

真空联合堆载预压下竖井地基固结解析解

郭彪^{1,2}, 龚晓南², 卢萌盟³, 张发春¹, 房锐¹

(1. 云南省交通规划设计研究院陆地交通灾害防治技术国家工程实验室, 昆明 650200; 2. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室,
浙江 杭州 310027; 3. 中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221008)

摘要: 考虑真空度沿竖井的发展是一个深度的函数, 同时堆载所引起的附加应力既随时间变化也随深度变化, 还考虑了地基的径向渗流以及扰动区土体水平渗透系数的3种变化模式, 推导了真空联合堆载预压下竖井地基固结度的一个较普遍的解析解, 并分析了在真空度沿竖井线性下降, 堆载线性施加和附加应力沿深度梯形分布等情况下地基固结性状。结果表明, 荷载线性施加时, 真空度对地基固结度有较大影响, 真空度越大, 沿深度衰减越慢, 固结越快; 而在荷载瞬时施加时, 真空度对固结度没有影响。在地基井径比和水平渗透系数与竖向渗透系数之比较小时, 地基的竖向渗流对地基的固结度有较大的影响。

关键词: 竖井地基; 固结; 真空联合堆载预压; 解析解

中图分类号: TU47 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2013)06-1045-10

作者简介: 郭彪(1982-), 男, 四川省安岳人, 博士, 高级工程师, 主要从事软黏土力学、地基处理及边坡工程等方面的研究工作。E-mail: gb25891775@163.com。

Analytical solution for consolidation of vertical drains by vacuum-surcharge preloading

GUO Biao^{1,2}, GONG Xiao-nan², LU Meng-meng³, ZHANG Fa-chun¹, FANG Rui¹

(1. National Engineering Laboratory for Land Transport Meteorological Disaster Control Technology, Yunnan Provincial Plan, Resign and Research Institute of Communications, Kunming 650200, China; 2. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 3. State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract: A general analytical solution is obtained for the consolidation of vertical sand foundation under vacuum preloading considering simultaneously the variation of vacuum degree, the coupled variation of stress increment with depth and time, the horizontal and vertical drainage and the variation of horizontal permeability coefficient of soil. Furthermore, detailed solutions are obtained for the excess pore water pressure and average degree of consolidation under the particular situation that the vacuum degree linearly changes along the vertical drain depth, the stress increment linearly changes along the column depth and the loading is applied in a single-stage way. Finally, the consolidation behavior of the vertical drain foundation is analyzed. The results show that if the loading is applied linearly, consolidation degrees of foundation have something to do with the vacuum degree, the larger the vacuum is, the faster the consolidation is, the slower the reducing of vacuum is, the faster the consolidation. If the loading is applied instantaneously, consolidation degrees of foundation have nothing to do with the vacuum degree. Ignoring the vertical flow within the soil will under-estimate the consolidation rate. Furthermore, the less the radius ratio is and the less the ratio of horizontal permeability to vertical permeability is, the greater the under-estimated value is.

Key words: vertical drain; consolidation; vacuum-surcharge preloading; analytical solution

0 引言

真空预压法是由瑞典皇家地质学院 Kiellman^[1]在1952年提出的一种有效的软土地基处理方法, 并可与堆载预压联合应用。要达到相同的处理效果, 真空联合堆载预压可有效减小所需的堆载荷载; 并且真空预压时土体的有效应力是等轴增大的, 对应的侧向变形

表现为向内压缩, 因此可有效降低地基剪切破坏的风险。

在早期的研究中, 真空预压被当作均匀分布在地

基金项目: 国家自然科学基金项目(51009135); 中国博士后科学基金特别资助项目(2012T50525)

收稿日期: 2012-07-18

基表面的作用力，但试验表明，真空气度会沿着竖井向地基深处传递，但真空气度不断减小^[2]。Indraratna 等^[3-4]考虑了这一因素，推导了只考虑地基径向渗流情况下地基的固结解析解。Rujikiatkamjorn 等^[5]考虑了地基的径向和竖向组合渗流，得到了解析解，但假设真空气度沿竖井深度均匀分布。

在目前的研究中，均假设堆载是瞬时施加的，并且其所产生的附加应力沿深度不变。但实际上堆载施加往往需要经过一段时间，所产生的附加应力也是沿深度变化的。

针对以上情况，本文考虑真空气度沿竖井的发展是一个深度的函数，同时考虑堆载所引起的附加应力既随时间变化也随深度变化，还考虑了地基的径向渗流以及扰动区土体水平渗透系数的 3 种变化模式，推导了真空联合堆载预压下竖井地基固结度的一个较普遍的解析解。并分析了在真空气度沿竖井线性下降，堆载线性施加和附加应力沿深度梯形分布情况下的地基固结性状。

1 固结方程及求解条件

图 1 为真空联合堆载预压下砂井地基固结简化模型。在本文的推导过程中，做了以下假定：①土体是完全饱和的；②土颗粒和水都不可压缩，土体的变形完全由孔隙水的排出引起；③土体压缩模量以及竖向渗透系数保持不变；④土中水的渗流服从 Darcy 定律；⑤等应变条件成立；⑥真空预压瞬时施加，在砂井中沿深度的传递函数为 $-p(z)$ ；⑦堆载在地基中引起的附加应力为深度和时间的函数 $\sigma(z, t)$ 。

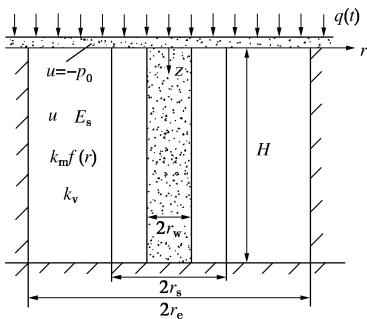


图 1 真空联合堆载预压竖井地基固结简化模型

Fig. 1 Simplified model for consolidation of vertical drains by vacuum-surchARGE preloading

根据等应变条件，有

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma - \bar{u})}{E_s \partial t} \quad (1)$$

式中 ε_v 为地基竖向应变； E_s 为土体压缩模量； $q(t)$ 为上部荷载； \bar{u} 为土体任一深度处的平均超静孔压，

表达式为

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} 2\pi r u dr \quad , \quad (2)$$

式中， r_w 为砂井半径， r_e 为砂井影响区半径， u 为土体任一点的超静孔压。

砂井地基的固结方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{k_m f(r)}{\gamma_w} r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad . \quad (3)$$

式中 k_v 为土体竖向渗透系数； $k_m f(r)$ 为土体水平向渗透系数，其中 k_m 为未扰动区水平渗透系数， $f(r)$ 为描述渗透系数随 r 变化的函数。

其径向边界条件为

$$r = r_e \text{ 时}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 ; \quad (4)$$

$$r = r_w \text{ 时}, \quad u = -p(z) . \quad (5)$$

将式(3)两边对 r 积分，并利用边界条件式(4)可得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\gamma_w}{2k_m} \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \left[\frac{r_e^2}{rf(r)} - \frac{r}{f(r)} \right] . \quad (6)$$

再将式(6)两边对 r 积分，并利用边界条件式(5)可得

$$u = \frac{\gamma_w}{2k_m} \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \left[r_e^2 A_0(r) - B_0(r) \right] - p(z) , \quad (7)$$

式中， $A_0(r) = \int_{r_w}^r \frac{dx}{f(x)x}$ ， $B_0(r) = \int_{r_w}^r \frac{x dx}{f(x)}$ 。

将式(7)代入式(2)可得

$$\bar{u} = \frac{\gamma_w}{(r_e^2 - r_w^2)k_m} \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \left(r_e^2 A_1 - B_1 \right) - p(z) , \quad (8)$$

式中， $A_1 = \int_{r_w}^{r_e} r A_0(r) dr$ ， $B_1 = \int_{r_w}^{r_e} r B_0(r) dr$ 。

将式(1)代入式(8)并整理可得

$$A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - B \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{u} = p(z) - B \frac{\partial \sigma}{\partial t} , \quad (9)$$

式中， $A = \frac{k_v r_e^2 F_a}{2k_m}$ ， $B = \frac{r_e^2 F_a}{2c_h}$ ， $F_a = \frac{2(r_e^2 A_1 - B_1)}{r_e^2 (r_e^2 - r_w^2)}$ ，

$$c_h = \frac{E_s k_m}{r_w} .$$

式(9)即为本文真空联合堆载预压下砂井地基固结问题的控制方程，其边界条件为

$$z = 0 : \quad \bar{u} = -p(0) ; \quad (10)$$

$$z = H : \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0 . \quad (11)$$

初始条件为

$$t=0: \bar{u}=\sigma(z,0) \quad . \quad (12)$$

2 方程求解

设控制方程式(9)的解的形式为

$$\bar{u}(z,t) = -p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin\left(\frac{M}{H}z\right), \quad (13)$$

式中, $M = \frac{2m-1}{2}\pi$, $m=1, 2, 3, \dots$

式(13)已经满足边界条件式(10)、(11), 将其代入初始条件式(12), 有

$$-p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(0) \sin\left(\frac{M}{H}z\right) = \sigma(z,0) \quad . \quad (14)$$

将式(14)两边同乘以 $\sin\left(\frac{M}{H}z\right)$ 并在 $[0, H]$ 上对 z 积分, 并利用三角级数的正交性可得

$$T_m(0) = g_m, \quad (15)$$

其中,

$$g_m = \frac{2}{H} \int_0^H [p(0) + \sigma(z,0)] \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz. \quad (16)$$

将式(13)代入式(9), 整理后可得

$$A\left(\frac{M}{H}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin\left(\frac{M}{H}z\right) + B \sum_{m=1}^{\infty} T'_m(t) \sin\left(\frac{M}{H}z\right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin\left(\frac{M}{H}z\right) = p(0) - p(z) + B \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (17)$$

同样将式(17)两边同乘以 $\sin\left(\frac{M}{H}z\right)$ 并在 $[0, H]$ 上对 z 积分, 并利用三角级数的正交性可得

$$T'_m(t) + \beta_m T_m(t) = Q_m(t), \quad (18)$$

其中,

$$Q_m(t) = \frac{2}{BH} \int_0^H [p(0) - p(z) + B \frac{\partial \sigma}{\partial t}] \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz, \quad (19)$$

$$\beta_m = \frac{1}{B} + \frac{A}{B} \left(\frac{M}{H}\right)^2. \quad (20)$$

A, B 同前文, 代入式(20)得

$$\beta_m = \frac{2c_h}{r_e^2 F_a} + c_v \left(\frac{M}{H}\right)^2, \quad (21)$$

式中, c_v 为竖向固结系数, $c_v = E_s k_v / r_w$ 。

式(18)为关于 $T_m(t)$ 的一阶线性微分方程, 式(15)为其定解条件, 其解可写为

$$T_m(t) = e^{-\beta_m t} \left[\int_0^t Q_m(\tau) e^{\beta_m \tau} d\tau + g_m \right]. \quad (22)$$

将式(16)、(19)代入式(22)可得

$$T_m(t) = \frac{2e^{-\beta_m t}}{BH} \left\{ \int_0^t e^{\beta_m \tau} \int_0^H [p(0) - p(z) + B \frac{\partial \sigma(z, \tau)}{\partial \tau}] dz d\tau + \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz d\tau + B \int_0^H [p(0) + \sigma(z, 0)] \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz \right\}. \quad (23)$$

将式(23)代入式(13)可得

$$\bar{u}(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{BH} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left\{ \int_0^t e^{\beta_m \tau} \int_0^H [p(0) - p(z) + B \frac{\partial \sigma(z, \tau)}{\partial \tau}] dz d\tau + B \int_0^H [p(0) + \sigma(z, 0)] \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz \right\} - p(0). \quad (24)$$

由式(7)、(8)可得地基任意一点孔压为

$$u(z, r, t) = \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) Fa} [u + p(z)] - p(z). \quad (25)$$

将式(24)代入式(25)可得

$$u(z, r, t) = \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) Fa} \left\{ p(z) - p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{BH} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left\{ \int_0^t e^{\beta_m \tau} \int_0^H [p(0) - p(z) + B \frac{\partial \sigma(z, \tau)}{\partial \tau}] dz d\tau + B \int_0^H [p(0) + \sigma(z, 0)] \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz \right\} \right\} - p(z). \quad (26)$$

按应力定义的总平均固结度可表示为

$$U_p = \frac{\Delta \bar{\sigma}'(t)}{\Delta \bar{\sigma}'(\infty)}, \quad (27)$$

式中, $\Delta \bar{\sigma}'(t)$ 为 t 时刻地基土的有效应力增量, $\Delta \bar{\sigma}'(\infty)$ 为地基土最终有效应力增量。

根据有效应力原理可得

$$\Delta \bar{\sigma}'(t) = \int_0^H \sigma(z, t) dz - \int_0^H \bar{u}(z, t) dz, \quad (28)$$

其中,

$$\begin{aligned} \int_0^H \bar{u}(z, t) dz &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{BM} \left\{ \int_0^t e^{\beta_m \tau} \int_0^H [p(0) - p(z) + B \frac{\partial \sigma(z, \tau)}{\partial \tau}] dz d\tau + B \int_0^H [p(0) + \sigma(z, 0)] \sin\left(\frac{M}{H}z\right) dz \right\} - Hp(0). \end{aligned} \quad (29)$$

令 $t \rightarrow \infty$, 则 $\sigma \rightarrow \sigma_u$, $\bar{u}(z, t) \rightarrow -p(z)$, σ_u 为外部荷载达到最终值后在地基中产生的附加应力。可得地基最终有效应力增量为

$$\Delta \bar{\sigma}'(\infty) = \int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz. \quad (30)$$

于是可得应力定义的总平均固结度为

$$U_p = \frac{\int_0^H \sigma(z, t) dz - \int_0^H \bar{u}(z, t) dz}{\int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz} \quad \circ \quad (31)$$

按变形定义的总平均固结度可表示为

$$U_s = \frac{S_t}{S_\infty}, \quad (32)$$

$$S_t = \int_0^H \varepsilon_v dz = \frac{1}{E_s} \int_0^H (\sigma - \bar{u}) dz \quad \circ \quad (33)$$

令 $t \rightarrow \infty$, 同样有 $\sigma \rightarrow \sigma_u$, $\bar{u}(z, t) \rightarrow -p(z)$, 可得地基最终沉降为

$$S_\infty = \frac{1}{E_s} \int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz \quad \circ \quad (34)$$

于是可得变形定义的总平均固结度为

$$U_s = \frac{\int_0^H \sigma(z, t) dz - \int_0^H \bar{u}(z, t) dz}{\int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz} \quad \circ \quad (35)$$

可见按应力定义的固结度与按变形定义的固结度相等。

3 特例求解

(1) 如真重度不随深度变化, 堆载引起的地基附加应力不随时间和深度变化, 即有

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} = 0, \\ \sigma(z, t) = \sigma_u(z) = \sigma_0, \\ p(z) = p(0) = p_0. \end{array} \right\} \quad (36)$$

将式(36)代入式(24)、(26)、(31)可得地基某一深度处的平均孔压、地基任意一点的孔压以及地基固结度分别为

$$\bar{u}(z, t) = -p_0 + (p_0 + \sigma_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t}, \quad (37)$$

$$U_s = U_p = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-\beta_m t}, \quad (38)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(z, r, t) = -p_0 + \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) F_a} \\ (p_0 + \sigma_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t} \end{array} \right\}. \quad (39)$$

式(37)、(38)即为 Rujikiatkamjorn 在文献[5]给出的解, 这验证了本文解的正确性。

(2) 如果真重度不随深度变化, 堆载瞬时施加, 在地基中的附加应力呈梯形分布, 如图 2 所示。即有

$$\left. \begin{array}{l} p(z) = p(0) = p_0, \\ \sigma(z, t) = \sigma_u(z) = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H}, \end{array} \right\} \quad (40)$$

式中, σ_T , σ_B 分别为砂井地基顶面和底面的附加应

力。

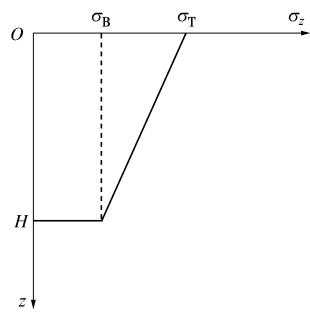


图 2 地基附加应力沿深度分布图

Fig. 2 Additional stress in soil along depth

将式(40)代入式(24)、(26)可得径向平均孔压及任意一点孔压为

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, t) &= -p_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \cdot \\ &\quad \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} u(z, r, t) &= \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) F_a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \cdot \\ &\quad \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] - p_0. \end{aligned} \quad (42)$$

又有

$$\begin{aligned} \int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz &= \int_0^H \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H} + p_0 \right] dz \\ &= \frac{H}{2} (\sigma_T + \sigma_B + 2p_0), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \int_0^H \sigma(z, t) dz &= \int_0^H \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H} \right] dz \\ &= \frac{H}{2} (\sigma_T + \sigma_B), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \int_0^H \bar{u}(z, t) dz &= -H p_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2H e^{-\beta_m t}}{M^2} \cdot \\ &\quad \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

将式(42)、(43)、(44)代入式(31)可得地基的固结度为

$$\begin{aligned} U &= 1 - \frac{4}{(\sigma_T + \sigma_B + 2p_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m t}}{M^2} \cdot \\ &\quad \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

(3) 如堆载瞬时施加, 附加应力呈梯形分布, 真重度沿深度线性减小, 如图 3 所示。即有

$$\left. \begin{array}{l} p(z) = p(0) - [p(0) - p(H)] \frac{z}{H}, \\ \sigma(z, t) = \sigma_u(z) = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H}, \end{array} \right\} \quad (47)$$

式中, $p(0)$, $p(H)$ 分别为砂井顶面和底面的真空度。

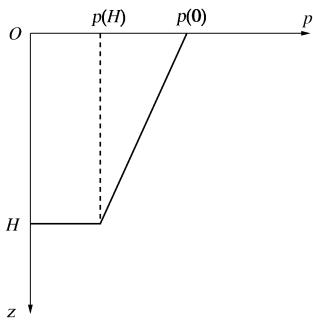


图 3 砂井真空度沿深度分布图

Fig. 3 Vacuum degree of vertical drains along depth

将式(47)代入式(24)、(26)可得地基某深度的平均孔压及地基任意一点孔压为

$$\bar{u}(z,t) = -p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BM} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \cdot \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0) - p(H)}{M} (1 - e^{-\beta_m t}) + B \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] e^{-\beta_m t} \right\} . \quad (48)$$

$$u(z,r,t) = -p(0) + [p(0) - p(H)] \frac{z}{H} + \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) F_a} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BM} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0) - p(H)}{M} (1 - e^{-\beta_m t}) + B \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] e^{-\beta_m t} \right\} - [p(0) - p(H)] \frac{z}{H} \right\} . \quad (49)$$

又有

$$\int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz = \int_0^H \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H} + p(0) - [p(0) - p(H)] \right] \frac{z}{H} dz = \frac{H}{2} [\sigma_T + \sigma_B + p(0) + p(H)] , \quad (50)$$

$$\int_0^H \bar{u}(z,t) dz = -H p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2H}{BM^2} \cdot \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0) - p(H)}{M} (1 - e^{-\beta_m t}) + B \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] e^{-\beta_m t} \right\} . \quad (51)$$

将式(44)、(50)、(51)代入式(31)可得地基固结度为

$$U = \frac{2}{[\sigma_T + \sigma_B + p(0) + p(H)]} \left\{ \frac{\sigma_T + \sigma_B}{2} + p(0) - \right.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BM^2} \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0) - p(H)}{M} (1 - e^{-\beta_m t}) + B \left[(p_0 + \sigma_T) - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] e^{-\beta_m t} \right\} . \quad (52)$$

(4) 如真空度沿深度线性减小, 堆载单级线性施加, 附加应力呈梯形分布, 如图 4 所示。

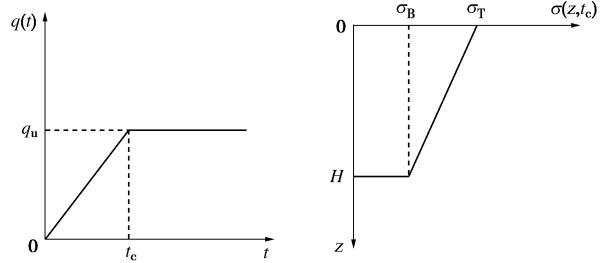


图 4 地基中附加应力随时间和深度变化图

Fig. 4 Variation of additional stress in foundation with time and depth

堆载引起的附加应力可写成

$$\sigma(z,t) = \begin{cases} \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H} \right] \frac{t}{t_c}, & (t < t_c) \\ \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H}, & (t \geq t_c) \end{cases} . \quad (53)$$

其中, σ_T , σ_B 分别为堆载达到最终值时砂井地基顶面和底面的附加应力, t_c 堆载达到最终值的时间。

在初始时刻:

$$t = 0: \quad \sigma(z,0) = 0 . \quad (54)$$

将式(47)、(53)、(54)代入式(24)、(26)可得砂井地基某深度处的超静孔压和地基任意一点的超静孔压表达式为

当 $t < t_c$ 时:

$$\bar{u}(z,t) = -p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{BH} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left\{ \left[(-1)^{m+1} \frac{p(0) - p(H)}{M^2} H + \frac{BH}{t_c M} (\sigma_T - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M}) \right] \frac{1}{\beta_m} (e^{\beta_m t} - 1) + B p(0) \frac{H}{M} \right\} , \quad (55)$$

$$u(z,r,t) = [p(0) - p(H)] \frac{z}{H} - p(0) + \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) F_a} \cdot \left\{ -[p(0) - p(H)] \frac{z}{H} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BH} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left[\left[(-1)^{m+1} \frac{p(0) - p(H)}{M^2} H + \frac{BH}{t_c M} (\sigma_T - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M}) \right] \frac{1}{\beta_m} (1 - e^{-\beta_m t}) + B p(0) \frac{H}{M} e^{-\beta_m t} \right] \right\} . \quad (56)$$

当 $t \geq t_c$ 时,

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, t) &= -p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BH} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \left\{ (-1)^{m+1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{p(0)-p(H)}{M^2} \frac{H}{\beta_m} (1-e^{-\beta_m t}) + \frac{BH}{M \beta_m t_c} \left[\sigma_T - (-1)^{m+1} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] \left[e^{-\beta_m(t-t_c)} - e^{-\beta_m t} \right] + B p(0) \frac{H}{M} e^{-\beta_m t} \right\}, \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(z, r, t) &= [p(0) - p(H)] \frac{z}{H} - p(0) + \\ &\quad \frac{r_e^2 A_0(r) - B_0(r)}{(r_e^2 - r_w^2) F_a} \cdot \left\{ -[p(0) - p(H)] \frac{z}{H} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BH} \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0)-p(H)}{M^2} \frac{H}{\beta_m} (1-e^{-\beta_m t}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. B p(0) \frac{H}{M} e^{-\beta_m t} + \frac{BH}{M \beta_m t_c} \left[\sigma_T - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[e^{-\beta_m(t-t_c)} - e^{-\beta_m t} \right] \right\} \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

固结度求解:

$$\begin{aligned} \int_0^H [\sigma_u(z) + p(z)] dz &= \int_0^H \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H} + \right. \\ &\quad \left. p(0) - [p(0) - p(H)] \frac{z}{H} \right] dz \\ &= \frac{H}{2} [\sigma_T + \sigma_B + p(0) + p(H)]. \quad (59) \end{aligned}$$

当 $t < t_c$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^H \sigma(z, t) dz &= \int_0^H \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_B) \frac{z}{H} \right] \frac{t}{t_c} dz \\ &= \frac{H}{2} \frac{t}{t_c} (\sigma_T + \sigma_B), \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^H \bar{u}(z, t) dz &= -H p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BM} \left\{ \left[(-1)^{m+1} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{p(0)-p(H)}{M^2} H + \frac{BH}{t_c M} \left(\sigma_T - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\beta_m} (1-e^{-\beta_m t}) + B p(0) \frac{H}{M} e^{-\beta_m t} \right\}. \quad (61) \end{aligned}$$

将式 (59)、(60)、(61) 代入 (31) 可得

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{2}{\sigma_T + \sigma_B + p(0) + p(H)} \left\{ \frac{t}{2t_c} (\sigma_T + \sigma_B) + \right. \\ &\quad p(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BM} \left\{ \left[(-1)^{m+1} \frac{p(0)-p(H)}{M^2} + \frac{B}{t_c M} (\sigma_T - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] \right] \frac{1}{\beta_m} (1-e^{-\beta_m t}) + B p(0) \frac{H}{M} e^{-\beta_m t} \right\} \left. \right\}. \quad (62) \end{aligned}$$

当 $t \geq t_c$ 时

$$\begin{aligned} \int_0^H \bar{u}(z, t) dz &= -H p(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\beta_m t}}{BM} \cdot \\ &\quad \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0)-p(H)}{M^2} \frac{H}{\beta_m} (1-e^{-\beta_m t}) + \right. \\ &\quad B p(0) \frac{H}{M} e^{-\beta_m t} + \frac{BH}{M \beta_m t_c} \left[\sigma_T - (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] \cdot \\ &\quad \left. \left[e^{-\beta_m(t-t_c)} - e^{-\beta_m t} \right] \right\}. \quad (63) \end{aligned}$$

将式 (44)、(59)、(63) 代入 (31) 可得

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{2}{\sigma_T + \sigma_B + p(0) + p(H)} \left\{ \frac{(\sigma_T + \sigma_B)}{2} + \right. \\ &\quad p(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{BM} \left\{ (-1)^{m+1} \frac{p(0)-p(H)}{M^2 \beta_m} \cdot \right. \\ &\quad (1-e^{-\beta_m t}) + \frac{B p(0)}{M} e^{-\beta_m t} + \frac{B}{M \beta_m t_c} [\sigma_T - \right. \\ &\quad \left. \left. (-1)^{m+1} \frac{\sigma_T - \sigma_B}{M} \right] \left[e^{-\beta_m(t-t_c)} - e^{-\beta_m t} \right] \right\}. \quad (64) \end{aligned}$$

4 水平渗透系数的几种模式

本文考虑土体水平渗透系数的 3 种模式, 如图 5 所示。3 种模式均将土体分为涂抹区和未扰动区, 不同的是模式 1 认为涂抹区水平渗透系数保持不变, 如图 5 (a); 模式 2 假设涂抹区水平渗透系数随 r 线性增大, 如图 5 (b); 模式 3 认为涂抹区水平系数随 r 增大而呈抛物线变化, 如图 5 (c)。

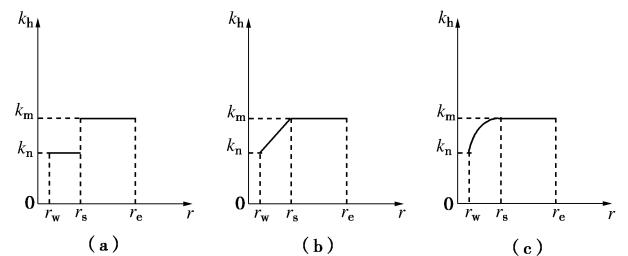


图 5 影响区土体水平渗透系数

Fig. 5 Horizontal permeability coefficient in influence zone

根据参考文献[6, 7], 3 种模式下 F_a 值分别为:

模式 1 中,

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[\ln n - \frac{3}{4} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4n^4} + \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\ln s + \frac{1-s^2}{n^2} + \frac{s^4-1}{4n^4} \right) \right], \quad (64) \end{aligned}$$

式中, $n = r_e / r_w$, $s = r_s / r_w$, $0 < \delta = k_n / k_m < 1$, r_s 为涂抹区半径, k_n 为砂井与土体交界面处土体水平渗透系数, k_m 为未扰动土体的水平渗透系数。

模式 2 中,

$$\begin{aligned}
F_a = & \frac{n^2}{n^2 - 1} \left\{ \frac{s-1}{\delta s - 1} \ln \delta s - \frac{(s-1)^2}{n^2(1-\delta)} + \right. \\
& \frac{2(s-1)(\delta s - 1)}{n^2(1-\delta)^2} \ln \frac{1}{\delta} - \frac{2(s-1)}{n^4(1-\delta)} \cdot \\
& \left(\frac{s^3 - 1}{3} - \frac{s^2 - 1}{2} \right) - \frac{(s-1)(\delta s - 1)}{n^4(1-\delta)^2} \cdot \\
& \left[\frac{s^2 - 1}{2} - \frac{(s-1)(\delta s - 1)}{1-\delta} + \frac{(\delta s - 1)^2}{(1-\delta)^2} \ln \frac{1}{\delta} \right] - \\
& \left. \frac{(n^2 - s^2)(1-s)^2}{n^4(1-\delta)} + \ln \frac{n}{s} - \frac{3}{4} + \frac{4n^2 s^2 - s^4}{4n^4} \right\}. \quad (65)
\end{aligned}$$

模式 3:

$$F_a = \frac{n^2 a^2 F'_a + n^4 F''_a}{(n^2 - 1)^2}, \quad (66)$$

式中, $F'_a = \frac{1}{a^2 - b^2 s^2} \left(s^2 \ln s - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{a^2 b^2 - b^4 s^2} \cdot \left[\frac{1}{2} - bs + \left(\frac{a^2}{2} - b^2 \right) \ln \delta + \frac{abcs}{2} \right] + \frac{1}{n^2 b^4} \left[\frac{1}{2} - 3bs + \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right) \ln \delta + \frac{3abcs}{2} \right], F''_a = a^2 \left(1 - \frac{s^2}{n^2} \right) \left\{ \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \left[\ln(s\sqrt{\delta}) - \right] - \frac{1}{n^2 b^2} \left(\ln \sqrt{\delta} + \frac{bcs}{2a} \right) \right\} + \ln \frac{n}{s} - \frac{3}{4} + \frac{s^2}{n^2} - \frac{s^4}{4n^4}, a = \sqrt{1/(1-\delta)}, b = 1/(s-1), c = \ln[(a+1)/(a-1)]$ 。

5 地基固结性状分析

图 6~8 是附加应力分布形式对砂井地基固结度的影响。从图中可以看出, 坚井地基顶面的附加压力越大, 固结越快, 底面附加应力越小, 固结越快。附加应力呈正三角形分布时固结最慢, 呈倒三角形分布时固结最快。并且还可以看出当土体水平渗透系数为模式 3 时, 固结最快, 模式 2 次之, 当水平渗透系数为模式 1 时, 固结最慢。

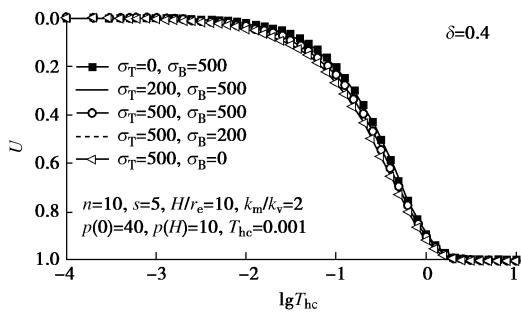


图 6 附加应力分布形式对固结度的影响(模式 1)

Fig. 6 Influence of additional stress distribution on consolidation rate (pattern 1)

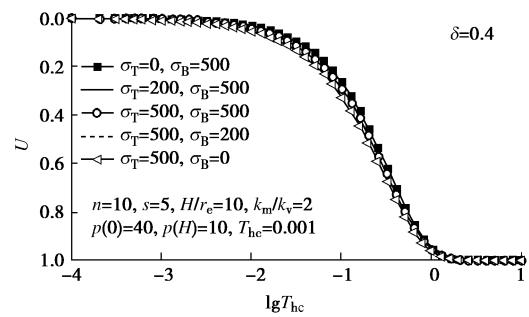


图 7 附加应力分布形式对固结度的影响(模式 2)

Fig. 7 Influence of additional stress distribution on consolidation rate (pattern 2)

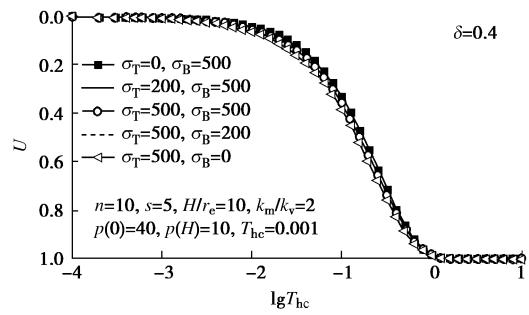


图 8 附加应力分布形式对固结度的影响(模式 3)

Fig. 8 Influence of additional stress distribution on consolidation rate (pattern 3)

图 9~11 是加载历时对砂井地基固结的影响。可以看出, 在最终荷载相同的情况下, 达到最终荷载的时间越长, 固结越慢。当 $T_{hc} = 0$ 时, 为荷载瞬时施加, 固结最快。

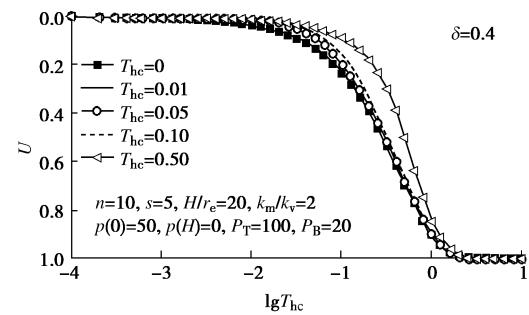


图 9 加载历时对固结度的影响(模式 1)

Fig. 9 Influence of T_{hc} on consolidation rate (pattern 1)

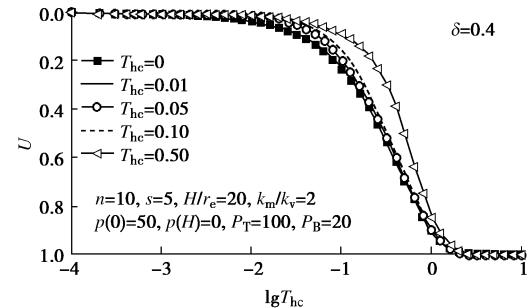


图 10 加载历时对固结度的影响(模式 2)

Fig. 10 Influence of T_{hc} on consolidation rate (pattern 2)

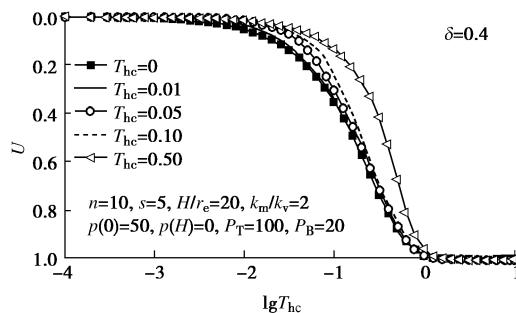


图 11 加载历时对固结度的影响(模式 3)

Fig. 11 Influence of T_{hc} on consolidation rate (pattern 3)

图 12~14 是真空度对砂井地基固结的影响。可以看出, 真空度对砂井地基固结的影响是跟堆载加荷历时相关的。在荷载瞬时施加时, 真空度的大小对砂井地基的固结度没有影响; 荷载逐渐施加时, 真空度越大, 砂井地基固结越快。并且加载历时越长, 真空度对固结度影响越大。

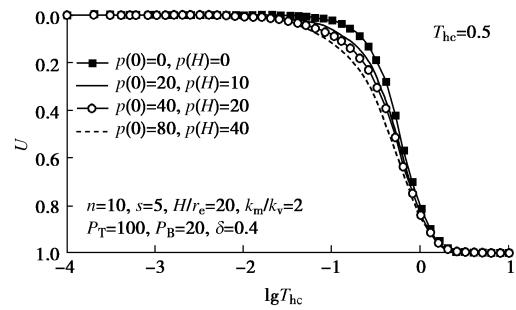


图 12 真空度对固结度的影响(模式 1)

Fig. 12 Influence of vacuum degree on consolidation rate (pattern 1)

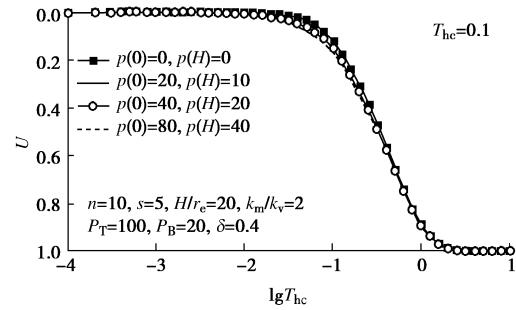


图 13 真空度对固结度的影响(模式 1)

Fig. 13 Influence of vacuum degree on consolidation rate (pattern 1)

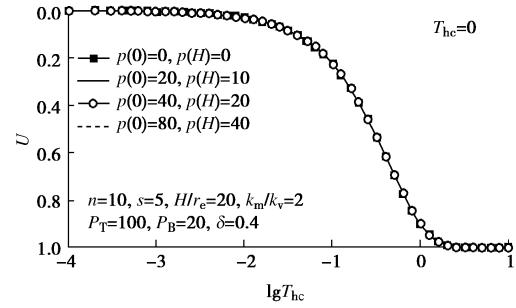


图 14 真空度对固结度的影响(模式 1)

Fig. 14 Influence of vacuum degree on consolidation rate (pattern 1)

图 15~17 是真空度沿深度的衰减数速度对竖井地基固结的影响。可以看出, 与真空度对地基固结度的影响类似, 真空度沿深度的衰减速度对地基固结度的影响也是与堆载加荷历时相关的。在荷载瞬时施加时, 真空度的衰减率对砂井地基的固结度没有影响; 荷载逐渐施加时, 真空度衰减越慢, 砂井地基固结越快。并且加载历时越长, 对固结度影响越大。

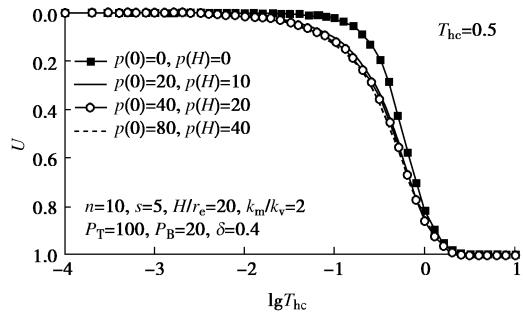


图 15 真空度下降率对固结度的影响(模式 1)

Fig. 15 Influence of reducing rate of vacuum degree on consolidation rate (pattern 1)

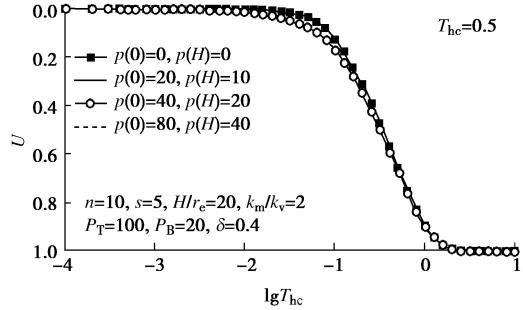


图 16 真空度下降率对固结度的影响(模式 1)

Fig. 16 Influence of reducing rate of vacuum degree on consolidation rate (pattern 1)

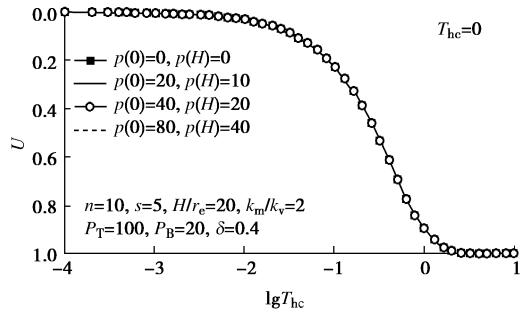


图 17 真空度下降率对固结度的影响(模式 1)

Fig. 17 Influence of reducing rate of vacuum degree on consolidation rate (pattern 1)

由此可知, 在荷载瞬时施加时, 无论是否采用真空预压, 真空度或大或小, 其沿深度的衰减速度或快或慢, 固结度始终不变。而荷载逐渐施加时, 采用真空联合堆载预压比只采用堆载预压固结要快, 真空度

越大, 沿深度衰减越慢, 固结越快。并且荷载加荷历时越长, 其对固结度的影响越大。

图 18~20 是地基深度与砂井影响区半径之比 H/r_e 对砂井地基固结度的影响。从图中可以看出, H/r_e 越小, 地基固结越快, 与不考虑地基竖向渗流时的差别越大。

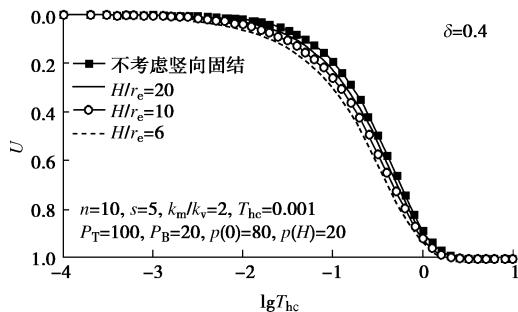


图 18 H/r_e 对固结度的影响(模式 1)

Fig. 18 Influence of H/r_e on consolidation rate (pattern 1)

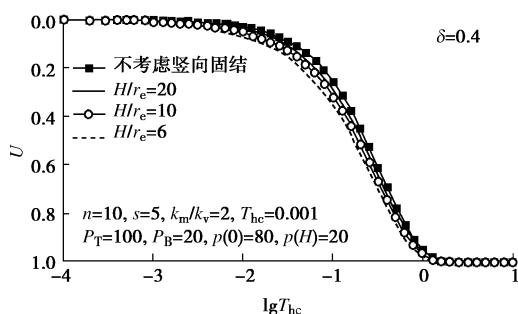


图 19 H/r_e 对固结度的影响(模式 2)

Fig. 19 Influence of H/r_e on consolidation rate (pattern 2)

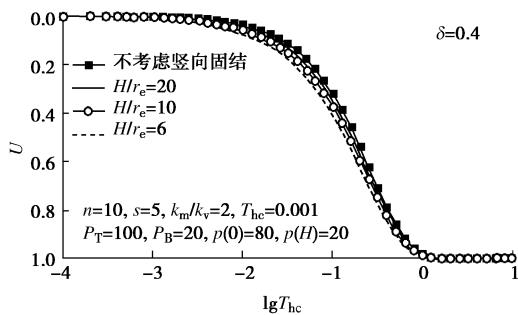


图 20 H/r_e 对固结度的影响(模式 3)

Fig. 20 Influence of H/r_e on consolidation rate (pattern 3)

图 21~23 是地基径向渗透系数之比 k_m/k_v 对砂井地基固结度的影响。可以看出, 在 k_m 不变的情况下, k_v 越大, 地基固结越快, 与不考虑地基竖向渗流时的差别越大。

可以看出, 在地基 H/r_e 和 k_m/k_v 较小时, 地基的竖向渗流对地基的固结度有较大的影响, 如忽略会明显低估砂井地基的固结度。

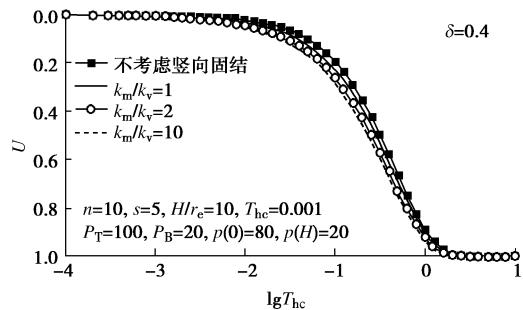


图 21 k_m/k_v 对固结度的影响(模式 1)

Fig. 21 Influence of k_m/k_v on consolidation rate (pattern 1)

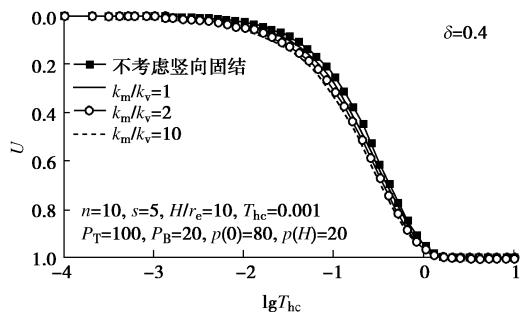


图 22 k_m/k_v 对固结度的影响(模式 2)

Fig. 22 Influence of k_m/k_v on consolidation rate (pattern 2)

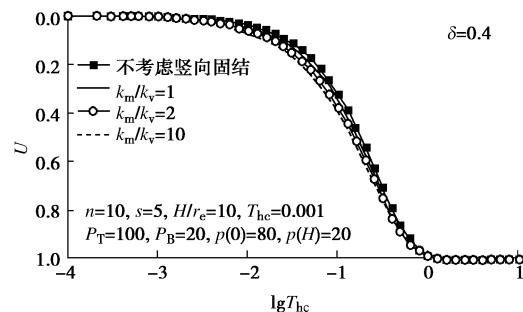


图 23 k_m/k_v 对固结度的影响(模式 3)

Fig. 23 Influence of k_m/k_v on consolidation rate (pattern 3)

6 结 论

本文考虑真空间度沿竖井的发展是一个深度的函数, 同时考虑堆载所引起的附加应力既随时间变化也随深度变化, 还考虑了地基的径向渗流以及扰动区土体水平渗透系数的 3 种变化模式, 推导了真空联合堆载预压下竖井地基固结度的一个较普遍的解析解。并分析了在真空间度沿竖井线性下降, 堆载线性施加和附加应力沿深度梯形分布情况下的地基固结性状。得到以下 5 点结论。

(1) 本文按应力定义的竖井地基固结度等于按变形定义的地基固结度。

(2) 在单面排水条件下, 砂井地基顶面的附加压力越大, 固结越快, 底面附加应力越小, 固结越快, 附加应力呈正三角形分布时固结最慢, 呈倒三角形分

布时固结最快。

(3) 在最终堆载相同的情况下, 达到最终堆载的时间越长, 固结越慢。

(4) 在荷载瞬时施加时, 无论是否采用真空预压, 真空度或大或小, 其沿深度的衰减速度或快或慢, 固结度始终不变。而荷载线性施加时, 采用真空联合堆载预压比只采用堆载预压固结要快, 真空度越大, 沿深度衰减越慢, 固结越快。并且堆载达到最终值所用的时间越长, 真空度对固结度的影响越大。

(5) 在地基 H/r_e 和 k_m/k_v 较小时, 地基的竖向渗流对地基的固结度有较大的影响。

参考文献:

- [1] KIELLMAN W. Consolidation of clayey soils by atmospheric pressure[C]// Proceedings of a Conference on Soil Stabilisation, Massachusetts Institute of Technology. Boston: MIT Press, 1952: 258 - 263.
- [2] CHU J, YAN S W, YANG H. Soil improvement by the vacuum preloading method for an oil storage station[J]. Géotechnique, 2000, **50**(6): 625 - 632.
- [3] INDRARATNA B, BAMUNAWITA C, KHABBAZ H. Numerical modeling of vacuum preloading and field applications[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, **41**(6): 1098 - 1110.
- [4] INDRARATNA B, SATHANANTHAN I, RUJIKIATKAMJORN C, et al. Analytical and numerical modeling of soft soil stabilized by PVD incorporating vacuum preloading[J]. International Journal of Geomechanics, 2005, **5**(2): 114 - 124.
- [5] RUJIKIATKAMJORN C, INDRARATNA B. Analytical solutions and design curves for vacuum-assisted consolidation with both vertical and horizontal drainage[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2007, **44**: 188 - 200.
- [6] 郭彪, 龚晓南, 卢萌盟, 等. 考虑涂抹作用的未打穿砂井地基固结理论分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(12): 2561 - 2568. (GUO Biao, GONG Xiao-nan, LU Meng-meng, et al. Theoretical analysis on partially penetrated and drains foundation with consideration on smear effect[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(12): 2561 - 2568. (in Chinese))
- [7] 卢萌盟, 谢康和, 张玉国, 等. 考虑土体水平渗透系数变化的复合地基固结解[J]. 浙江大学学报(工学版), 2008, **41**(11): 1996 - 2001. (LU Meng-meng, XIE Kang-he, ZHANG Yu-guo, et al. Analytical solution for consolidation of composite foundation accounting for variation of soil horizontal permeability coefficient[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2008, **41**(11): 1996 - 2001. (in Chinese))