

饱和砂土相变状态边界面本构模型

张卫华, 赵成刚, 傅方

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 为了很好地描述砂土的应力应变特征, 通常利用以临界状态孔隙比为基础的状态参数建立弹塑性本构关系, 但是对于密砂排水试验, 临界状态参数很难测到。相变状态作为一特征状态, 相关参数较容易测得。基于相变状态定义状态参量, 并考虑应力诱发的各向异性, 建立饱和砂土的边界面本构模型。最后, 利用提出的模型参数得到的模拟结果与试验结果相吻合, 较好地反映了密砂的应变强化和软化力学特征。

关键词: 密砂; 相变状态; 状态参量; 剪胀; 边界面; 本构模型

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2013)05-0930-10

作者简介: 张卫华(1973-), 女, 河北邯郸人, 博士, 主要从事砂土本构关系的研究。E-mail: zwh2530@gmail.com。

Bounding-surface constitutive model for saturated sands based on phase transformation state

ZHANG Wei-hua, ZHAO Cheng-gang, FU Fang

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: To well describe the stress-stain behaviour of sands, generally, a state parameter based on the critical state void is used to establish the elastoplastic constitutive relations. However, it is difficult to obtain the critical state parameter in the triaxial drained tests for dense sands. For the phase transformation state, being a characteristic state, its related parameters are easy to be measured. Based on the phase transformation state and considering the stress-induced anisotropy, the state parameter is defined, and a bounding-surface constitutive model for saturated sands is established. Finally, utilizing the provided model parameters, the simulated results fit well with the test ones and realistically reflect the strain hardening and softening characteristics for dense sands.

Key words: dense sand; phase transformation state; state parameter; dilatancy; bounding surface; constitutive model

0 引言

砂土区别与其它固体材料最重要的特征即为砂土的剪胀现象。Rowe^[1]和 Roscoe 等^[2]分别提出不同的砂土剪胀方程, 其基本形式均为 $D = D(\eta, c)$ ($\eta = q/p$, 在三轴空间, p, q 分别为有效平均应力和偏应力, c 表示固有的材料常数), 标志着土力学的发展。之后, 剪胀方程被广泛用作弹塑性模型的流动法则。直到今天, 大部分塑性模型都是基于 Rowe 或 Roscoe 等的剪胀方程, 例如文献[3~11]等。

利用上述剪胀方程建立土的本构模型, 就正常固结黏土而言取得了较好的模拟效果, 但对于砂土, 其模拟效果并不理想。产生这种状况的主要原因是, 对于正常固结黏土, 其体变趋势是单向的(不断剪缩), 因此, 当应力比 η 等于常量时, 孔隙比 e 和 p 的关系是单调唯一的。但对于砂土, 情况发生了变化, 当应力比 η 等于常量时, e 和 p 的关系并不唯一。研究表明, 当砂土处于密实状态时, η 确定后, e 随剪应

力的变化有变大的趋势(体胀)。而对同样的砂土当它处于很松的状态时, η 值与前述密实砂土相同, 但 e 却随剪应力的变化有变小的趋势(剪缩), 也就是说砂土的剪胀比 D 值不仅依赖于 η, p 和材料常数 c , 而且还依赖于其松密状态, 如图 1 所示, 剪胀随材料状态(密实度、围压)的变化而变化。如果忽略砂土的这种松密状态而讨论其剪胀性, 就会导致应力比 η 等于常量时, e 和 p 的关系并不唯一。这主要是由于独立状态变量不完备, 忽略砂土的这种松密状态的影响而引起的。实际上, 进一步研究表明^[12-14], 除了砂土的密实状态, 在不同的加载条件下, 例如拉伸和压缩条件以及加载和卸载条件下, 砂土的剪胀行为也是完全不同的, 而且内在各向异性使得砂土的剪胀行为更加复杂。

基金项目: 国家自然科学基金项目(51278047)

收稿日期: 2012-05-07

由上述分析可知, 砂土剪胀比的计算首先应考虑砂土的松密状态才有可能达到完备。而如何判断具有不同密实程度(即不同状态)的砂土在剪切应力作用下其体积变化的趋势(即剪胀还是剪缩), 是近些年研究所关注的问题。一些学者对砂土的体积变化趋势不但依赖于土的应力状态, 而且还依赖于土的松密程度这一问题进行了深入的研究, 并提出了一些砂土剪胀性判别和定量描述的方法^[16-18], 这些方法都是以 $e - \lg p$ 平面上的临界状态线(CSL)为参照建立的。

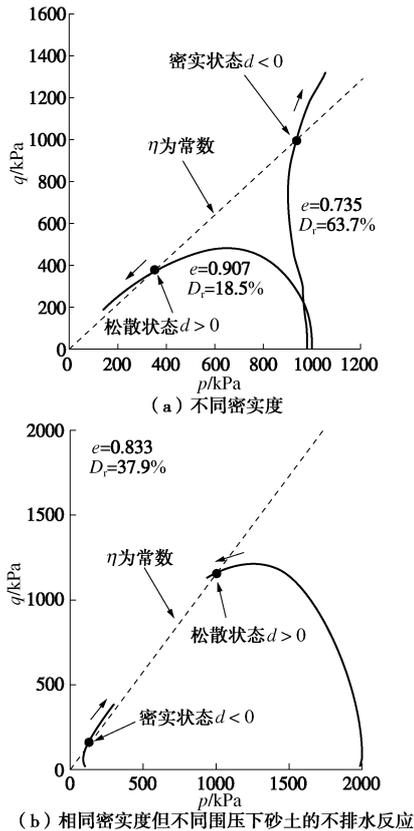


图 1 剪胀随材料状态的变化而变化^[15]。

Fig. 1 Variation of dilatancy with material state^[15]

砂土的相变状态是密砂或中密砂在不排水过程中出现的状态, 是指孔隙水压力由增加到减小的突变状态。而砂土的特征状态是密砂或中密砂在排水过程中出现的状态, 是指土体体积变形由压缩到开始膨胀的突变状态。Chu^[19]通过试验证明相变状态和特征状态其剪胀的性质是等价的。对于松砂来说, 一般也可以认为相变状态(特征状态)等同于临界状态, 为方便表达, 本文统一采用相变状态。通过上述分析可知, 排水情况下在相变状态点上砂土的体积变化为 0(对于不排水情况, 则是孔隙水压力变化为 0)。试验数据表明, 当材料处于密实状态时才可能出现相变状态。图 2 清楚地表明, 相变状态时的应力比 M_{pt} 是一个变化的量, 并不等于临界状态应力比 M 。砂土越“松散”, 相变 M_{pt} 越大, 越接近于临界状态应力比。图 3 也清楚地表明, 砂土越“松散”, $e - \lg p$ 相变线越接近临

界状态线。

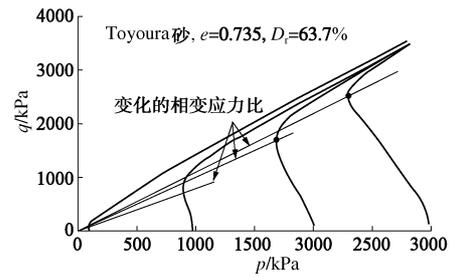


图 2 相变比伴随着材料状态的变化而变化^[15]

Fig. 2 Variation of phase transformation stress ratio with material state^[15]

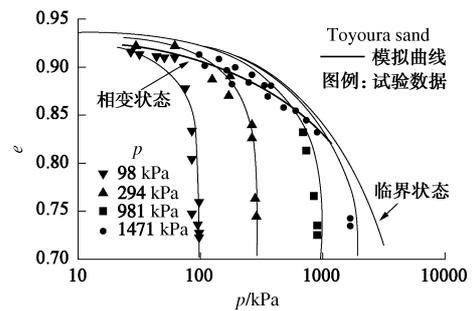


图 3 相变状态时的 $e - p$ 关系^[15]

Fig. 3 Relationship between e and p in phase transformation state^[15]

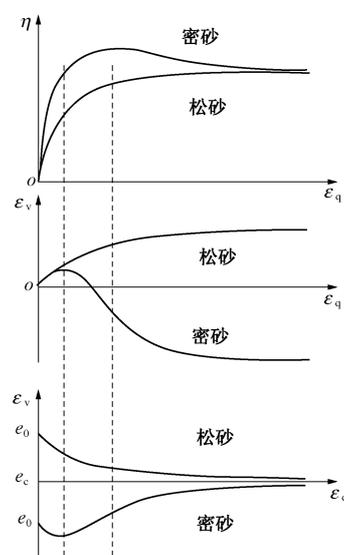


图 4 三轴排水试验条件下砂土的力学行为

Fig. 4 Mechanical behavior of sands under drained triaxial conditions

以排水试验为例, 从理论上讲, 不论是松砂还是密砂在剪应力作用下开始时它总是剪缩的。如图 4 所示, 松砂与密砂由于其初始状态不同, 在剪切过程中体变规律的区别主要表现为密砂的剪缩过程较短(越密实, 其剪缩过程越短), 到达相变状态点后, 开始转入剪胀阶段, 最后达到临界状态而破坏。而松砂的剪缩过程较长(越疏松, 其剪缩过程越长), 达到相变状态点后, 剪缩过程消失, 开始进入剪胀阶段, 但很快

也达到临界状态而破坏, 这里 e_c 为临界状态孔隙比, 很松散砂土的相变状态实际上已趋近或等于临界状态。因此对于密砂, 其相变状态较为明显, 而疏松的砂土, 相变状态已经与临界状态重合。

前面给出的判断砂土密实程度的方法均是以临界状态线作为划分标准, 并用于判断砂土体积总的变化方向和趋势。但这些方法存在以下问题: 砂土由初始状态发展到最后的临界状态而破坏, 其应力路径必然要先经过相变状态然后才能到达临界状态, 也就是说对中密砂(或密实砂)先由初始状态达到相变状态, 这一阶段砂土处于剪缩状态; 而后继续变形再到达临界状态, 而在这一阶段砂土处于剪胀状态。因此, 在初始时刻判断砂土的松密程度和变形趋势以及何时开始发生由剪缩到剪胀的变化, 这种情况应该以相变状态作为划分砂土松密程度的分界点, 或更确切地说, 砂土变化的变化趋势的分界点才是比较合理的。另外众所周知, 在三轴应力条件下密实砂土是很难最后到达临界状态的, 因此以砂土临界状态线作为砂土松密程度的划分标准理论上可行的, 但实际上很难实现。用三轴仪确定相变点却相对容易得多, 因此以相变状态作为划分砂土松密程度分界点或更确切地说划分砂土变化的变化趋势的分界点, 从实验或实际的角度看是一种更合理的选择。

如图 5, 以密砂为例, 对于围压恒定的密砂排水三轴压缩试验, 在剪应力作用下, 首先压缩固结至 A 点, A 点状态即为通常所说的相变状态, 应力比 $\eta = M_{pt}$, M_{pt} 为相变处应力比, 剪胀比 $D = 0$, 紧接着, 伴随着剪应变的进一步发展到达(或接近)峰值点, 应力比 $\eta = M_{pk}$, M_{pk} 为峰值应力比, 而此时剪胀比 $D = D_{max}$, 最后随着剪切变形的发展, 逐渐到达残余或者是临界状态, 此时 $\eta = M$, M 为三轴压缩条件下临界状态应力比, $D = 0$ 。因此正确地描述从状态 A 至状态 B 的应变硬化以及从状态 B 至状态 C 的应变软化过程, 抓住明显的受力特征点: 相变点、峰值点, 也即密砂的应变强化和软化受力特征, 是建立砂土本构关系的重要部分。

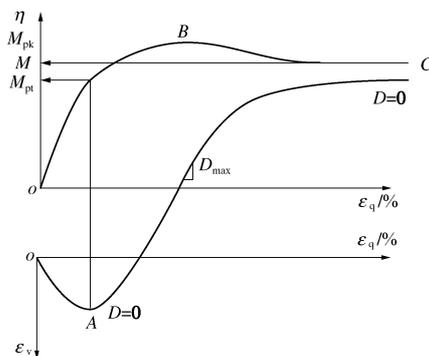


图 5 三轴排水试验下应力比、体变及其剪胀比示意图^[20]

Fig. 5 Schematic illustration of stress ratio, volumetric strain and dilatancy ratio^[20]

1 相变状态参数

为了更好地描述砂土的力学特性, 以往已经有一些学者将状态参数引入砂土的本构模型。状态参数是由 Wroth 等^[21]首先提出, 随后 Been 等^[16]采用 Wroth 等的概念, 将砂土的临界状态作为参考, 定义状态参量 $\psi = e - e_c$ 描述土的当前状态, 引入状态参数使得所建立的本构模型能够考虑加载过程中与材料状态变化相关的行为。

从上述分析可以得知, 以往的学者采用的状态参数 ψ 都是以临界状态时的孔隙比 e_c 为参考。由于砂土的复杂特性, 砂土临界状态的测试是一项比较艰难的任务, 尤其是密实砂, 在剪切变形到达临界状态以前多数情况下已经不再是均匀变形甚至破坏, 而相变状态通常是中密砂及密砂在发生很小轴应变时出现的一种状态, 此时土体处于均匀变形状态, 此状态的相关参数较容易测得, 因此本文在三轴压缩空间采用相变状态时的孔隙比 e_{pt} 及其相应的应力比 M_{pt} 来描述三轴排水试验中中密或密实砂土的变形特性。

为了较好地反映砂土的力学特性, 首先回顾一下 Wroth 等^[21]采取状态参数的办法, Wroth 等建议取距离 δ_c (δ_c 表示 $e - \lg p$ 平面上当前状态与临界状态映射点之间的距离) 作为土体变形的控制变量, 如图 6 所示, 于是得到

$$\begin{aligned} \delta_c &= \sqrt{(e - e_{cr,i})^2 + \left(\lg \left(\frac{p}{p_{cr,i}} \right) \right)^2} \\ &= -\sqrt{1 + \alpha^2} \lg \left(\frac{p}{p_{cr,i}} \right) = -\frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha(e - e_{cr,i})} \end{aligned} \quad (1)$$

式中 参数 α 定义为体积变化的程度; $\alpha = de/d(\lg p)$; 下标 cr, i 表示临界状态的映射点; $(e - e_{cr,i})$ 表示当前孔隙比 e 和临界状态映射孔隙比 $e_{cr,i}$ 的差异, 在排水条件下, $\alpha = \infty$, 上述等式简化为 $\delta_c = (e_{cr,i} - e)$, 而且进一步假定 δ_c 随着剪应变的变化而发展, 也就是 $\delta_c = f(\varepsilon_q)$ 。

在本文中, 参照 Wroth 等的做法, 为了研究方便, 克服密砂临界状态参数不易获取的困难, 利用相变状态, 根据 Verdugo 等^[15]、Ishihara^[18]和 Yoshimine 等^[22]的试验结果, 在 $e - \lg p$ 平面上设相变线 PTL, 如图 6 所示, 设距离 δ_{pt} , δ_{pt} 表示 $e - \lg p$ 平面上当前状态 e 与相变状态映射点 $e_{pt,i}$ 之间的距离, 则有

$$\begin{aligned} \delta_{pt} &= \sqrt{(e - e_{pt,i})^2 + \left(\lg \left(\frac{p}{p_{pt,i}} \right) \right)^2} \\ &= \left(\frac{e}{e_{pt,i}} - 1 \right) \sqrt{e_{pt,i} + \left(\frac{e_{pt,i}}{\alpha} \right)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

因为 $\alpha = \frac{de}{d(\lg p)}$, 则有

$$\frac{\delta_{pt}}{e_{pt,i}} = \frac{\sqrt{(e - e_{pt,i})^2 + \left(\lg\left(\frac{p}{P_{pt,i}}\right)\right)^2}}{e_{pt,i}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{e}{e_{pt,i}} - 1\right)^2 + \left(\lg\left(\frac{p}{P_{pt,i}}\right)\right)^2}}{e_{pt,i}}$$

$$= \left(\frac{e}{e_{pt,i}} - 1\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} \quad (3)$$

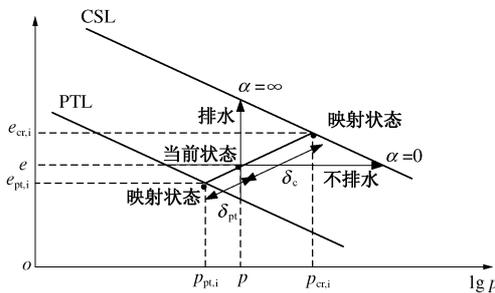


图 6 状态参数示意图

Fig. 6 Schematic illustration of state parameter

本文设 $\beta = \left(\frac{e}{e_{pt,i}} - 1\right)$, 且在排水条件下, 满足

$\alpha = \infty$, 则式 (3) 化简为 $\frac{\delta_{pt}}{e_{pt,i}} = \beta$, 于是参数 β 的物

理意义在于它以相变状态孔隙比为参照标准, 以一个比值来表示土当前状态点到相变线的远近, 综合考虑了应力水平和材料状态的影响。因此, 本文以相变状态线作为参考线, 并结合临界状态, 引进状态参量 β 描述土的变形, 表示为

$$\beta = \frac{e(p)}{e_{pt}(p)} - 1 \quad (4)$$

式中, $e_{pt}(p)$ 表示当前变形过程中, 对应于相同平均应力 p 下的相变映射孔隙比。

基于 Rowe 的剪胀理论, 研究表明^[5, 23]剪胀比 D 实质上与当前应力比 η 与相应 p 下虚拟的剪胀应力比 M_d 差异成比例, 于是, 对 Li 等^[24]提出的剪胀方程 $D = d_0(\exp(m\psi) - \eta/M)$ 加以修正, 将以相变为基础的状态参量 β 引入剪胀方程, 建立与内部状态和应力水平相关的剪胀方程表达式, 即

$$D = D_0(M_{pt} \exp(m_d \beta) - \eta) \quad (5)$$

剪胀应力比 M_d 为

$$M_d = M_{pt} \exp(m_d \beta) \quad (6)$$

式中, M_{pt} 对应于相变点处 q/p 值, 是与初始孔隙比 e_0

和围压相关的函数, D_0 和 m_d 均为非负常量, 由试验确定。上述剪胀应力比 M_d 的表达式与 Li 等^[24]提出的剪胀应力比表达式 $M_d = M \exp(m\psi)$ 相似, 区别在于前者是以相变状态为基础, 而后者则是以临界状态为基础。许多试验数据表明, 松砂在剪应力作用下, 处于剪缩状态, 直至发展到临界状态, 也就是说相变状态与临界状态重合, 即 $e_{pt} = e_c$, $M_{pt} = M$, $\beta = \frac{e}{e_{pt}} - 1 = 0$, 此时 $D = 0$, 在此状态之前砂土处于剪缩状态。

同理, 本文设边界应力比 M_b 为

$$M_b = \frac{M_{pt}}{\gamma \exp(-m_b \beta)} \quad (7)$$

式中, 参数 γ , m_b 为非负常量。

对于密砂排水试验, 如图 7 所示, 当 $\eta < M_{pt}$ 时, $\beta > 0$, $D > 0$, 砂土处于剪缩状态; $\eta = M_{pt}$ 时, $\beta = 0$, $D = 0$, 砂土处于相变状态; 而当 $M_{pt} < \eta < M$ 时, $\beta > 0$, $d < 0$, 砂土处于剪胀状态; 如图 7 (a) 所示, 当 $\eta < M_{pk}$ 时 (M_{pk} 为三轴压缩空间峰值应力比), 边界应力比 $M_b > \eta$, 屈服面趋向边界面发展, 屈服应力不断提高, 应变硬化直至与边界线相交, 此时应力达到峰值, $\eta = M_{pk}$, 之后 $M_b < \eta$, 屈服应力不断降低, 应变软化。由此, 根据上述分析, 则当剪应变 ε_q 接近 20% 时, η 接近临界状态, 即 $\eta = M$, $D = 0$, 这时 $\beta = \left(\frac{e_c}{e_{pt}} - 1\right)$, 且满足:

$$\left. \begin{aligned} M_{pt} \exp(m_d \beta) &= M, \\ \frac{\ln M}{M_{pt}} &= \frac{e_{pt} \ln \frac{M}{M_{pt}}}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$m_d = \frac{M_{pt}}{\beta} = \frac{e_{pt} \ln \frac{M}{M_{pt}}}{e_c - e_{pt}}$$

将式 (8) 与 Li 等^[24]提出的剪胀方程 $D = d_0 \left(\exp(m\psi) - \frac{\eta}{M}\right)$ 相比较, 则有

$$m_d = m e_{pt} \quad (9)$$

当达到排水试验的峰值应力比时, 边界应力比曲线与当前应力比曲线相交于峰值点 A , 如图 7 所示, 于是有

$$\left. \begin{aligned} M_{pk} &= M_b, \\ \ln \frac{M_{pt}}{M_{pk} \gamma} &= \frac{m_b}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

结合 Li 等提出的剪胀、边界应力比表达式 $M_d = M \exp(m\psi)$, $M_b = M \exp(-m\psi)$, 下面分析参数 m , n , m_b , m_d 之间的相互关系。

当应力达到峰值时, 边界应力比等于峰值应力比, 即 $M_b = M_{pk}$, 此时孔隙比为 e_{pk} , $\psi = e_{pk} - e_c$, 则有

$$\left. \begin{aligned}
 M_b &= M_{pk} , \\
 M \exp(-m\psi) &= M_{pk} , \\
 M \exp[-n(e_{pk} - e_{pt} + e_{pt} - e_c)] &= M_{pk} , \\
 M \exp\left[\frac{-ne_{pt}(e_{pk} - e_{pt})}{e_{pt}}\right] \exp[-n(e_{pt} - e_c)] &= M_{pk} , \\
 \exp\left[\frac{-ne_{pt}(e_{pk} - e_{pt})}{e_{pt}}\right] \exp[-n(e_{pt} - e_c)] &= \frac{M_{pk}}{M} , \\
 \exp(-ne_{pt}\beta) &= \frac{M_{pk}}{M} \exp[n(e_{pt} - e_c)] , \\
 -ne_{pt}\beta &= \ln\left\{\frac{M_{pk}}{M} \exp[n(e_{pt} - e_c)]\right\} , \\
 -ne_{pt} &= \frac{\ln\left\{\frac{M_{pk}}{M} \exp[n(e_{pt} - e_c)]\right\}}{\beta} .
 \end{aligned} \right\} (11)$$

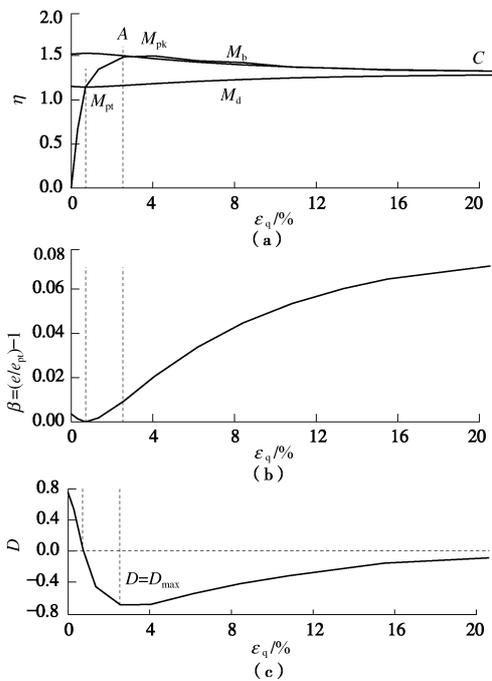


图7 边界应力比 M_b 、剪胀应力比 M_d 、相变状态参数 β 、剪胀比 D 与剪切应变 ϵ_q 关系示意图

Fig. 7 Schematic illustration of relationship among bounding stress ratio M_b , dilatancy stress ratio M_d , phase transformation state parameter β , dilatancy ratio D and shear strain ϵ_q

当达到相变状态时，满足 $M_d=M_{pt}$ ，此时 $\psi=e_{pt}-e_c$ ，于是由 $M_d=M \exp(m\psi)$ ，可得

$$M = M_{pt} \exp[-m(e_{pt} - e_c)] \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (11)，可得

$$ne_{pt} = \frac{\ln\left\{\frac{M_{pt}}{M_{pk}} \exp[-(m+n)(e_{pt} - e_c)]\right\}}{\beta} \quad (13)$$

将式 (13) 与式 (10) 相比较，并综合式 (9)，可得

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma &= \exp[(m+n)(e_{pt} - e_c)] , \\
 m_b &= ne_{pt} , \\
 m_d &= me_{pt} .
 \end{aligned} \right\} (14)$$

结合式 (14)、(12)、(7)，可得出结论：当达到临界状态时，即 $e=e_c$ 时，剪胀应力比线和边界应力比线趋与重合于 C ， $M_b=M_d=M$ ，如图 7 所示。

由式 (14) 可知， m_d 、 γ 、 m_b 均与相变孔隙比 e_{pt} 密切相关，在剪应力作用下，密砂从初始状态很快发展到相变状态，此时发生的轴应变很小，因此也可以说初始孔隙比 e_0 直接影响 m_d 、 γ 、 m_b 的大小。上述公式同时适用于松砂，松砂在排水过程中，土体体积变形一直为压缩状态，因此，松砂的相变状态等同于临界状态，那么： $M_{pt}=M$ ， $e_{pt}=e_c$ ， $\gamma=1$ 。

2 三轴应力空间本构模型

在三轴应力空间，依据标准的三轴应力和应变变量建立模型框架， $p=(\sigma_1+2\sigma_3)/3$ ， $q=(\sigma_1-\sigma_3)$ ， $\epsilon_v=(\epsilon_1+2\epsilon_3)$ ， $\epsilon_q=2(\epsilon_1-\epsilon_3)/3$ ，这里 $\sigma_2=\sigma_3$ ， $\epsilon_2=\epsilon_3$ ，所有的应力分量都认为是有效应力分量，在小变形范围内，不考虑弹塑性耦合，于是总的应变率可以分解为弹性和塑性两部分：

$$\left. \begin{aligned}
 d\epsilon_q &= d\epsilon_q^e + d\epsilon_q^p , \\
 d\epsilon_v &= d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p ,
 \end{aligned} \right\} (15)$$

式中，上标 e 或 p 分别表示弹性和塑性。

2.1 屈服函数

试验研究^[25-26]表明，当应力水平没有引起颗粒明显破碎时，恒定应力比作用下围压的增加只会引起很小的塑性体积变化，只有应力比的变化才会引起砂土颗粒的剪切滑动，发生塑性剪切和体积变形，因此，基于上述考虑，本文根据 Manzari 等^[5]以及 LI 等^[24]的研究工作，定义的屈服面应该既能考虑各向同性硬化又能考虑随动硬化，如图 8 所示，定义的楔形屈服面函数为

$$f = q - \alpha p \mp mp = 0 \quad (16)$$

$$\eta = \alpha \pm m \quad (17)$$

式中， α 、 m 均为应力比量。式 (16)、(17) 在 $p-q$ 平面为一“楔形”，楔形张开的值为 $2mp$ ， α 位于楔形角的等分线上，用虚线表示， \mp 也就是说当应力比 η 等于 $\eta = \alpha + m$ 或 $\eta = \alpha - m$ 时，应力点位于屈服面上。 η 位于楔形内部，当 $d\eta \neq 0$ 时，只引起弹性变化，当 η 满足式 (17) 时，且 $d\eta$ 指向楔形外部时，也就是说， $d\eta > 0$ 在顶部线 oc 或 $d\eta < 0$ 在楔形底部线 od 时，塑

性变形发生。式 (17) 为锥形应力比屈服准则, 可以表示反向加载。 α 为背应力比, 定义在三轴应力空间屈服面的中心, 表示由于应力诱发的各向异性而产生的随动硬化, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_3$ 分别为各向异性二阶张量 (一般应力空间) α 在三轴空间的主值。 m 是各向同性硬化参数, 一般是一个很小的值。整个楔形屈服面和沿着一定的应力路径下的应力比点一起移动。

2.2 边界线和剪胀线

如图 8 所示, 除了屈服线、临界状态线, 本文基于相变状态又建立双线: 剪胀线 M_d 和边界线 M_b (峰值线)。在三轴空间, 来自于原点的这些射线均与背应力比 α 有关, 满足 $\eta = \alpha + m$, 也就是随动应力比 α 与相应的剪胀、边界、临界线均有关系, 它们在 $p-q$ 平面以顶点在原点的开放的楔形形式分布, 形状决定于 α_d 和 α_b 的斜率。于是, 与状态相关的剪胀应力比 $M_d^{c/e}$ 和边界应力比 $M_b^{c/e}$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} M_d^{c/e} &= \alpha_d^{c/e} + m, \\ M_b^{c/e} &= \alpha_b^{c/e} + m, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中, 上标 c/e 表示压缩或拉伸空间。为了简化, 一般在压缩空间讨论, 所以这里只是用 M , M_b 和 M_d 来表示临界状态、边界和剪胀应力比。

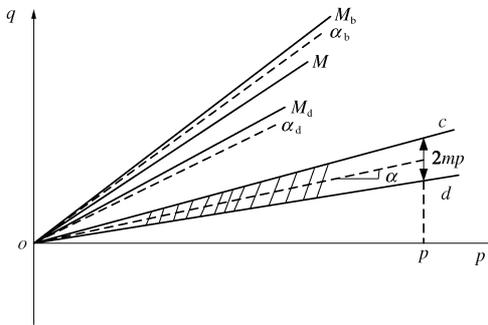


图 8 $p-q$ 空间屈服、剪胀、临界状态、边界线示意图

Fig. 8 Schematic illustration of yield, dilatancy, critical state, bounding lines in $p-q$ space

因此, 需要在应力空间边界面上或剪胀面上定义一个应力形式的映射点, 在三轴空间, 当前背应力比 α 在边界面或剪胀面上的映射点分别是 α_b 和 α_d , 根据式 (17), $d\eta = d\alpha$, 也就是说应力比的变化即为背应力比 α 的变化。

2.3 弹塑性模型

(1) 弹性部分

对于模型的弹性部分, 采用各向同性弹性假设, 得到:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_q^e &= \frac{dq}{3G}, \\ d\varepsilon_v^e &= \frac{dp}{K}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中, G, K 分别为弹性剪切模量和弹性体积模量, 均为有效应力 p 和孔隙比 e 的函数^[27]。弹性剪切模量可以表示为有效应力 p 和当前孔隙比 e 的函数:

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{(1 + e)} (p_{at} p)^{0.5}, \quad (20)$$

式中, G_0 为材料常数, e 为当前孔隙比, p_{at} 为参考压力, 为方便起见, 经常设定为大气压力, $p_{at} = 101 \text{ kPa}$, 实际上, p_{at} 也可以设为其他值。基于弹性理论, 弹性体积模量 K 为

$$K = G \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}, \quad (21)$$

式中, ν 为泊松比, 通常设为一常数。

(2) 塑性部分

a) 流动法则

塑性本构关系需要定义塑性加载的方向 (流动法则) L 以及塑性模量 K_p , 二者均为状态函数, 进而定义加载指数 L :

$$L = \frac{1}{K_p} L : d\sigma, \quad (22)$$

式中, K_p 为塑性模量, 当 $L > 0$, $L < 0$ 或者 $L = 0$ 分别为塑性加载、卸载和中性加载, 加载指数 L 中包括 K_p 考虑到了软化行为, 当标量 $L : d\sigma$ 和 K_p 均为负值, 但 $L > 0$, 塑性应变增量为

$$d\varepsilon^p = \langle L \rangle R, \quad (23)$$

$$R = n + \frac{1}{3} DI, \quad (24)$$

这里括号 $\langle \rangle$ 为 McCauley 符号, 保证 $\langle L \rangle$ 为一非负数, R 为应变增量方向, n 为偏应变方向, 于是, 式 (23)、(24) 可以进一步转化为

$$d\varepsilon^p : n = \langle L \rangle (n + \frac{1}{3} DI) : n. \quad (25)$$

于是, 在三轴空间可以得到广义剪应变和体应变增量分别为

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_q^p &= L, \\ d\varepsilon_v^p &= D d\varepsilon_q^p. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

b) 剪胀比 D

剪胀比 D 描述了应力比 η 在三轴空间剪缩或剪胀的整个范围。根据 Rowe 的应力剪胀理论以及由 Nova 等^[28]建议的不变量形式, 通常认为剪胀比 D 与差值 $(M_d - \eta)$ 成比例, 也就是说, $D = D_0 (M_d - \eta)$ 。上述等式适用于三轴单调加载情况。形如随动硬化“距离”值 $(\alpha_b - \alpha)$, 基于映射的剪胀背应力比 α_d 的定义, 可以定义“距离”为 $(\alpha_d - \alpha)$, 于是剪胀比 D 可以写为

$$D = D_0 (\alpha_d - \alpha) = D_0 [M_{pt} \exp(m_d \beta) - \eta] \quad (27)$$

观察式(27), 由于 D_0 为非负常量, 可以看出 D 的正负性直接与 $(\alpha_d - \alpha)$ 相关。在三轴压缩试验中, 如果 α 位于剪胀面内(压缩), $\alpha < \alpha_d$, 即 $M_d < \eta$, 那么 D 为正值, 如果 α 位于剪胀面外(剪胀), 那么, $\alpha > \alpha_d$, 剪胀发生。

c) 背应力比 α

对于密砂饱和和三轴排水试验, 在剪应变很小时, 塑性剪胀就开始发生, 很明显, 表示各向异性程度大小的背应力比参数 α 不是一个常数, 而是一个随着轴向应变变化的量。Desai^[29]认为, 在剪应力和平均应力的共同作用下, 岩土材料的各向异性程度首先增长, 但随着进一步加载, 当平均应力相对大小增加时, 各向异性程度必定会减小。文献[30, 31]进一步表明, 在变形的初始阶段, 颗粒方向以及相应的孔隙方向将沿着最大主应力方向排列, 因此各向异性也在此方向发展。但是, 发生一些变形之后, 当颗粒之间的滑动不再受限于特定的方向时, 各向异性程度减小, 同时相应的剪胀和应力比减小。以上这些结论说明 α 必将随着剪应变变化, 开始为0(因为材料最初假定为各向同性), 然后增加到最大值, 紧接着逐步减小, 也就是应变强化和软化阶段。根据上述描述, 可以认为 $d\alpha$ 指向边界映射点 α_b , 则 $d\alpha$ 依赖“距离” $(\alpha_b - \alpha)$, 因此, 随动硬化参数的发展表示为

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\varepsilon_q^p h(\alpha_b - \alpha) \\ &= d\varepsilon_q^p h(M_{pt} / \gamma \exp(-m_b \beta) - \eta), \end{aligned} \quad (28)$$

式中, h 为状态变量函数, 最简单的选择是假定 h 为常数。实际上, 为了得到更准确的模拟效果, 应采用状态变量的非线性函数, 基于Dafalias^[32]和Manzari等^[5]的证明, 对于砂土, 为了更加进一步描述砂土的非线性行为, h 其将随着孔隙比 e 和有效平均应力 p 以及应力比 η 的变化而变化, 因此, h 可以表示为

$$\left. \begin{aligned} h &= b_0 / (\eta - \eta_m), \\ b_0 &= G_0 h_0 (1 - e)(p / p_{at})^{-0.5}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中, h_0 为材料常数, e 为孔隙比, η_m 为加载过程中的应力比初始值

d) 各向同性硬化参数 m

硬化参数 m 定义了屈服面的弹性范围, 通常孔隙比减小伴随着 m 的增大, 弹性体积变形不影响 m , 而 m 的变化率直接与孔隙比 e 的塑性变形有关, $d\varepsilon^p = -(1 + e_0)d\varepsilon_v^p$, e_0 为初始孔隙比, 因此, m 的变化率为

$$dm = -c_s d\varepsilon^p = c_s (1 + e_0) d\varepsilon_v^p = \langle L \rangle c_s (1 + e_0) D, \quad (30)$$

式中, c_s 为正值, 在大部分实际应用中, m 为一很小的常数即可满足要求, 即 $c_s = 0$, 且 $m = 0.05M$, M 为临界状态应力比。对于三轴压缩试验, $M = 6 \sin \varphi / (3 - \sin \varphi)$, φ 为砂土的内摩擦角。

e) 一致条件、塑性模量

在三轴空间, 为了保证在塑性加载过程中, 应力仍保持在屈服面上, 因此屈服面应满足一致性条件,

$$\begin{aligned} df &= 0, \text{ 并结合式(17)、(28)得} \\ df &= \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial m} dm \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_q^p} d\varepsilon_q^p + \frac{\partial f}{\partial m} dm \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_q^p} \langle L \rangle + \frac{\partial f}{\partial m} \langle L \rangle c_s (1 + e_0) D \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq - K_p \langle L \rangle = 0, \\ L &= \frac{1}{K_p} \left(\frac{\partial f}{\partial q} dp + \frac{\partial f}{\partial p} dq \right) = \frac{pd\eta}{K_p}, \\ K_p &= -\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_q^p} - \frac{\partial f}{\partial m} c_s (1 + e_0) D \\ &= p(h(\alpha_b - \alpha) + c_s (1 + e_0) D). \end{aligned} \quad (31)$$

如式(30)所述, m 一般取常数即可满足要求, $c_s = 0$, 则式(31)中塑性模量 K_p 可简化为

$$K_p = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_q^p} - \frac{\partial f}{\partial m} c_s (1 + e_0) D = ph(\alpha_b - \alpha). \quad (32)$$

所以, 综合式(26)、(19)、(31)、(32), 可得应变增量的表达式:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_q &= d\varepsilon_q^e + d\varepsilon_q^p = \frac{dq}{3G} + \frac{d\eta}{K_p}, \\ d\varepsilon_v &= d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p = \frac{dp}{K} + \frac{Dd\eta}{K_p}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

进一步转化为矩阵的形式为

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} dq \\ dp \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 3G & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} - \frac{1}{H} \begin{pmatrix} 9G^2 & -3KG\eta \\ 3KGD & -K^2\eta D \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_q \\ d\varepsilon_v \end{Bmatrix}, \\ H &= K_p + 3G - K\eta D. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

3 模型参数的确定

本模型包括9个参数: D_0 , m_d , h_0 , γ , m_b , M_{pt} , m , G_0 , ν , 可通过三轴试验来确定。其中 G_0 , ν 独立于本文给定模型的常数, 为一般性常数; 其余参数则是针对本文提出的模型, 它们分别为相变应力比 M_{pt} , 剪胀参数 D_0 , 与剪胀应力比相关的参数 m_d , 与边界应力比相关的参数 m_b , 与塑性模量相关参数 h_0 和 γ 。

材料剪胀参数 D_0 的确定: 在保持围压不变的情况下, 利用三轴排水试验的 $\eta - \varepsilon_q$ 曲线和 $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 曲线, 分别测出相变处孔隙比 e_{pt} 和相变应力比 M_{pt} , 忽略小

弹性变形, 根据式 (5) 则有

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_q} \approx \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_q^p} = D = D_0 [M_{pt} \exp(m_d \beta) - \eta] \quad (35)$$

这里参数 D_0 控制着剪胀比 - 应力比 ($D - \eta$) 曲线的倾斜度, 由 $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 曲线并结合 $\eta - \varepsilon_q$ 曲线可以确定 D_0 。

参数 m_d 的确定: 对于给定砂土, 其峰值应力比 M_{pk} 及其对应的 e_{pk} 很容易得到, 并且根据 $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 曲线, 可求出此点的斜率, 即 D_{max} , 则

$$\left. \begin{aligned} D_0 (M_{pt} \exp(m_d \beta) - M_{pk}) &= D_{max} \\ (M_{pt} \exp(m_d \beta) - M_{pk}) &= D_{max} / D_0 \\ m_d &= \frac{\ln \left(\frac{M_{pk}}{M_{pt}} + \frac{D_{max}}{(M_{pt} D_0)} \right)}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

弹性材料常数 G_0 可通过三轴试验的应力 - 应变曲线确定。本文中, G_0 可结合式 (20) 和 $q - \varepsilon_q$ 曲线在初始状态的切线值得到。

本模型中假定小应变泊松比 ν 为常数, 精确地确定小应变泊松比需要高精度的局部应变传感器, 因此, 这些数据在大部分试验中很难得到。实际上, ν 在砂土中并没有很大的变化性, 所以通常取为常数。

参数 h_0, γ 的确定: 本文假定材料初始状态为各向同性状态, 所以 $\eta_{in} = 0$, 由式 (32) 可得

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon_q} \approx \frac{d\eta}{d\varepsilon_q^p} = K_p / p = h \left[\frac{M_{pt}}{\eta} - \gamma \exp(m_b \beta) \right] \quad (37)$$

通过 $\eta - \varepsilon_q$ 曲线斜率并结合模型表达式 (37) 和 (29), 反复尝试取得系数 h_0, γ 。

参数 m_b 的确定: 排水试验的峰值应力 M_{pk} 处, $K_p = 0, d\eta = d\varepsilon_q^p$, 利用 $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 曲线, 测得对应于峰值应力 M_{pk} 处的体应变 ε_{vpk} , 得到 e_{pk} , 于是则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{pt}}{M_{pk}} &= \gamma \exp(m_b \beta) \\ \exp(m_b \beta) &= \frac{M_{pt}}{\gamma M_{pk}} \\ m_b \beta &= \ln \frac{M_{pt}}{\gamma M_{pk}} \\ m_b &= \frac{e_{pt} \ln \frac{M_{pt}}{\gamma M_{pk}}}{e_{pk} - e_{pt}} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

对于密砂不排水试验, Chu^[19]所作试验表明对于初始状态相同的密砂其相变状态等同于排水试验的相变状态, 只是在排水试验中, 相变点对应于 $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 曲线的峰值点, 而不排水试验, 则对应于 $\Delta u - \varepsilon_q$ 的峰值点 (这里 u 为孔隙水压力), 二者与此相对应的相变比

M_{pt} 是相同的, 此时 e_{pt} 则可根据 $e_{pt} - \lg p$ (Ishihara^[18]) 近似的直线关系确定, 这里 p 为相变点处有效平均应力, 其余参数则根据上述分析一一求得, 因此, 本文就不再一一赘述了。

通过上述分析并结合式 (14) 可知, 以上确定的模型参数同时适用于不同密实度和应力下的同种材料, 对于初始孔隙比 e_0 比较接近的同种材料, 可以采用一组相同的参数。对于初始孔隙比 e_0 差异较大的同种材料, 则可以根据给定的初始孔隙比 e_0 进行相应的比例换算, 得到参数, 因此没有必要分别校核处于不同初始状态的同种材料。

4 模型验证

本文利用上述分析提出的模型模拟密实 Ottawa 砂三轴排水试验^[33], 并利用试验结果加以验证, 模型中包括 9 个参数, 上述参数都可以通过三轴试验确定。Ottawa 砂为圆形石英颗粒, 其相关物理参数为比重 $G_s = 2.65, e_{max} = 0.74, e_{min} = 0.52$, 内摩擦角 $\varphi = 32^\circ$ 。

根据上节模型参数的确定方法, 由 $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 曲线并结合 $\eta - \varepsilon_q$ 曲线可以确定相变孔隙比 e_{pt} 、相变应力比 M_{pt} 和剪胀参数 D_0 ; 利用式 (36) ~ (38), 可以分别求得 m_d, h_0, γ 和 m_b ; 各向同性硬化参数 $m = 0.05M$ 。于是, 经验证, 模型参数为 $G_0 = 125, \nu = 0.25, m = 0.07$,

图 9, 10 为 Ottawa 密砂三轴排水试验的试验与模拟对比图, 二者均取得较好的拟合。对照表 1 的试验参数, 可以看出, 对于同一种砂土, 在不同围压和孔隙比下, 除了在围压 $\sigma_3 = 50$ kPa 时, 参数有较大差异以外, 其它情况下, 起决定性作用的参数 m_d, m_b, γ 的变化幅度并不大, 因此, 在今后的计算中, 对于 m_d, m_b, γ 可以取平均值。从图 9 可以看出, 初始孔隙比 e_0 一定的情况下, 围压 σ_3 越小, 越易发生剪胀, 峰值应力比 M_{pk} 越大, 剪胀性越大。从表 1 试验数据分析可以得知, 初始孔隙比 e_0 一定时, 相变应力比 M_{pt} 随围压的增大而增大, 与图 2 的试验结果相吻合。从第二组数据 ($\sigma_3 = 3000, 200, 800$ kPa) 分析得知, 初始孔隙比 e_0 对于相变应力比 M_{pt} 的影响超过围压 σ_3 对其的影响。

表 1 不同围压和孔隙比下模型参数

Table 1 Model parameters under different confining pressures and void ratios

σ_3 /kPa	e_0	M_{pt}	m_d	D_0	γ	m_b	h_0
50	0.520	0.98	2.50	1.59	0.58	2.27	3.25
500	0.520	1.14	1.55	1.69	0.75	2.01	4.29
3000	0.520	1.21	1.55	2.50	0.85	1.61	10.41
200	0.528	1.23	1.60	1.97	0.77	1.61	3.20
800	0.535	1.24	1.55	1.99	0.79	1.55	3.11

综上所述,基于本模型参数得到的模拟曲线可以较好地反映密砂应力-应变曲线的特征点:剪胀点和峰值点,较合理地描述了砂土在三轴试验中不同密实度和围压下的力学行为的变化。

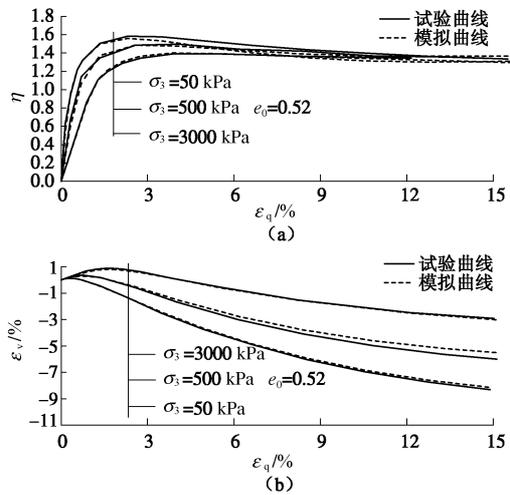


图9 Ottawa 砂排水试验 $\eta - \varepsilon_q$, $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 模拟与试验结果对比图 $e_0=0.52$

Fig. 9 Comparison between simulations and experimental results for drained tests on Ottawa sands with $e_0=0.52$ $\eta - \varepsilon_q$ and $\varepsilon_v - \varepsilon_q$

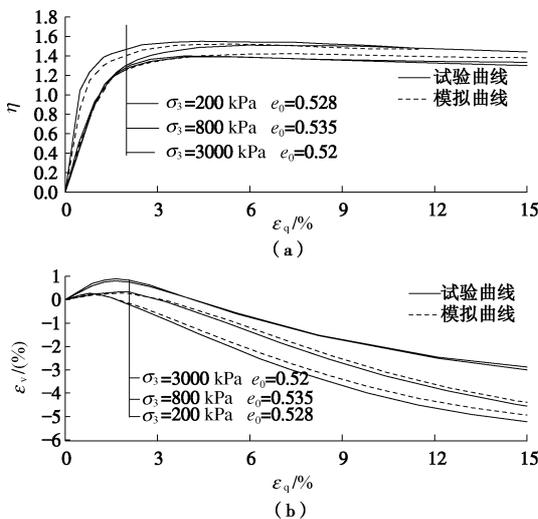


图10 Ottawa 砂排水试验 $\eta - \varepsilon_q$, $\varepsilon_v - \varepsilon_q$ 模拟与试验结果对比图 $e_0=0.52, 0.528, 0.535$

Fig. 10 Comparison between simulations and experimental results for drained tests on Ottawa sands with $e_0=0.52, 0.528, 0.535$ $\eta - \varepsilon_q$ and $\varepsilon_v - \varepsilon_q$

5 结 语

本文从砂土的变形特性入手,分析了密砂在排水试验中的变形特征,即存在相变点、峰值点两个特征状态点。为了反映砂土的应力应变关系,通常是采用以临界状态时的孔隙比为参考的状态参数来建立本构

方程,但由于砂土的剪胀特性,尤其是中、密砂,其临界状态的测试是一项比较困难的任务,在到达临界状态之前通常已经破坏,所以在一般的试验室很难测得临界状态的相关参数。相变状态则是在试验中较容易得到的一种状态,因此为了更好地理解砂土的力学性质,本文利用相变状态定义状态参量 β ,在三轴应力空间建立随动硬化界面本构方程。基于本文模型参数得到的模拟结果与试验结果达到较好的吻合,正确描述了密砂在三轴排水试验中所反映的力学特征,因此采用以相变状态为基础的状态参数建立的本构模型可以较好地描述砂土的应变强化和软化行为。

参考文献:

- [1] ROWE P W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact[C]// Proceedings the Royal of Society, 1962, A269: 500 - 527.
- [2] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N. Mechanical behavior of an idealized wetclay[C]// Proceedings of the European conference on SMFE, Wiesbaden. 1963: 47 - 54.
- [3] NOVA R. A constitutive model for soil under monotonic and cyclic loading[M]// PANDE G N, ZIENKIEWICZ O C. Soil Mechanics Transient and Cyclic Loads. New York: Wiley, 1982: 343 - 373.
- [4] JEFFERIES M G. NorSand: A simple critical state model for sand[J]. Géotechnique, 1993, 43: 91 - 103.
- [5] MANZARI M T, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sands[J]. Géotechnique, 1997, 47(2): 255 - 272.
- [6] GAJO A, MUIR Wood D. Severn-trent sand: a kinematic hardening constitutive model: the $q - p$ formulation[J]. Géotechnique, 1999, 49(5): 595 - 614.
- [7] LI X S, DAFALIAS Y F, WANG Z L. State-dependent dilatancy in critical-state constitutive modeling of sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 599 - 611.
- [8] WAN R G, GUO P J. Drained cyclic behavior of sand with fabric dependence[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127(11): 1106 - 1116.
- [9] YANG Y, MURALEETHARAN K K. Middle surface concept and its application to elastoplastic behavior of saturated sands[J]. Géotechnique, 2003, 53(4): 421 - 431.
- [10] TAIEBAT M, DAFALIAS Y F. SANISAND: Simple anisotropic sand plasticity model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, 32(8): 915 - 948.
- [11] ANANDARAJAH A. Modeling liquefaction by a

- multimechanism model[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2008, **134**(7): 949 - 959.
- [12] YIN Z-Y, CHANG C S, HICHER P Y. Micromechanical modelling for effect of inherent anisotropy on cyclic behaviour of sand[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(14/15): 1933 - 1951.
- [13] CHANG C S, YIN Z-Y. Modeling stress-dilatancy for sand under compression and extension loading conditions[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 2010, **136**(6): 777 - 786.
- [14] YIN Z-Y, CHANG C S. Stress-dilatancy for sand under loading and unloading conditions[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, in press DOI: 10.1002/nag.1125.
- [15] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils [J]. *Soils and Foundations*, 1996, **36**(2): 81 - 91.
- [16] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. *Géotechnique*, 1985, **36**(1): 123 - 132.
- [17] BOLTON M D. The strength and dilatancy of sands[J]. *Géotechnique*, 1986, **36**(1): 65 - 78.
- [18] ISHIHARA K. Liquefaction and flow failure during earthquakes[J]. *Géotechnique*, 1993, **43**(3): 351 - 415.
- [19] CHU J. An experimental examination of the critical state and other similar concepts for granular soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1995, **32**: 1065 - 1075.
- [20] ALPS Mike. The phase transformation friction angle of sand[D]. Reno: University of Nevada, 2007.
- [21] WROTH C P, BASSETT R H. A stress-strain relationship for the shearing behavior of sand[J]. *Géotechnique*, 1965, **15**(1): 32 - 56.
- [22] YOSHIMINE M, ROBERTSON P K, WRIDE C E. Undrained shear strength of clean sands to trigger flow liquefaction[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, **36**(5): 891 - 906.
- [23] WOOD D M, BELKHEIR K, LIU D F. Strain softening and state parameters for sand modelling[J]. *Géotechnique*, 1994, **44**(2): 335 - 339.
- [24] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*, 2000, **50**(4): 449 - 460.
- [25] POOROOSHASB H B, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression: Part I[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1966, **3**(4): 179 - 190.
- [26] POOROOSHASB H B, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression, part II[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1967, **4**(4): 376 - 397.
- [27] RICHART F E, HALL J R, WOODS R D. *Vibration of soils and foundations*[M]. Englewood: Prentice-Hall Inc., 1970.
- [28] NOVA R, WOOD D M. A constitutive model for sands in triaxial compression[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1979, **3**(3): 255 - 278.
- [29] DESAI C S. Constitutive modelling using the disturbed state as microstructure self-adjustment concept[M]// MUHLHAUS H B. *Continuum Models for Materials with Microstructure*. UK: John Wiley, 1995.
- [30] HORNE M R. The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles II[C]// *Proceedings the Royal of Society London, Series A*. 1965, **286**(1404): 79 - 97.
- [31] LI X, LI X S. Micro-macro quantification of the internal structure of granular materials[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 2009, **135**(7): 641 - 656.
- [32] DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity. i: mathematical foundation and hypoplasticity[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, **112**(9): 966 - 987.
- [33] KATRINA Regier. The stress-dilatancy behavior of sands: pressure and density dependence in both monotonic and cyclic loading regime[D]. Calgary: University of Calgary, 1997.