

# 一个考虑剪胀性和应变软化的土体非线性弹性模型

陈 成, 周正明

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘要:** 区别于金属等材料, 土体具有压硬性和剪胀性两个基本性质, 为非胡克材料, 其应力应变关系也分为应变硬化型和软化型两种。针对三轴排水剪切试验情况, 提出了一种新的剪切曲线描述模式和一种新的体变曲线描述模式, 两种描述模式均包含4个参数, 各参数的物理意义明确且容易确定。结合沈珠江提出的三参数非线性弹性模型, 初步提出了一种修正模型。利用一组三轴排水剪切试验数据对提出的修正模型进行了验证, 结果表明, 该修正模型能较准确地反映土体的应变软化特性和剪胀性, 同时还可以描述土体小应变条件下表现出的刚度高度非线性和高模量特征。

**关键词:** 非线性弹性模型; 应变软化; 剪胀性; 小应变

中图分类号: TU443 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2013)S1-0039-05

作者简介: 陈 成(1986-), 男, 江苏宿迁人, 博士研究生, 主要从事土体本构研究。E-mail: chenchengyzdx@163.com。

## Nonlinear elastic model for soils incorporating both dilatancy and strain softening

CHEN Cheng, ZHOU Zheng-ming

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** Different from the metal and other materials, the soils have two basic properties: pressure-sensitivity and dilatancy, and they do not obey the Hook's law. Their stress-strain relationship is also divided into two types: the strain hardening and strain softening. For drained triaxial shear tests, a new shear curve describing mode and a new volume deformation curve describing mode are proposed respectively. Each mode contains four parameters, and the physical meaning of each parameter is clear and easy to identify. Combined with the three-parameter nonlinear elastic model by Sheng Zhu-jiang, a modified model is proposed initially. The modified model is verified by the data of a set of drained triaxial shear tests. The results show that the modified model can reflect both strain softening and dilatancy of soils reasonably. In addition, it can also describe the features of soils at small strain state, high nonlinearity of stiffness and high modulus accurately.

**Key words:** nonlinear elastic model; strain softening; dilatancy; small strain

## 0 引言

相较金属等其他材料, 土具备压硬性和剪胀性两个基本性质<sup>[1]</sup>, 即所谓的应力球张量 - 应变偏张量和应力偏张量 - 应变球张量之间存在交叉影响效应。受这种交叉效应的影响, 土体的应力应变关系可以区分为应变强化型和应变软化型两种基本类型。一般而言, 剪切过程中, 若土体出现剪缩现象, 其应力应变关系往往对应为应变硬化型; 若表现为剪胀, 其应力应变关系对应为应变软化型。为了描述土体复杂的力学变形特性, 各国学者经过不懈努力提出了各种不同的本构模型。

为了描述土体的剪胀特性, 大量学者进行了研究。如基于塑性理论的沈珠江双屈服面模型<sup>[2]</sup>, 殷宗泽双屈服面模型<sup>[3]</sup>等。然而多重屈服面的设置增加了模型复杂性并限制了这类模型的推广。相比之下, 非线性弹性模型因其简洁直观, 物理意义明确, 参数容易确定等优点在工程实践中得到了广泛的应用。例如基于双曲线应力应变关系描述的Duncan-Chang(D-C)模型<sup>[4-5]</sup>。然而, D-C模型是基于广义胡克定律推导得到的, 无法反应土体的剪胀特性。为此, 一些学者开

基金项目: 国家(973)重点基础研究发展计划(2010CB732101)

收稿日期: 2013-03-02



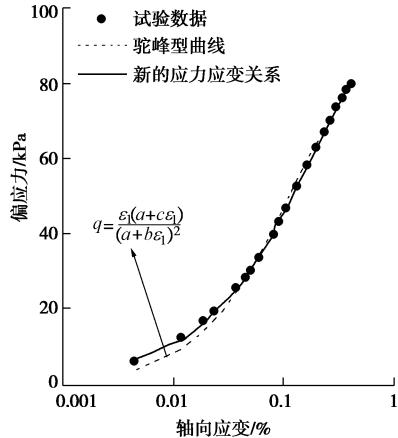


图 2 伦敦黏土的应力应变关系拟合结果

Fig. 2 Fitting results of stress-strain relation of London clay

对表达式(8)、(9)求导可得

$$E_t = \frac{dq}{d\epsilon_1} = \frac{a_1}{(a_1 + b_1\epsilon_1)^2} - \frac{c_1}{(c_1 + d_1\epsilon_1)^2}, \quad (10)$$

$$\mu_t = \frac{d\epsilon_v}{d\epsilon_1} = \frac{a_2}{(a_2 + b_2\epsilon_1)^2} - \frac{c_2}{(c_2 + d_2\epsilon_1)^2}. \quad (11)$$

式(8)中参数  $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c_1$  和  $d_1$  与初始切线模量  $E_{\max}$ 、残余强度  $q_r$ 、峰值应变  $\epsilon_{lp}$  和峰值强度  $q_f$  之间有下列关系:

$$\epsilon_1 \rightarrow 0 \Rightarrow E_{\max} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{c_1}, \quad (12a)$$

$$\epsilon_1 \rightarrow \infty \Rightarrow q_r = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{d_1}, \quad (12b)$$

$$\frac{dq}{d\epsilon_1} = 0 \Rightarrow \epsilon_{lp} = \frac{a_1\sqrt{c_1} - c_1\sqrt{a_1}}{d_1\sqrt{a_1} - b_1\sqrt{c_1}}, \quad (12c)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_{lp} \Rightarrow q_f = \frac{(\sqrt{c_1} - \sqrt{a_1})^2}{b_1c_1 - a_1d_1}. \quad (12d)$$

式(9)中参数  $a_2$ 、 $b_2$ 、 $c_2$  和  $d_2$  与最大体应变  $\epsilon_{vm}$ 、与  $\epsilon_{vm}$  相应的  $\epsilon_{lm}$ 、和残余体应变  $\epsilon_{vr}$  之间有下列关系:

$$\epsilon_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \epsilon_{vr} = \frac{1}{b_2} - \frac{1}{d_2}, \quad (13a)$$

$$\frac{d\epsilon_v}{d\epsilon_1} = 0 \Rightarrow \epsilon_{lm} = \frac{a_2\sqrt{c_2} - c_2\sqrt{a_2}}{d_2\sqrt{a_2} - b_2\sqrt{c_2}}, \quad (13b)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_{lm} \Rightarrow \epsilon_{vm} = \frac{(\sqrt{c_2} - \sqrt{a_2})^2}{b_2c_2 - a_2d_2}. \quad (13c)$$

另外, 剪切曲线  $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1$  的峰值点  $p$  往往对应着最小的体应变变化率  $p'$  点<sup>[10]</sup>, 如图 1 所示, 即

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_{lp}, \\ \frac{d^2\epsilon_v}{d\epsilon_1^2} = 0 &\Rightarrow \frac{a_2b_2}{c_2d_2} = \left( \frac{a_2 + b_2\epsilon_{lp}}{c_2 + d_2\epsilon_{lp}} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (13d)$$

通过建立  $a_1$ 、 $a_2$  等 8 个参数与初始切线模量  $E_{\max}$ 、残余强度  $q_r$  等值之间的关系, 表达式(12a)~(12d)、(13a)~(13d) 赋予了  $a_1$ 、 $a_2$  等 8 个参数具体的物理意义。下面将给出  $E_{\max}$ 、 $q_r$  等参数的确定方法。

$$E_{\max} = E_{\text{ref}} (p / p^{\text{ref}})^{0.5}. \quad (14)$$

式中  $p^{\text{ref}}$  为参考应力, 一般可取为 100 kPa;  $E_{\text{ref}}$  为参考应力  $p^{\text{ref}}$  下对应的初始切线模量;  $E_{\text{ref}}$  可通过共振柱 (Resonant Column, RC)、弯曲元 (Bender Elements, BE) 等动力试验获取, 也可通过具备局部变形测量装置 (LDT) 的静力三轴试验确定。

$$\epsilon_{lp} = a + b(\sigma_3 / P_a), \quad (15)$$

式中,  $a$ 、 $b$  分别为曲线  $\sigma_3 / P_a - \epsilon_{lp}$  的截距和斜率, 可通过常规三轴试验确定。

$$q_f = \frac{2\sigma_3 \sin \varphi + 2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad (16)$$

式中,  $c$ 、 $\varphi$  分别为土体剪切破坏时的黏聚力和内摩擦角, 可通过常规三轴试验确定。

$$\epsilon_{lm} = d + e(\sigma_3 / P_a), \quad (17)$$

式中,  $d$ 、 $e$  分别为曲线  $\sigma_3 / P_a - \epsilon_{lm}$  的截距和斜率, 可通过常规三轴试验确定。

$$\epsilon_{vm} = \alpha(\sigma_3 / P_a)^\beta, \quad (18)$$

式中,  $\ln \alpha$ 、 $\beta$  分别为曲线  $\ln(\sigma_3 / P_a) - \ln \epsilon_{vm}$  的截距和斜率, 可通过常规三轴试验确定。

另外, 残余强度  $q_r$  和残余体应变  $\epsilon_{vr}$  分别为轴向应变趋于无穷大时的偏应力和体应变, 此时土体进入临界状态, 因而可以利用临界状态土力学理论进行求解。对于排水三轴试验, 有

$$q_r = 3M p_0 / (3 - M), \quad (19)$$

式中,  $p_0$  为初始平均应力,  $M$  为  $p-q$  平面内临界状态线的斜率, 可通过常规三轴试验确定。当然, 对于不同的应力路径,  $q_r$  的表达式并不相同, 因而必须根据具体的应力路径进行推导。另外, 对于  $\epsilon_{vr}$  可通过临界孔隙比  $e_{cr}$  以及孔隙比与体积应变之间的关系<sup>[11]</sup>确定, 即

$$e_{cr} = N - \lambda \ln(p_r), \quad (20)$$

$$\epsilon_{vr} = -\ln \left( \frac{1+e_{cr}}{1+e_0} \right). \quad (21)$$

式中  $e_0$  为土体初始孔隙比,  $p_r$  为临界状态下土体所受的平均应力, 可利用  $p_r = q_r/M$  确定;  $\lambda$  为  $e_{cr} - \ln p_r$  平面内临界状态线的斜率;  $N$  为  $p_r = 1$  kPa 时的临界孔隙比。 $\lambda$ 、 $N$  可通过常规三轴试验确定。

至此, 模型的所有参数均具备了明确的物理意义, 模型参数及其确定方法参见表 1。

### 3 单元试验验证

对一组密实的渥太华砂 (Ottawa sand) 的排水三轴压缩试验结果<sup>[12]</sup>进行模拟, 以验证模型的有效性。试验材料的基本物性指标参见表 2。试验的初始围压

分别为 200, 500, 800 kPa, 试验的剪切曲线和体变曲线参见图 3。

表 1 模型参数汇总

Table 1 Summary of model parameters

曲线类型	压缩曲线	剪切曲线	体变曲线
模型参数 1	$M_t$	$E_t$	$\mu_t$
模型参数 2	—	$E_{\max}, q_f$ $\varepsilon_{lp}, q_f$	$\varepsilon_{vm}, \varepsilon_{vr}$ $\varepsilon_{lm}, \varepsilon_{vr}$
材料常数	$m, k_m$	$E_{ref}$	$a, b, c, \varphi$ $d, e,$ $M, N, \lambda$
确定方法	CT	RC	TST

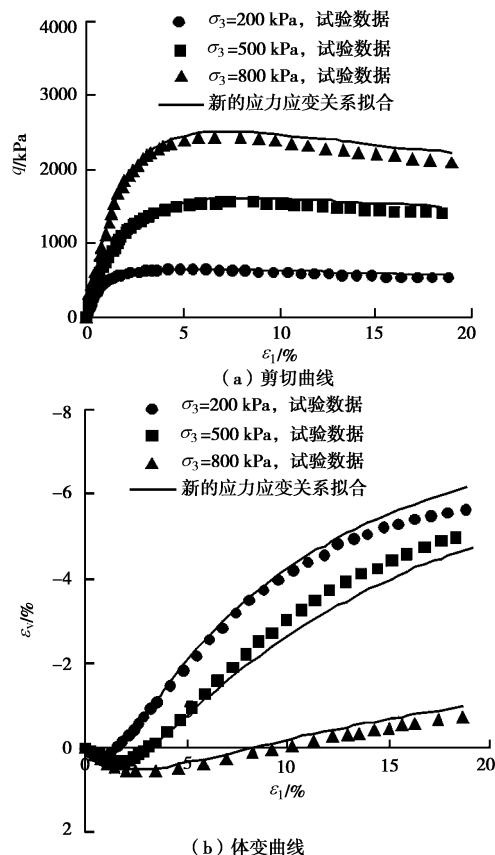


图 3 渥太华排水三轴压缩砂试验结果

Fig. 3 Results of drained triaxial compression tests on Ottawa sand

根据试验结果, 利用表达式(15)~(21)求出相应的模型参数值, 参见表 3 和图 4。利用这些参数拟合试验测出的剪切曲线和体变曲线, 如图 3 所示。可以看出, 拟合值与实测值基本重合, 较好地描述了土体三轴排水剪切试验中出现的应变软化现象和体积剪胀现象。初步验证了模型的合理性。

表 2 试验材料物性指标

Table 2 Physical indices of test materials

比重	级配指标		初始孔隙比 $e_0$			界限孔隙比	
	$C_u$	$C_c$	200	500	800	$e_{\max}$	$e_{\min}$
2.65	1.66	1.02	0.53	0.54	0.59	0.74	0.52

表 3 渥太华砂的模型参数

Table 3 Model parameters of Ottawa sand

$a$	$b$	$d$	$e$	$\alpha$	$\beta$
0.0057	0.0388	0.002	0.0048	0.0024	0.3821
$M$	$c/kPa$	$\phi/(^{\circ})$	$N$	$\lambda$	$E_{ref}/kPa$
1.1	0	37.9	0.7761	0.0191	475

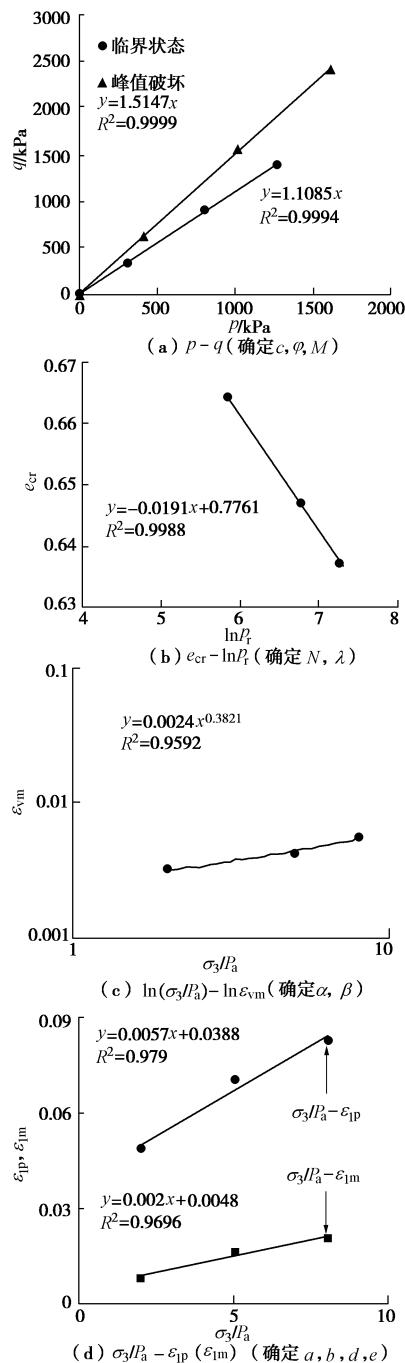


图 4 模型参数确定

Fig. 4 Determination of model parameters

## 4 结语

在非线弹性模型研究范畴内, 本文在沈氏三参数模型基础上, 针对三轴排水剪切试验条件, 提出了

一种新的剪切曲线描述模式和一种体变曲线描述模式。前者可以准确地描述土体的应变软化特性, 同时还能反映小应变情况下刚度的高度非线性和高模量等变形特征; 后者可以准确地反映土体的剪胀特性。通过对一组单元试验的模拟, 初步验证了模型的合理性。当然, 模型的适用性还需进一步对不同具体工程实例的计算来加以检验。

### 参考文献:

- [1] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHENG Zhu-jiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: China Water Power Press, 2000. (in Chinese))
- [2] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, 2(2): 11 - 19. (SHENG Zhu-jiang. An reasonable constitutive model of soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1980, 2(2): 11 - 19. (in Chinese))
- [3] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力 - 应变模型[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(4): 64 - 71. (YIN Zong-ze. A stress-strain model with double yield surfaces[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 10(4): 64 - 71. (in Chinese))
- [4] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. Journal of Soils Mechanics and Foundations Engineering Division, ASCE, 1970, 96(5): 1629 - 1652.
- [5] DUNCAN J M, BYRNE P, WONG K S. Stress-strain and bulk modulus of parameters for finite element analysis of stress and movements in soil[R]. Berkeley: San Francisco: University of California, 1980.
- [6] 沈珠江. 考虑剪胀性的土和石料的非线性应力应变模式[J]. 水利水运科学研究, 1986(4): 1 - 14. (SHENG Zhu-jiang. A nonlinear dilatant stress-strain model for soils and rock materials[J]. Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute, 1986(4): 1 - 14. (in Chinese))
- [7] 程展林, 姜景山, 丁红顺. 粗粒土非线性剪胀模型研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(1): 39 - 43. (CHEN Zhan-lin, JIANG Jing-shan, DING Hong-shun. Nonlinear dilatancy model for coarse-grained soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 32(1): 39 - 43. (in Chinese))
- [8] 沈珠江. 坝料土的应力应变关系及其测定方法的初步研究[R]. 南京: 南京水利科学研究院, 1985: 215 - 235. (SHEN Zhu-jiang. Preliminary research on the stress-strain relationship of dam material soil and its determination[R]. Nanjing: Nanjing hydraulic research institute, 1985: 215 - 235. (in Chinese))
- [9] BURLAND J B, SYMES M J. A simple axial displacement gauge for use in the triaxial apparatus[J]. Géotechnique, 1982, 32(1): 62 - 65.
- [10] BOLTON M D. The strength and dilatancy of sands[J]. Géotechnique, 1986, 36(1): 65 - 78.
- [11] 岑威钧. 堆石料亚塑性本构模型及面板堆石坝数值分析[D]. 南京: 河海大学, 2005. (CEN Weijun. Hypoplastic modeling for rockfill and numerical analysis of CFRD[D]. Nanjing: Hohai University, 2005. (in Chinese))
- [12] KATRINA R. The stress-dilatancy behaviour of sands: pressure and density dependencies in both monotonic and cyclic loading regimes[D]. Ottawa: University of Calgary, 1997.

(本文责编 胡海霞)