

填埋场污染物在有限厚度土层中一维对流-扩散-吸附解析解

张文杰, 黄依艺, 张改革

(上海大学土木工程系, 上海 200072)

摘要: 为避免垃圾填埋场对地下水的污染, 衬垫系统的截污性能至关重要。针对卫生垃圾填埋场衬垫底部设有地下水导排层的工程要求, 建立了污染物在有限厚度土层中一维对流-扩散-吸附解析模型并求解, 其中模型底部采用Cauchy边界模拟渗滤液污染物透过衬垫向零浓度环境传质。算例结果表明, 解析解与商用软件数值解所得浓度场分布完全吻合; 参数分析表明, 吸附、扩散和对流参数对击穿曲线均有较大影响, 为延长击穿时间, 应尽可能采用吸附性能好的土层并严格控制衬垫上的水头高度。

关键词: 污染物; 压实黏土衬垫; 对流-扩散-吸附; 向零浓度传质; 击穿时间

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2013)07-1197-05

作者简介: 张文杰(1978-), 男, 山东青岛人, 博士, 副教授, 从事环境土工方面的研究。E-mail: wjzhang2008@gmail.com。

Analytical solution for 1D advection-diffusion-adsorption transport of landfill contaminants through a soil layer with finite thickness

ZHANG Wen-jie, HUANG Yi-ji, ZHANG Gai-ge

(Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: Performance of liner systems is very important to prevent groundwater contamination by landfills. In accordance with the case that groundwater drainage layers are built beneath the liner systems in sanitary landfills, a 1D analytical model for advection-diffusion-adsorption process of contaminants through a soil layer with finite thickness is proposed. Cauchy boundary is adopted to simulate the mass migration to a zero concentration circumstance. The results show that the analytical solution coincides well with that of a commercial numerical software. The analytical solution is reasonable and accurate. Parametric analyses show that adsorption, diffusion and advection all have great influence on the breakthrough curves. To improve the performance of clayey liners, the soil layer with high adsorption ability is suggested, and leachate head need to be strictly controlled.

Key words: contaminant; CCL; advection-diffusion-adsorption; mass transfer to zero concentration circumstance; breakthrough time

0 引言

填埋是中国处理城市垃圾的主要方式。垃圾填埋场使用年限一般为几十年, 实际上, 固体废弃物在填埋场中存在时间可达几百年甚至上千年, 为确保填埋场不对地下水造成污染, 场底衬垫系统就成为污染物的长期屏障^[1]。污染物在衬垫系统中的运移主要包括对流、扩散和吸附, 其中, 当渗滤液水位能控制在规范规定的30 cm以内时, 分子扩散占主导地位, 可仅考虑分子扩散加吸附^[2-3]。然而, 由于中国垃圾初始含水量高、场区雨污分流措施不当、渗滤液导排不畅等原因, 致使填埋场渗滤液水位普遍超出规范要求, 特别是在南方地区, 渗滤液水位可达几米甚至十几米,

这时必须考虑污染物运移中的对流作用^[4-5]。

土体中污染物运移问题的研究可采用有限差分法、边界元法、有限元法等数值方法, 也可采用解析方法, 虽然解析解具有较为苛刻的限制条件, 但其物理意义明确、计算简单、无截断误差^[6]。Foose^[7]给出了污染物在双层土中的一维扩散解, 谢海建等^[8-9]给出了任意层数层状土中污染物一维扩散解, 这些研究虽考虑到土体的成层性, 但都只考虑了扩散和吸附作用, 而未考虑对流的影响, 仅适用于渗滤液水位能得到有

效控制的情形。Shackelford^[10]给出了污染物在半无限土体中的一维对流-扩散解, 但该解在 Peclet 数较小的时候会有较大的误差。Acar 等^[11]基于有限厚度土层给出了一维对流-扩散解, 但该解下边界采用的是齐次 Neumann 边界, 即土层底部浓度梯度始终为 0, 对应下卧为连续土层的工况, 而规范中的卫生填埋场黏土衬垫下设有地下水导流层^[12], 这时衬垫底部外边界浓度迅速消散至 0, 而内边界会囤积一定浓度, 内外边界浓度不连续, 这种情况下, 不能采用齐次 Neumann 边界。

本文考虑对流、扩散和线性吸附, 针对黏土衬垫向 0 浓度环境(地下水导流层)传质的工况, 引入了与之对应的 Cauchy 边界, 建立了污染物在有限厚度土层中一维对流-扩散-吸附解析模型, 并与商用软件的结果进行了对比。本文解可为高渗滤液水位填埋场衬垫系统的设计提供参考, 可推广至污染物透过低渗透性土层向地下水运移的一般情形, 用于试验数据拟合、复杂数值模型初步验证。

1 数学模型及求解

1.1 基本假定

建立有限厚度土层中污染物一维迁移模型时假定: ①土层为有限厚度的均匀土体; ②污染物是单一离子或有机物; ③污染物在土层中的运移方式考虑分子扩散、机械弥散、对流和吸附; ④污染物在土中的扩散遵循 Fick 第二定律, 土体对污染物的吸附为等温线性吸附, 渗流场为一维饱和稳态流场。

1.2 控制方程及定解条件

建立污染物在单层有限厚度土层中对流-扩散-吸附模型, 如图 1 所示。污染物在厚度为 H 的土层中, 迁移控制方程为

$$nD \frac{\partial^2 C(z,t)}{\partial z^2} - V \frac{\partial C(z,t)}{\partial z} = nR_d \frac{\partial C(z,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

式中, $C(z, t)$ 为浓度场, z 为空间坐标, t 为时间坐标, n 为土体孔隙率, D 为水动力弥散系数, 是同时考虑分子扩散和机械弥散的综合参数, V 为达西流速, R_d 为吸附阻滞因子。

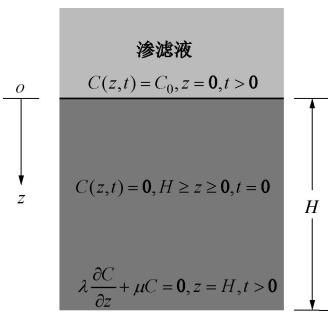


图 1 解析模型简图

Fig. 1 Diagram of analytical model

令

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{D}{R_d}, \\ \beta &= \frac{V}{nR_d}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)可简化为

$$\alpha \frac{\partial^2 C(z,t)}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial C(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial C(z,t)}{\partial t}. \quad (3)$$

假设计算区域内初始浓度为 0, 则模型的初始条件为

$$C(z,t) = 0 \quad (0 \leq z \leq H, t = 0). \quad (4)$$

边界条件如下:

(1) 填埋场底部衬垫上渗滤液浓度保持 C_0 不变, 则上边界条件为

$$C(z,t) = C_0 \quad (z = 0, t > 0). \quad (5)$$

(2) 下边界, 文献中常用 Dirichlet 边界及 Neumann 边界, 针对衬垫底部存在地下水导流层这一情形, 文献中常假定衬垫底部与导流层的接触膜系数^[13]无限大, 而采用零浓度的 Dirichlet 边界, 但膜系数无限大是理想状况, 实际的膜系数必然为有限值, 这样实际边界应是介于 Dirichlet 边界(膜系数无限大)及 Neumann 边界(膜系数为 0)之间的, 这一边界就是 Cauchy 边界, 又称第三类边界条件, 其物理意义是具有一定浓度的内边界向外部 0 浓度环境传质。其数学表达为

$$\lambda \frac{\partial C(z,t)}{\partial z} + \mu C(z,t) = 0 \quad (z = H, t > 0). \quad (6)$$

式中, λ, μ 为描述第三类边界条件的参数, 一般而言 λ 等于或正比于弥散系数, 不为零; 当接触参数 μ 趋向无限大, 退化成第一类齐次边界条件(Dirichlet 边界), 当 $\mu=0$, 退化成第二类齐次边界条件(Neumann 边界)。下文用 μ/λ 表示 Cauchy 边界参数。

式(3)~(6)所组成的定解问题即为本文所建立的污染物在有限厚度土层中的一维对流-扩散-吸附数学模型。

1.3 模型的求解

首先, 通过变换式

$$C(z,t) = W(z,t) e^{\frac{\beta}{2\alpha} z - \frac{\beta^2}{4\alpha} t}, \quad (7)$$

将原问题转换成一个关于 $W(z, t)$ 的问题, $W(z, t)$ 问题描述如下:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} &= \frac{\partial W(z,t)}{\partial t} \quad (0 < z < H, t > 0), \\ W(z,t) &= C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} t} \quad (z = 0, t > 0), \\ \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} + \frac{\mu}{\lambda} W(z,t) &= 0 \quad (z = H, t > 0), \\ W(z,t) &= 0 \quad (0 \leq z \leq H, t = 0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中,

$$\frac{\bar{\mu}}{\lambda} = \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\mu}{\lambda} \quad . \quad (9)$$

由于关于 $W(z, t)$ 问题的上边界条件与时间有关, 所以引入如下的辅助问题 $\Phi(z, t, \tau)$ 。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial^2 \Phi(z, t, \tau)}{\partial z^2} = \frac{\partial \Phi(z, t, \tau)}{\partial t} \quad (0 < z < H, \quad t > 0), \\ \Phi(z, t, \tau) = C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \quad (z = 0, \quad t > 0), \\ \frac{\partial \Phi(z, t, \tau)}{\partial z} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \Phi(z, t, \tau) = 0 \quad (z = H, \quad t > 0), \\ \Phi(z, t, \tau) = 0 \quad (0 \leq z \leq H, \quad t = 0). \end{array} \right\} \quad (10)$$

此时, 上边界条件与时间无关, 但是非齐次的, 这里把 $\Phi(z, t, \tau)$ 写成一个稳态非齐次问题 $\Phi_1(z, \tau)$ 和一个齐次非稳态问题 $\Phi_2(z, t, \tau)$ 的叠加, 即 $\Phi(z, t, \tau) = \Phi_1(z, \tau) + \Phi_2(z, t, \tau)$ 。

对于 $\Phi_1(z, \tau)$ 、 $\Phi_2(z, t, \tau)$ 的描述分别如下:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 \Phi_1(z, \tau)}{dz^2} = 0 \quad (0 < z < H), \\ \Phi_1(z, \tau) = C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \quad (z = 0), \\ \frac{d \Phi_1(z, \tau)}{dz} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \Phi_1(z, \tau) = 0 \quad (z = H). \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial^2 \Phi_2(z, t, \tau)}{\partial z^2} = \frac{\partial \Phi_2(z, t, \tau)}{\partial t} \quad (0 < z < H, \quad t > 0), \\ \Phi_2(z, t, \tau) = 0 \quad (z = 0, \quad t > 0), \\ \frac{\partial \Phi_2(z, t, \tau)}{\partial z} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \Phi_2(z, t, \tau) = 0 \quad (z = H, \quad t > 0), \\ \Phi_2(z, t, \tau) = -\Phi_1(z, \tau) \quad (0 \leq z \leq H, \quad t = 0). \end{array} \right\} \quad (12)$$

分别求解 $\Phi_1(z, \tau)$ 、 $\Phi_2(z, t, \tau)$:

$$\Phi_1(z, \tau) = C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \left[1 - \frac{\frac{\bar{\mu}}{\lambda} z}{1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} H} \right], \quad (13)$$

$$\Phi_2(z, t, \tau) = C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\sin \beta_m z) (e^{-\alpha \beta_m^2 t}). \quad (14)$$

故

$$\begin{aligned} \Phi(z, t, \tau) &= C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \left[1 - \frac{\frac{\bar{\mu}}{\lambda} z}{1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} H} \right] + \\ &C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\sin \beta_m z) (e^{-\alpha \beta_m^2 t}). \end{aligned} \quad (15)$$

将 $\Phi(z, t, \tau)$ 写成 $\Phi(z, t - \tau, \tau)$,

$$\begin{aligned} \Phi(z, t - \tau, \tau) &= C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \left[1 - \frac{\frac{\bar{\mu}}{\lambda} z}{1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} H} \right] + \\ &C_0 e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} \tau} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\sin \beta_m z) (e^{-\alpha \beta_m^2 (t - \tau)}). \end{aligned} \quad (16)$$

根据杜哈梅定理

$$W(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(z, t - \tau, \tau) d\tau. \quad (17)$$

由式 (16)、(17) 以及变换式 (7), 可得

$$\begin{aligned} C(z, t) &= C_0 \left\{ e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} z} \left[1 - \frac{\frac{\bar{\mu}}{\lambda} z}{1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} H} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} z} \sin \beta_m z \right) \cdot \right. \\ &\left. \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \alpha \beta_m^2 \right)^{-1} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \alpha \beta_m^2 e^{-\frac{\beta^2 + \alpha \beta_m^2}{4\alpha} t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

式 (18) 即为本文所求有限厚度土层中污染物一维对流-扩散-吸附浓度解。式 (14) ~ (16)、(18) 中的待定系数 c_m 为

$$c_m = \frac{2 \left[\beta_m^2 + \left(\frac{\bar{\mu}}{\lambda} \right)^2 \right]}{H \left[\beta_m^2 + \left(\frac{\bar{\mu}}{\lambda} \right)^2 \right] + \frac{\bar{\mu}}{\lambda}} \beta_m^{-1} \left[\frac{\bar{\mu}}{\lambda} \left(1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} H \right)^{-1} \cdot \right. \\ \left. \left(\beta_m^{-1} \sin \beta_m H - H \cos \beta_m H \right) + \left(\cos \beta_m H - 1 \right) \right]. \quad (19)$$

特征值 β_m 为下列超越方程正根,

$$\beta_m \cot \beta_m H = -\frac{\bar{\mu}}{\lambda}. \quad (20)$$

2 与数值解比较

基于上述推导的浓度场解析解进行了简单编程, 对一个厚度 $H=2$ m 的土层进行了分析。土层背景浓度为 0, 上下边界水头差 3 m, 上边界恒定浓度 $C_0=2$ g/L, Cauchy 边界参数 μ/λ 取 0.1 m^{-1} , 土层参数: $n=0.42$, $\rho_d=1.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $R_d=1.2$, $D=2.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, $k_s=1.0 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ 。

图 2 给出了 5 a, 10 a, 15 a, 20 a, 25 a, 30 a 时土层各深度处的污染物浓度, 各曲线显示了污染晕向下逐步扩展的过程, 其中底部边界处显示的为边界上部 0.001 mm 处的浓度值, 可以看出, 图中 15 a 以后此处浓度明显大于零, 本文将其称为“出流浓度”(后文将用出流浓度定义衬垫击穿时间), 对比文献中强制底部浓度恒为零的边界, 本文模型能更好描述衬垫击穿后的污染物运移状况, 即模拟其长期性能。图中同时给出了同样条件下商用软件 (CTTRAN/W) 的模拟结果, 两者完全吻合, 验证了本文解析解的正确性及精度。

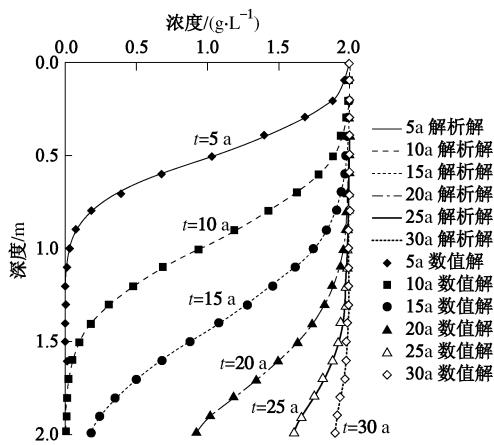


图 2 不同时刻各深度处污染物浓度

Fig. 2 Concentration distribution at different time

3 衬垫击穿时间的参数分析

击穿时间是衡量填埋场衬垫系统截污性能的主要指标,选用中国规范中的2 m厚压实黏土衬垫(CCL)为研究对象,如图3所示,渗滤液中污染物浓度 $C_0=2$ g/L,地下水导流层中污染物浓度为0。根据表1列出的7种工况,利用本文解析解计算各时刻CCL底部出流浓度(采用相对浓度),得到击穿曲线如图4~6所示。

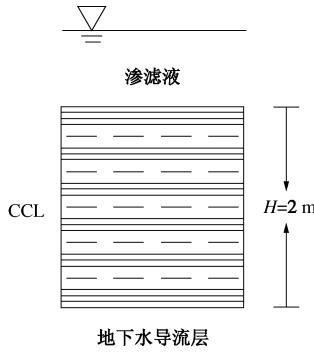


图 3 CCL 衬垫系统结构示意图

Fig. 3 Structural diagram of CCL

表 1 参数分析的各工况

Table 1 Cases of parametric analysis

工况	阻滞因子 R_d	水动力弥散 $D/(cm^2·s^{-1})$	流速 $v/(cm·s^{-1})$
1	1.2		
2	1.4	2.0×10^{-6}	3.0×10^{-7}
3	2.0		
4	1.2	5.0×10^{-6}	3.0×10^{-7}
5		2.0×10^{-5}	
6	1.2	2.0×10^{-6}	1.0×10^{-7}
7			3.0×10^{-8}

注: 表中流速为实际流速,即达西流速除以孔隙率。

图4各工况(工况1, 2, 3)扩散系数和流速均相同,仅土层吸附性能(用阻滞因子表示)不同。图

中显示,在本文工况下若使底部出流浓度达到源浓度 C_0 ,即全浓度出流所需时间一般需几十年甚至上百年,但在此之前早已有大量污染物穿过衬垫。以出流浓度分别为到0.1% C_0 和10% C_0 的时刻定义击穿时间,若阻滞因子取1.2, 0.1%和10%的击穿时间分别为11.2 a和17.2 a,若阻滞因子增至2.0,则0.1%击穿时间由增至18.6 a, 10%击穿时间增至28.75 a。因此,采用吸附性能好的衬垫土层可有效延缓污染物击穿时间。

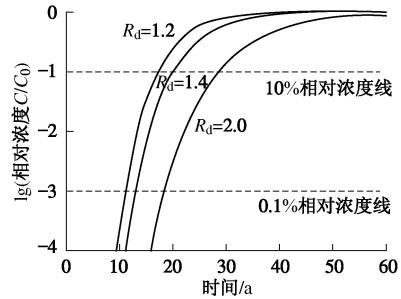


图 4 土层吸附性能对衬垫击穿曲线的影响

Fig. 4 Influence of adsorption ability

图5各工况(工况1, 4, 5)阻滞因子和流速均相同,仅污染物扩散系数不同,可见扩散系数对击穿曲线有较大影响。衬垫底部全浓度出流的时刻随扩散系数增大而延长;而击穿时间随扩散系数的增大明显减少,图中扩散系数 $2.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, $5.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, $2.0 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ 对应的0.1%击穿时间分别为11.2 a, 7.12 a, 2.6 a, 对应10%击穿时间分别为17.2 a, 13.3 a, 6.6 a。

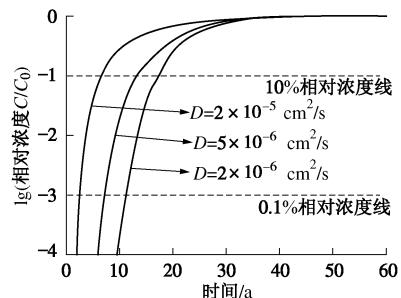


图 5 溶质扩散系数对衬垫击穿曲线的影响

Fig. 5 Influence of diffusion coefficient

图6各工况(工况1, 6, 7)阻滞因子和扩散系数均相同,仅流速不同(对应实际工程中的渗滤液水位或衬垫层渗透系数的变化),可见流速对击穿曲线有较大影响,图中显示,流速由 $3.0 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ 减至 $3.0 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$,则0.1%浓度击穿时间由11.2 a延至26.2 a, 10%浓度击穿时间由17.2 a延至65.3 a。因此,控制衬垫上的渗滤液水位高度对衬垫截污性能至关重要。

要。

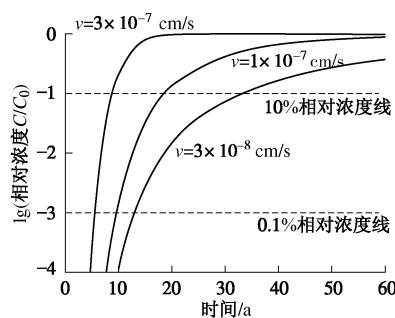


图 6 流速对衬垫击穿曲线的影响

Fig. 6 Influence of liquid flow velocity

4 结 论

本文结合卫生填埋场构造要求, 推导了污染物在有限厚度土层中一维对流-扩散-吸附解析解, 主要得出如下结论:

(1) 压实黏土衬垫下设有地下水导流层, 或污染物从低渗透性土层向地下水迁移, 其物理本质都是向零浓度环境传质, 对其模拟可通过引入底部的 Cauchy 边界实现。

(2) 本文一维解析模型考虑对流、扩散和吸附, 模拟污染物在黏土衬垫中的运移, 所得算例的浓度场结果与商用软件完全吻合, 说明解析解结果精确合理。

(3) 参数分析表明, 衬垫击穿时间随阻滞因子的增大而增大, 随扩散系数和流速的增大而减小, 为提高衬垫截污性能, 应采用吸附性能好的衬垫土层并严格控制渗滤液水头高度。

参考文献:

- [1] GOODALL D C, QUIGLEY R M. Pollutant migration from two sanitary landfill sites near Sarnia, Ontario[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1977, **14**(2): 223 - 236.
- [2] JOHNSON R L, CHERRY J A, PANKOW J F. Diffusion contaminant transport in natural clay: a field example and implications for clay-lined waste disposal sites[J]. Journal of Environmental Science and Technology, 1989, **23**(3): 340 - 349.
- [3] ROWE R K, CAERS C J, BARONE F. Laboratory determination of diffusion and distribution coefficients of contaminants using undisturbed clayey soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1988, **25**(1): 108 - 118.
- [4] 张文杰, 陈云敏, 詹良通. 垃圾填埋场渗滤液床垂直防渗帷幕的渗漏分析[J]. 环境科学学报, 2008, **28**(5): 925 - 929. (ZHANG Wen-jie, CHEN Yun-min, ZHAN Liang-tong. Transport of leachate through vertical curtain grouting in landfill[J]. Acta Scientiae Circumstantiae, 2008, **28**(5): 925 - 929. (in Chinese))
- [5] ZHANG W J, QIU Q W. Analysis on contaminant migration through vertical barrier walls in a landfill in China[J]. Environ Earth Sci, 2010, **61**: 847 - 852.
- [6] PARK E Y, ZHAN H B. Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three dimensional sources in finite-thickness aquifer[J]. Journal of Contaminant Hydrology, 2001, **53**: 41 - 61.
- [7] FOOSE G J. Transit-time design for diffusion through composite liners[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, **128**(1): 590 - 601.
- [8] 谢海建, 詹良通, 陈云敏, 等. 我国四类衬垫系统防污性能的比较分析[J]. 土木工程学报, 2011, **44**(7): 133 - 141. (XIE Hai-jian, ZHAN Liang-tong, CHEN Yun-min, et al. Comparison of the performance of four types of liner systems in China[J]. China Civil Engineering Journal, 2011, **44**(7): 133 - 141. (in Chinese))
- [9] 陈云敏, 谢海建, 柯瀚, 等. 层状土中污染物的一维扩散解析解[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(4): 521 - 524. (CHEN Yun-min, XIE Hai-jian, KE Han, et al. Analytical solution of contaminant diffusion through multi-layered soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(4): 521 - 524. (in Chinese))
- [10] SHAKELFORD C D. Transit-time design of earthen barriers[J]. Engineering Geology, 1990, **29**(1): 79 - 94.
- [11] ACAR Y B, HAIDER L. Transport of low concentration contaminants in saturated earthen barriers[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1990, **116**(7): 1031 - 1052.
- [12] CJJ17—2004 城市生活垃圾卫生填埋技术规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2004. (CJJ17—2004 Regulations on sanitary landfill of municipal solid waste[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2004. (in Chinese))
- [13] OZISIK M N. Heat conduction[M]. New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 1993.