tau_f}{\tau_{Rf}} - 1 = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_R} - 1$$
$$= \frac{\cos \varphi - (\sin \varphi' - \sin \varphi) \tan \varphi}{\cos \varphi'} - 1 \quad (37)$$

表 1 列出了在 CU 试验一些可能的有效应力  $\varphi'$  和总应力强度切线指标  $\varphi$  的组合下  $k$  值的变化情况。

由表可见，在  $\varphi'$  和  $\varphi$  相差较大的一些组合中（表中灰色框体所示部分），错误选用切线指标而得到的边坡稳定安全系数高估程度将超过 10%，这样会对工程问题带来较大的安全隐患。

而对未知破坏面，或仅知主应力状态的工程问题，如地基承载力计算，或基于朗肯土压力理论进行的极限土压力计算问题中，则建议采用 CU 总应力切线强度指标。

因为此时，实际计算的主应力状态，即是与 CU 总应力强度包线相切的莫尔圆上的主应力值。故可直接利用该切线指标，求得极限状态下的破坏莫尔圆，进而分析各种应力组合。而对 CU 总应力强度割线，并不能与破坏状态下的总应力莫尔圆建立直接联系，相反如果通过已知的主应力状态由割线指标进行临界状态判别，则需要先推求破坏面以及相应的法向总应力值  $p_c$ ，明显没有直接判别莫尔圆与总应力切线的关

系来得便捷。

综上所述，CU 总应力割线和切线指标在工程中有着不同的适用条件，只有合理区分应用，才能准确、高效地解决实际问题。

5 结 论

(1) 推导证明了库仑定律不排水条件的破坏孔压力可由破坏面的法向总应力线性表示，线性关系中所设定的孔压系数  $D_f$ 经证明是常数，由此建立了一种新的孔压表示方法，相较于传统的三轴试验的孔压由主应力差表示的形式，这种表达更具有不受应力条件约束的普遍意义。

(2) 经过严格的数学推导和物理意义分析，可知 CU 试验总应力包线线性存在是基于斯开普敦孔压系数  $A_f$ 能与破坏面上孔压系数  $D_f$ 、黏聚力以及破坏时的偏应力建立起一定的数量关系。并从中分析得，只对无黏聚力的土， $A_f$ 才可能为常数；而对具有黏聚力的黏性土， $A_f$ 受黏聚力和内摩擦角影响，并与主应力差的倒数线性相关。

(3) 由 CU 试验已有的有效应力和总应力切线强度指标  $\varphi'$ ， $c'$ 和  $\varphi$ ， $c$ ，推算出 CU 总应力割线指标（即不排水的库仑定律强度指标） $\varphi_R$ ， $c_R$ 。该套指标的应用确保了孔压系数  $A_f$ 和  $D_f$ 预测的实用性，并使得对已知破坏面的土体强度和土坡安全系数评估更为合理、准确。

(4) 对设定滑动面的土体强度和安全系数计算问题，采用 CU 总应力割线强度指标原理清晰，计算结果也更为合理准确，而如采用的 CU 总应力切线强度指标，可能使计算强度或安全系数比真实值偏大



10%以上; 而对已知大小主应力值的求解地基极限承载力和土压力状态问题, 极限状态的莫尔圆与切线有着直接的联系, 则推荐采用 CU 总应力切线强度指标。

致 谢: 本文撰写过程中得到殷宗泽教授的很多指点和启发, 在此敬表谢忱。

#### 参考文献:

- [1] 罗嗣海, 杨建永. 正常固结饱和土总应力强度指标的有效应力分析[J]. 东华理工大学学报(自然科学版), 2008, **31**(1): 69 - 72. (LUO Si-hai, YANG Jian-yong. The effective stress analysis of total stress strength parameters for normally-consolidated saturated soil[J]. Journal of East China Institute of Technology, 2008, **31**(1): 69 - 72. (in Chinese))
- [2] 孔祥国. 有效应力与总应力强度及其指标的比较分析[J]. 西部探矿工程, 2005(5): 33 - 34. (KONG Xiang-guo. Comparative analysis of the strength and its indicators of effective stress and total stress[J]. West China Exploration Engineering, 2005(5): 33 - 34. (in Chinese))
- [3] 颜治平, 薛伟强. 广义  $k_0$  固结土的固结不排水剪总应力强度指标的确定[J]. 中南公路工程, 2005, **30**(4): 61 - 65. (YAN Zhi-ping, XUE Wei-qiang. The study on the determination of consolidated-undrained shear stress strength indexes of generalizd  $K_0$  consolidated soil[J]. Central South Highway Engineering, 2005, **30**(4): 61 - 65. (in Chinese))
- [4] 程相华. 有效应力强度指标与总应力强度指标之间的换算关系[J]. 重庆建筑大学学报, 2001, **23**(2): 22 - 25. (CHENG Xiang-hua. Conversion relationship between two strength indices for effective stress and total stress[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2001, **23**(2): 22 - 25. (in Chinese))
- [5] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Geotechnical principles and calculation[M]. 2nd edition. Beijing: China Water Power Press, 1996. (in Chinese))
- [6] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理方法程序[M]. 1 版. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis—theory, methods and programs[M]. 1st edition. Beijing: China Water Power Press, 2003. (in Chinese))

(本文责编 李运辉)