

# 双剪类流动模型的非圆形颗粒离散元数值验证

蒋明镜<sup>1, 2</sup>, 李立青<sup>1, 2, 3</sup>, 申志福<sup>1, 2</sup>

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092;

3. 河南省交通科学技术研究院有限公司, 河南 郑州 450006)

**摘 要:** 双滑移自由转动模型、双剪模型和双滑移转动率(DSR<sup>2</sup>)模型这3种双剪类模型均是基于运动理论的塑性模型, 其关键区别在于转动率参量的选取。采用改进后的NS2D离散元程序, 对长短轴比例分别为1.4和1.7的椭圆颗粒试样进行不排水单剪试验以验证上述双剪类模型中转动率参量选取的合理性。数值试验结果表明: ①双滑移自由转动模型中的限定条件因未考虑能量消散过程中颗粒转动的影响而过于严格; ②双剪模型中转动率参量为主应力方向变化率的假定与数值试验结果差距显著; ③DSR<sup>2</sup>模型中采用平均纯转动率(APR)可很好地预测转动率参量的变化, 且该模型可用于砂土非共轴微观机制的研究; ④参量APR能考虑剪切过程中颗粒转动对能量耗散的影响, 可将离散介质力学和连续介质力学有机结合起来, 是运动模型中合理且重要的参量。

**关键词:** 砂土流动; 双滑移自由转动模型; 双剪模型; 双滑移转动率模型; 离散单元法; 椭圆颗粒

中图分类号: TU44

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2013)04-0619-08

**作者简介:** 蒋明镜(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 国家杰出青年基金获得者, “同济大学特聘教授”, 日本JSPS外籍研究员, 加拿大和英国两站的岩土工程出站博士后, 主要从事天然结构性黏土、砂土、非饱和土、太空土、深海能源土的宏微观试验、本构模型和数值分析方面的研究以及土体逐渐破坏分析。E-mail: mingjing.jiang@tongji.edu.cn。

## Evaluation of double-shearing type kinematic models for granular flows by use of distinct element methods for non-circular particles

JIANG Ming-jing<sup>1, 2</sup>, LI Li-qing<sup>1, 2, 3</sup>, SHEN Zhi-fu<sup>1, 2</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Dept. of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Henan Transportation Research Institute Co., Ltd.,

Zhengzhou 450006, China)

**Abstract:** The double-sliding free-rotating model, double-shearing model and double-slip and rotation rate model (DSR<sup>2</sup> model) are three types of double-shearing kinematic models, which formulate the plastic flows of granular materials. These models incorporate different physical interpretations of angular velocity. A developed distinct element method program NS2D is used to generate assemblages which are composed of elliptical particles with aspect ratios of 1.4 and 1.7, respectively. The assemblages are then subjected to undrained simple shear tests to validate the above-mentioned models. The results show that: (1) the postulation in the double-sliding free-rotating model seems to be unduly restrictive for not considering the effect of particle rotation on energy dissipation; (2) a quantitative and qualitative difference between the observed rotation rate of the major principal stress axes and the theoretic angular velocity does not support the double-shearing model; (3) the DSR<sup>2</sup> model presents a successful prediction of the angular velocity by means of the averaged micro-pure rotation rate (APR), and it can be used to study the non-coaxiality of granular materials; and (4) the APR is a rational and important variable which considers the effect of particle rotation in the energy dissipation process, and bridges discrete and continuum granular mechanics.

**Key words:** granular flow; double-sliding free-rotating model; double-shearing model; double-slip and rotation rate model; distinct element method; elliptical particle

## 0 引 言

目前, 采用运动理论描述砂土的流动特性(如滑坡、泥石流等)是研究的热点内容之一<sup>[1-11]</sup>。运动理论的显著优点是平面应变情况下采用两个运动方程控

基金项目: 国家杰出青年基金项目(51025932); 国家自然科学基金项目(10972158, 51179128); 上海优秀学术带头人计划项目(11XD1405200)

收稿日期: 2012-01-08

制速度场,其基本物理模型业已建立且方程相对简单。1947 年 Mandel<sup>[1]</sup>建立起描述砂土流动的简单理论,北欧力学家 DE Josselin de Jong<sup>[2-3]</sup>和 Spencer<sup>[5]</sup>在此基础上分别发展出了双滑移自由转动模型和双剪模型。英国数学家 Harris<sup>[6]</sup>通过引入角速度参量将上述两个模型结合起来得到统一双滑移塑性理论。而美国力学家 Nemat-Nasser 在文献[5]的基础上将双剪模型中的转动率参量假设为某一组构参量的变化率<sup>[7]</sup>。笔者曾基于圆形颗粒微观接触力学推导出表征颗粒转动的平均纯转动率 (the averaged micro-pure rotation rate, 简称 APR) 的表达式,与文献[6]中的统一双滑移塑性理论相结合得到新的本构理论即双滑移转动率理论 (DSR<sup>2</sup> 模型)<sup>[8-11]</sup>。鉴于上述运动模型的理论基础均是假设变形沿着剪切滑移线发生,在此统称为双剪类运动模型。文献[8, 9]中指出双滑移自由转动模型、双剪模型和 DSR<sup>2</sup> 模型的显著区别在于运动方程中转动率参量的物理意义不同,且以圆形颗粒为基础的 NS2D 离散元程序的不排水单剪数值试验结果表明,DSR<sup>2</sup> 模型较双剪模型、双滑移自由转动模型更能准确地描述颗粒材料的流动特性。

然而,许多真实砂土颗粒以非圆形为主,上述结论对于非圆形颗粒材料是否成立值得进一步深入研究。为此笔者采用改进后的 NS2D 程序<sup>[12]</sup>对椭圆颗粒长短轴比例分别为 1.4, 1.7 的离散元试样进行不排水单剪试验,计算剪切过程中上述双剪类模型中假定的各转动率参量,并与转动率参量的理论预测值对比分析,以验证上述模型中所选用转动率参量的合理性及采用椭圆散粒体描述砂土流动特性的可行性。篇幅所限,文献[7]中采用组构张量变化率作为散粒体转动率参量的验证结果将另文叙述。

## 1 双剪类运动模型

文献[6]中利用运动方程为不可压缩材料建立了统一双滑移塑性模型:

$$2(\lambda + W_{12})\sin\varphi = (D_{11} - D_{22})\sin 2\psi_\sigma - 2D_{12}\cos 2\psi_\sigma, \quad (1a)$$

$$(D_{11} + D_{22}) = 0. \quad (1b)$$

式中  $\lambda$  为转动率参量;  $\varphi$  为颗粒材料内摩擦角;  $\psi_\sigma$  为主应力方向与  $x$  轴正向的夹角:

$$\psi_\sigma = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\right). \quad (2)$$

$W_{ij}$  为自旋张量,  $D_{ij}$  为变形率,可采用欧拉速度场表示:

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (3a)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (3b)$$

式中,  $v_i$  表示速度,  $i, j$  在二维坐标中取 1, 2。

DE Josselin de Jong 在双滑移自由转动模型<sup>[2-3]</sup>中未赋予转动率参量  $\lambda$  确定值,而是根据两个滑移方向能量消散不为零的条件对模型进行限定。文献[4]中指出该限定条件与不等式 (4) 是等价的:

$$A = 2|\lambda + W_{12}| < \frac{s_{km}e_{km}}{q\cos\phi} = B, \quad (4)$$

式中,  $\lambda$  由下文式 (18) 求得, 而

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad (5a)$$

$$e_{ij} = D_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}D_{kk}, \quad (5b)$$

$$q = \frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{1/2}, \quad (5c)$$

式 (5a)、(5b) 中,  $i=1, 2$  分别代表  $x, y$  方向, 且符合求和法则,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 张量。

若设式 (1a) 中转动率参量  $\lambda$  为主应力方向的变化率, 即

$$\lambda = \dot{\psi}_\sigma = \frac{(\psi_\sigma^{t+dt} - \psi_\sigma^t)}{dt}. \quad (6)$$

则式 (1) 即为 Spencer 提出的双剪模型<sup>[5]</sup>。

笔者在双滑移转动率模型 (DSR<sup>2</sup> 模型) 中设式 (1a) 中转动率参量  $\lambda$  为椭圆散粒体中接触点的平均纯转动率  $W_3^c$  (APR)<sup>[13]</sup>即

$$\lambda = W_3^c. \quad (7)$$

DSR<sup>2</sup> 模型是在两个描述砂土流动的常规运动方程基础上得到的新的本构模型, 故在此称其为非常规本构模型。模型中转动率参量 APR 将离散介质力学和连续介质力学有机结合起来, APR 的推导过程已在文献[13]中详细叙述, 在此仅简要介绍。假定图 1 中椭圆颗粒 1, 2 的中心分别为  $O_1, O_2$ , 接触点为  $c$ , 接触半径分别为  $R_1, R_2$ , 速度分别为  $\dot{u}_{(1)i}, \dot{u}_{(2)i}$ , 角速度分别为  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ; 采用公法线法<sup>[14]</sup>求得接触点处公切线的法向、切向单位向量为  $n_1, n_2$ ; 两颗粒接触点的旋转半径分别为  $r_1, r_2$ , 按式 (8) 计算。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= R_1 \cos \beta_1, \\ r_2 &= R_2 \cos \beta_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,  $\beta_1, \beta_2$  如图 1 所示。

文献[13]中推导得到椭圆颗粒接触点间的相对滑转率由式 (9) 表示:

$$\dot{\theta}^s = \frac{1}{r}[r_1\dot{\theta}_1 + r_2\dot{\theta}_2 - (r_1\dot{\alpha}_1 + r_2\dot{\alpha}_2)] \quad (9)$$

设接触点间的纯转动率为  $\dot{\theta}^p$ , 由下式表示

$$\dot{\theta}^p = \frac{1}{r}(r_1\dot{\theta}_1 + r_2\dot{\theta}_2). \quad (10)$$

则式(9)可表示为

$$\dot{\theta}^s = \dot{\theta}^p - \frac{1}{r}(r_1\dot{\alpha}_1 + r_2\dot{\alpha}_2) \quad (11)$$

式中  $\dot{\alpha}_1$ ,  $\dot{\alpha}_2$  为与颗粒 1, 2 平动相关的参量;  $r$  为接触点处的等效半径, 由式(12)求得

$$r = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \quad (12)$$

式中,  $r_1$ ,  $r_2$  为接触点处的旋转半径。式(11)表明接触点间的滑转率  $\dot{\theta}^s$  由纯转动率  $\dot{\theta}^p$  及  $\dot{\alpha}_1$ ,  $\dot{\alpha}_2$  组成, 其中  $\dot{\theta}^p$  与颗粒的转动及其尺寸相关。连续介质力学中物体的运动/变形仅由其位移/速度确定(即由  $\dot{\alpha}$  表示), 这将在下文进一步说明; 但忽略了颗粒转动对能量耗散的影响。由文献[11]可知颗粒接触点间摩擦有滚动摩擦及滑动摩擦两种, 考虑到滚动摩擦很小, 本文假定其作用可以忽略不计, 仅考虑滑动摩擦  $\dot{\theta}^p$  的影响。需要指出, 若颗粒单元为圆形, 则接触点的公切线垂直于两颗粒中心的连线即  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , 式(8)中旋转半径即为两圆形颗粒半径。由此可得, 上述公式同样适用于圆形。

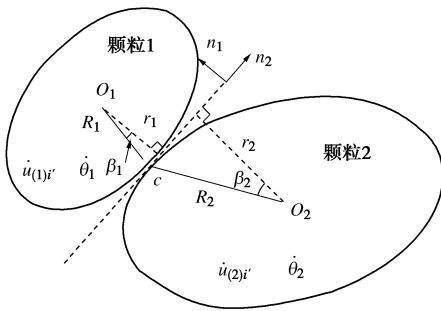


图1 椭圆颗粒的接触情况

Fig. 1 Details of contact between two ellipses

将表征椭圆散粒体中接触点间能量耗散的参量定义为平均纯转动率 (APR), 采用式(13)求得。

$$W_3^c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\theta}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{r^k} (\dot{\theta}_1^k r_1^k + \dot{\theta}_2^k r_2^k) \right] \quad (13)$$

式中  $\dot{\theta}^p$  为纯转动率;  $N$  为试样中接触点的总数;  $\dot{\theta}_1^k$ ,  $\dot{\theta}_2^k$  为椭圆颗粒 1, 2 的角速度;  $r^k$  为接触点处的等效半径, 由式(12)得到。

若散粒体的级配曲线跨度不大且为圆形颗粒, 则可认为所有的旋转半径相同, APR 由式(14)近似求得

$$W_3^c = \frac{2}{M} \sum_{l=1}^M \frac{c_l}{C} \dot{\theta}_l \quad (14)$$

式中  $c_l$  为颗粒  $l$  的接触点数目;  $M$  为试样中颗粒总数; 平均配位数  $C=2N/M$ 。

分析式(1a)可知, DSR<sup>2</sup> 模型中若  $\lambda + W_{12} \neq 0$ , 则表明主应力方向与主应变增量方向不一致即存在

非共轴现象, 故 DSR<sup>2</sup> 模型还可用于砂土非共轴特性方面的研究。需要指出, 双剪类运动模型的主要区别在于转动率参量  $\lambda$  的选取, 这也为上述模型的合理性验证提供了有效途径。下文拟利用改进后的 NS2D 离散元程序通过长短轴比例  $A_m$  分别为 1.4, 1.7 椭圆颗粒试样的不排水单剪数值试验进行相应的验证工作。

## 2 离散元数值试验

离散元试样的颗粒级配采用椭圆长短轴几何平均值表示见图 2。双剪类模型验证时试样需满足体应变为零的要求(材料的不可压缩性), 然而离散元中实际生成的试样很难满足这一要求, 在此通过试算取  $A_m=1.4$  时孔隙比为 0.18, 0.20, 0.23,  $A_m=1.7$  时孔隙比为 0.16, 0.19, 0.22 的试样分别代表该比例下的密实、中密及松散状态, 若双剪类运动模型在上述试样中得出的结论一致, 则可认为所得结论对于体应变为零的试样同样适合。离散元试样约有 2000 个椭圆颗粒组成, 采用分层欠压法生成<sup>[15]</sup>, 相应的计算参量见表 1。借鉴文献[16]中试样的高宽比, 离散元试样生成时宽度为 325 mm, 高度与长短轴比例、目标孔隙比密切相关。例如,  $A_m=1.4$ ,  $e=0.22$  的中密试样高度约为 334 mm。

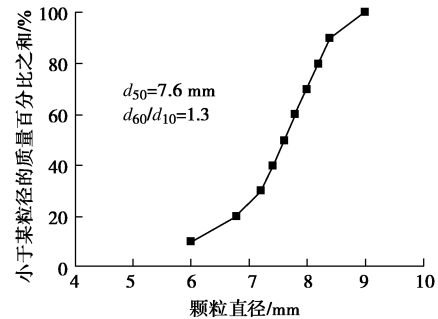


图2 离散元试样的等效颗粒级配

Fig. 2 Particle size distribution of DEM samples

表1 计算参量的取值

Table 1 Parameters of DEM tests

参量	参量值
颗粒尺寸/mm	见图2
颗粒密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	2600
切向接触刚度/(N·m <sup>-1</sup> )	1.5×10 <sup>9</sup>
法向接触刚度/(N·m <sup>-1</sup> )	1.0×10 <sup>9</sup>
计算时步/s	1.0×10 <sup>-4</sup>
颗粒与墙之间的摩擦系数 (固结阶段、单剪/双轴)	0, 0.5
墙的转动率/(rad·min <sup>-1</sup> ) (单向剪切、循环剪切)	0.05, 0.15

不排水单剪试验分单向固结、单剪两个阶段进行。固结阶段设置颗粒间的摩擦系数为 0.5, 颗粒与墙的摩擦系数为 0, 保持左、右边墙固定不动, 上、下墙在  $\sigma_v=200$  kPa/400 kPa 伺服压力下固结至稳定状态;

单剪阶段则设置颗粒与墙以及颗粒间的摩擦系数均为 0.5, 保持试样体积不变, 上、下边墙仅在水平方向平动, 不发生竖向位移, 而左、右墙以相同的角速度绕其中心转动。需要指出, 受椭圆颗粒固有属性影响即使采用分层欠压法生成的试样也不能满足颗粒方向上各向同性的要求。为此还需进行左右墙仅在垂直向平动, 不发生水平位移, 上下墙以相同的角速度绕墙中心转动的单剪试验, 以消除试样各向异性对验证结果的影响, 此部分成果受篇幅所限将另文叙述。

单向剪切时, 左、右墙的角速度恒定:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \quad (15a)$$

循环剪切时, 角速度呈周期性变化:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \quad (15b)$$

式中  $\dot{\theta}_0$  为墙的最大转动速度即转动幅值, 以逆时针方向为正, 取值见表 1;  $t$  为转动时间 (s);  $T_0$  为循环剪切时的周期, 为 120 s。

单剪试验时试样为刚性边界, 根据连续介质力学可将试样某一位置的速度场表示为

$$v_y = 0 \quad (16a)$$

$$v_x = -\dot{\theta}y \quad (16b)$$

式中,  $y$  为该位置距墙转动中心的竖向距离。

由式 (3) 可求得单剪试验中变形率、自旋张量为

$$W_{12} = D_{12} = -\frac{1}{2}\dot{\theta} \quad (17a)$$

$$D_{11} = D_{22} = 0 \quad (17b)$$

综合式 (1)、(17) 可得单剪试验中转动率参数的理论表达式:

$$\lambda = -\frac{D_{12} \cos 2\psi_\sigma}{\sin \varphi} - W_{12} = \left(\frac{\cos 2\psi_\sigma}{2 \sin \varphi} + \frac{1}{2}\right)\dot{\theta} \quad (18)$$

式中, 内摩擦角  $\varphi$  取  $30^\circ$ , 原因在于上述双剪类运动模型的研究基础为不可压缩材料, 剪切过程中体应变为零, 采用残余内摩擦角进行计算; 且下文的双轴试验表明长短轴比例不同时试样的残余内摩擦角不同但差别不大, 数值试验时为减小程序修改方面的繁琐工作取其平均值 ( $30^\circ$ ) 进行分析。通过单剪数值试验分析上述模型中选用转动率参数与式 (18) 所得理论值的符合情况即可判别其参数选取的合理性。本文针对不同长短轴比例 (1.4, 1.7) 分别进行 8 组不排水单剪数值试验 (表 2)。

图 3 为  $A_m=1.4$  中密试样在单向剪切过程中某时刻的准静态速度场。观察图 3 可知, 试样的  $x$  向速度随距离试样中心距离的增大而增加, 方向基本呈对称分布;  $y$  向速度很小, 接近于零。且将试样沿竖直向分条带输出带内颗粒的水平、竖直方向的平均速度与

式 (16) 的理论值基本吻合<sup>[13]</sup>。由此可知, 式 (16) 可用于描述单剪试验中试样的速度场, 进而可将式 (18) 得到的理论预测值作为上述双剪类运动模型的验证依据。

表 2 离散元试验工况

Table 2 Test conditions in simple shear tests in DEM		
试样状态	单向剪切时 $\sigma_v/\text{kPa}$	循环剪切时 $\sigma_v/\text{kPa}$
密实	200, 400	400
中密	400	400
松散	200, 400	400



图 3  $A_m=1.4$  时中密离散元试样某时刻的速度场分布

Fig. 3 A typical velocity field observed in a middle-dense DEM specimen with  $A_m=1.4$

### 3 数值试验结果及分析

#### 3.1 双轴试验结果

通过 24 个双轴试验 (6 组) 获取长短轴比例  $A_m$  为 1.4, 1.7 离散元试样的基本力学性能; 每组试样的围压  $\sigma_3$  分别为 50, 100, 200, 400 kPa, 上下墙的剪切速率为 0.2%/min, 轴向应变达到 15%后停止试验, 详细试验过程见文献[12]。图 4 为  $A_m=1.4$  中密试样 ( $\sigma_3=200$  kPa) 双轴试验过程中的接触力链, 图 4 中黑线表示颗粒间作用力的大小和方向, 黑线越粗, 颗粒间的作用力越大。由图 4 可知, 双轴剪切过程中竖向力占主导作用, 且竖向力链相互贯通形成主要的受力骨架, 与剪切过程中上下墙的剪切运动占主导作用相一致。一系列的双轴试验结果表明, 试验所用的试样  $A_m=1.4$  时峰值内摩擦角范围为 ( $32.3^\circ$ ,  $39.7^\circ$ ), 残余内摩擦角为  $27.3^\circ$ ;  $A_m=1.7$  时峰值内摩擦角为 ( $31.7^\circ$ ,  $43.8^\circ$ ), 残余内摩擦角为 ( $30.0^\circ$ ,  $32.3^\circ$ )<sup>[13]</sup>, 均处于真实砂土的内摩擦角范围之内, 可用于研究砂土的流动特性。

#### 3.2 单向剪切时模型验证

通过“测量圆”实时测量试样内应力  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  及主应力方向  $\psi_\sigma$ , 由式 (4)、(5)、(6)、(13) 计算上述双剪类运动模型中假定的转动率参数, 式 (18) 计算转动率参数的理论值, 对比分析即可验证上述模型中转动率参数选取的合理性。图 5 为  $A_m=1.4$  中密试样 ( $\sigma_v=400$  kPa) 单向剪切过程中的接触力链。由图 5 可知, 随着左右墙的旋转, 剪应变逐渐增大, 颗粒间

的作用力也发生较大变化。试样的左上角和右下角区域内颗粒间作用力逐渐减小, 而右上角和左下角则出现了应力集中现象, 这也与文献[17, 18]中单剪数值试验的描述相一致。

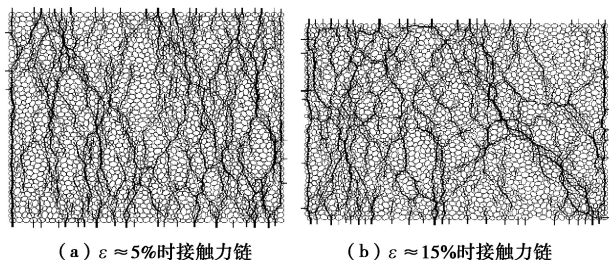


图4  $A_m=1.4$  时中密离散元试样的接触力链 ( $\sigma_3=200$  kPa)

Fig. 4 Contact force chains in a middle-dense DEM sample with  $A_m=1.4$  ( $\sigma_3=200$  kPa)

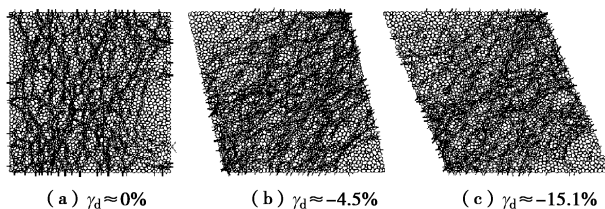


图5  $A_m=1.4$  中密离散元试样单向剪切时的接触力链

Fig. 5 Contact force chains in a middle-dense DEM sample with  $A_m=1.4$  in the monotonic simple shear tests

图6为  $A_m=1.4, 1.7$  的试样在不排水单向剪切过程中不等式(4)中参量  $A, B$  的变化情况, 图中剪应变  $\gamma_d$  为负是为了与运动模型中的符号保持一致。篇幅所限仅给出了部分试样及所有试样平均值的变化趋势。由图6可知, 剪切过程中参量  $A$  始终为正值, 参量  $B$  有少量负值出现, 估计是离散元计算误差造成的; 参量  $A$  明显大于  $B$ , 且剪应变较小时最大差值超过5倍, 随着剪应变的增加, 参量  $A$  可达到参量  $B$  的数十倍, 这与双滑移自由转动模型的限定条件 ( $A < B$ ) 明显不符。由此并结合文献[9]可得, 无论圆形还是椭圆形颗粒堆积体单向剪切过程中双滑移自由转动模型的限定条件 (两个滑移方向上能量消散不为零) 均过于严格。

图7, 8分别为  $A_m=1.4, 1.7$  各离散元试样在剪切过程中转动率参量的理论预测值及应力主轴转动率的变化情况, 其目的在于检验双剪模型中转动率参量选取的合理性。由图7(a)可知,  $A_m=1.4$  的各试样在剪切过程中理论转动率均为正值, 且随剪应变的发展而急剧减小 (由  $0.006$  rad/s 减小为小于  $0.001$  rad/s),  $\gamma_d < -1.5\%$  之后理论值基本在  $(0, 0.0005$  rad/s) 内小幅变化; 而图7(b)中应力主轴变化率的范围约为  $(-0.006, 0.003)$  rad/s, 两者在定量及定性上均差别显著。同样由图8可知,  $A_m=1.7$  的各试样在剪切过程中理论预测转动率同样均为正值, 剪应变较小时其最大值在  $0.005$  rad/s 附近, 随着剪应变的发展, 其迅速

减小, 基本在  $(0, 0.0005$  rad/s) 范围内变化; 而主应力方向的变化率远大于理论预测值, 其变化范围约为  $(-0.09$  rad/s,  $0.15$  rad/s), 两者在定量及定性上同样差距明显。由此并结合文献[9]可得, 无论圆形还是椭圆形颗粒堆积体单向剪切过程中双剪模型并不能很好预测运动模型中转动率参数的变化情况。

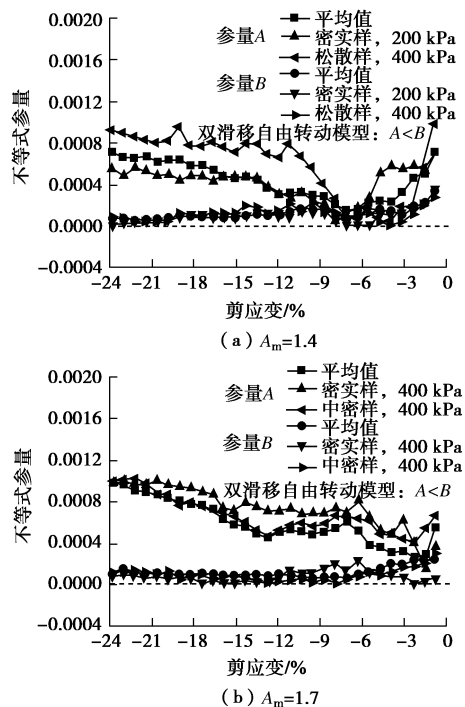


图6 单向单剪试验中双滑移自由转动模型的验证

Fig. 6 Validation of the double-sliding free-rotation model during monotonic simple shear tests

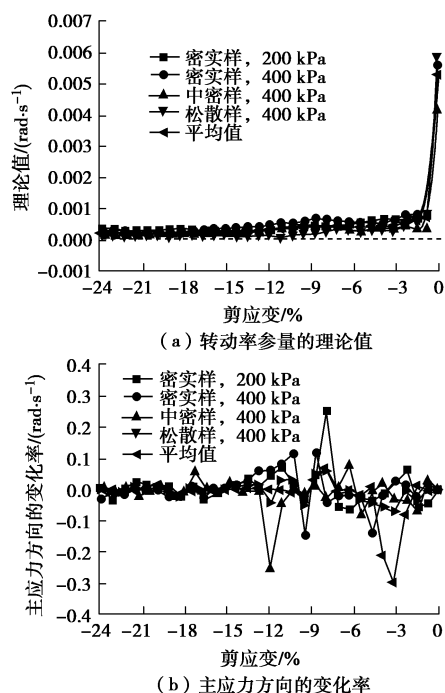


图7  $A_m=1.4$  时单向剪切过程中双剪模型的验证

Fig. 7 Validation of double-shearing model during monotonic simple shear tests with  $A_m=1.4$

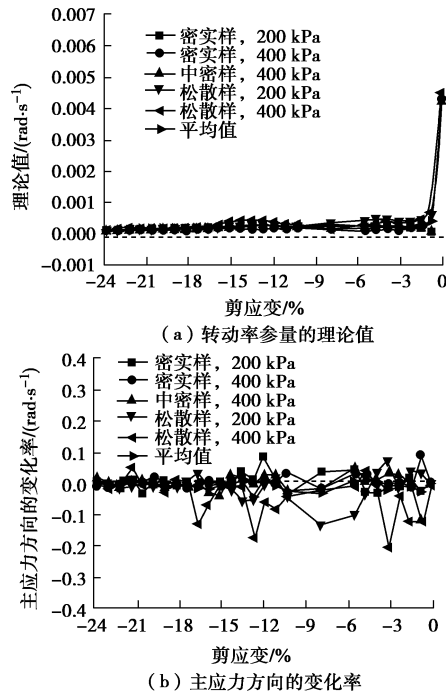


图 8  $A_m=1.7$  时单向剪切过程中双剪模型验证

Fig. 8 Validation of double-shearing model during monotonic simple shear tests with  $A_m=1.7$

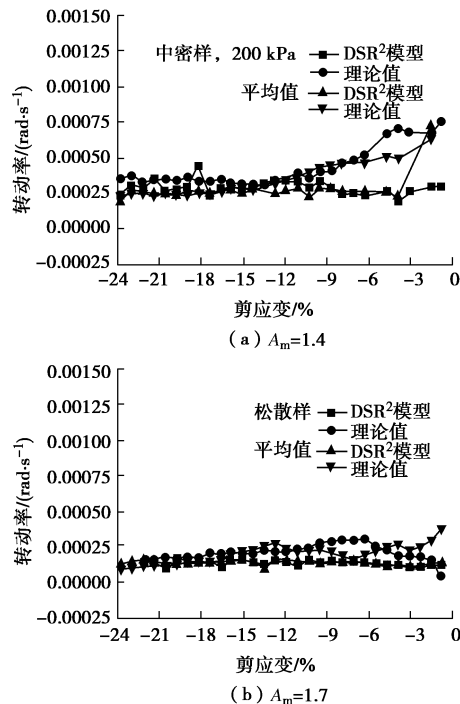


图 9 单向剪切过程中 DSR<sup>2</sup> 模型的验证

Fig. 9 Validation of DSR<sup>2</sup> model during monotonic simple shear tests

图 9 为  $A_m=1.4, 1.7$  部分离散元试样及所有试样平均值在剪切过程中转动率参数的理论值及 DSR<sup>2</sup> 模型中 APR 的变化情况。由图 9 可知,  $A_m=1.4, 1.7$  时中密试样在剪切过程中转动率参数  $\lambda$  的理论预测值与

DSR<sup>2</sup> 模型中 APR 的变化趋势相同, 两者在数值上吻合较好; 且所有试样的理论平均值与 APR 的平均值吻合良好。故可以得出单向剪切试验中由 DSR<sup>2</sup> 模型获取的 APR 可以用来预测运动模型中转动率参数  $\lambda$  的变化情况。结合文献[9, 11]的数值试验结果可得, 随颗粒长短轴比例  $A_m$  的增加, 剪切过程中各试样的理论预测值及 APR 值的变化趋势均呈明显的减小趋势, 这也为砂土非共轴微观机制研究(剪切过程中砂土的主应力方向与主应变增量方向不一致程度的影响因素分析)指明了方向。

### 3.3 循环剪切时模型验证

篇幅所限, 本文仅给出部分循环单剪模型验证的试验结果。图 10 给出了  $A_m=1.4$  松散试样 ( $\sigma_v=400$  kPa) 循环单剪试验中不等式 (4) 中参数  $A, B$  的变化趋势。观察图 10 可知, 参数  $A, B$  基本呈周期性变化, 但  $A$  的幅值是  $B$  的 2~4 倍, 这与双滑移自由转动模型中设定的限定条件  $A < B$  相违背, 由此可得循环单剪试验中双滑移自由转动模型的限定条件过于严格。综合文献[9, 11]及本文的试验结果可知, 对于圆形及椭圆形颗粒试样, 单剪试验中双滑移自由转动模型的限定条件均过于严格。该限定条件是基于两个滑移线方向能量消散均不能为零提出的, 过于严格的原因笔者认为可能是考虑能量消散时忽略了颗粒转动的影响。

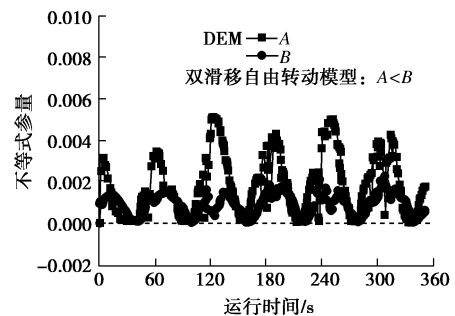


图 10 循环单剪试验中双滑移自由转动模型的验证

Fig. 10 Validation of double-sliding free-rotation model during cyclic simple shear tests with  $A_m=1.4$  ( $\sigma_v=400$  kPa)

图 11 为  $A_m=1.7$  中密试样 ( $\sigma_v=400$  kPa) 循环单剪试验中理论转动率与主应力方向变化率的对比情况。分析图 11 可知, 两者基本呈周期性变化, 但符号始终相反, 且主应力方向的变化率缩小 25 倍后仍显著大于理论预测值。由此可知, 循环单剪中转动率参数的理论预测值与主应力方向的变化率在定性、定量上均存在显著差异; 而双剪模型中假定两者相等, 故循环单剪试验中双剪模型不能预测转动率的变化。综合上述单向剪切及文献[9]的成果可知, 无论圆形还是椭圆形颗粒堆积体单剪试验中双剪模型均不能很好预测运动模型中转动率参数的变化情况。

图 12 为部分离散元试样 (中密样  $\sigma_v=400$  kPa) 及所有试样平均值在循环剪切过程中转动率参数的理论值及 DSR<sup>2</sup> 模型中 APR 的变化情况。由图 12 可知, 转动率参数的理论预测值与 APR 呈相同的周期性变化, 且总体来说两者在定量上吻合良好,  $A_m=1.4$  试样的变化幅值在  $(-0.0015, 0.0015 \text{ rad/s})$  之间, 而  $A_m=1.7$  试样的变化幅值基本在  $(-0.001, 0.001 \text{ rad/s})$  之间。综合上述单向剪切及文献[9, 11]的成果可得, 离散元单剪试验中圆形和椭圆形颗粒堆积体采用 DSR<sup>2</sup> 模型中的 APR 值均能很好预测运动模型中转动率参数的变化情况; 且颗粒长短轴比例的差异对剪切过程中理论预测值及 APR 变化趋势的影响也为今后砂土非共轴微观机制研究 (剪切过程中砂土的主应力方向与主应变增量方向不一致程度的影响因素分析) 指明了方向。

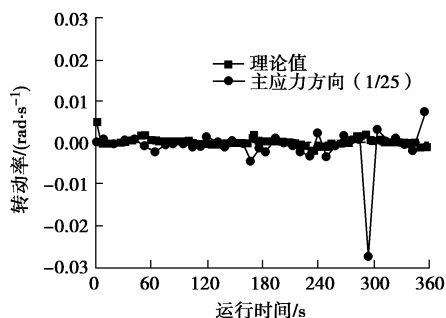


图 11 循环单剪试验中双剪模型的验证

Fig. 11 Validation of double-shearing model during cyclic simple shear tests with  $A_m=1.7$  ( $\sigma_v=400$  kPa)

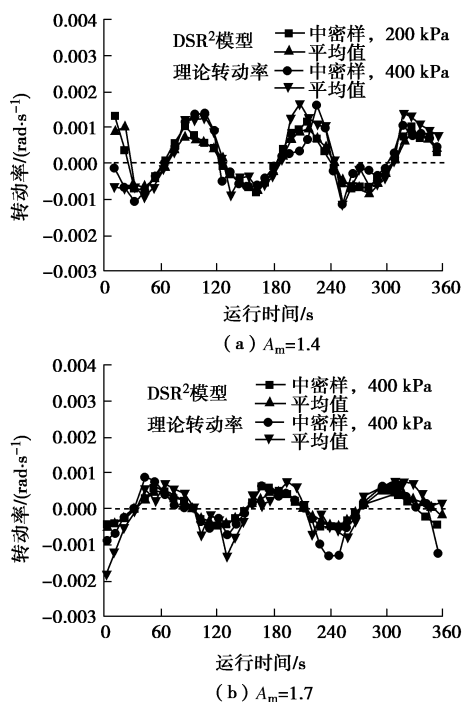


图 12 循环单剪试验中 DSR<sup>2</sup> 模型的验证

Fig. 12 Validation of DSR<sup>2</sup> model during cyclic simple shear tests

## 4 结 论

采用改进后的 NS2D 离散元程序以长短轴比例分别为 1.4, 1.7 的椭圆颗粒试样为研究对象, 通过不排水单剪数值试验对描述颗粒流动的 3 种双剪类运动模型中转动率参数选取的合理性进行验证。结合文献[9, 11]中以圆形颗粒为基础的数值试验结果可得如下结论:

(1) 无论圆形或是椭圆形颗粒试样, 双滑移自由转动模型中的限定条件因未考虑能量消散过程中颗粒滑动的影响过于严格。

(2) 双剪模型中转动率参数为主应力方向变化率的假定即  $\lambda = \dot{\psi}_\sigma$  与离散元数值试验的结果相差很大, 采用主应力方向的变化率预测运动模型中转动率参数的变化并不合适。

(3) DSR<sup>2</sup> 模型中采用平均纯转动率 (即 APR 值) 可很好地预测运动模型中转动率参数的变化情况, 且 DSR<sup>2</sup> 模型可用于砂土非共轴微观机理方面的研究, 这也是笔者进一步研究的重点内容之一。

(4) 可考虑颗粒转动对能量耗散影响的平均纯转动率参数 (APR) 将离散介质力学和连续介质力学有机结合起来, 是运动模型中一个合理且重要的参量。

## 参考文献:

- [1] MANDEL J. Sur les lignes de glissement et le calcul des déplacements dans la deformation plastique[C]//C.r.hebd. Seanc Acad Sci, Paris, 1947, 223: 1272 - 1273.
- [2] DE Josselin de Jong. The undefiniteness in kinematics for friction materials[C]//Proc Conf Earth Pressure Problem, Brussels, 1958(1): 55 - 70.
- [3] DE Josselin de Jong. The double sliding, free rotating model for granular assemblies[J]. Géotechnique, 1971, 21(3): 155 - 162.
- [4] MEHRABADI M M, COWIN S C. On the double-sliding free-rotating model for the deformation of granular materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1981, 29(4): 269 - 282.
- [5] SPENCER A J M. A theory of the kinematics of ideal soils under planer strain conditions[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1964, 12: 337 - 351.
- [6] HARRIS D. A unified formulation for plasticity models of granular and other materials[C]//Proc R Soc Lond, 1995, A450: 37 - 49.
- [7] Nemat-Nasser S. A micromechanically-based constitutive model for frictional deformation of granular materials[J].

- Journal of Mechanics and Physics of Solids, 2000, **48**: 1541 - 1563.
- [8] JIANG M J, HARRIS D, YU H S. Kinematic models for non-coaxial granular materials: Part I: theories[J]. Int Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2005, **29**(7): 643 - 661.
- [9] JIANG M J, HARRIS D, YU H S. Kinematic models for non-coaxial granular materials: Part II: evaluation[J]. Int Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2005, **29**(7): 663 - 689.
- [10] JIANG M J, HARRIS D, YU H S. A novel approach to examining double-shearing type models for granular materials [J]. Granular Matter, 2005, **7**(2/3): 157 - 168.
- [11] JIANG M J, YU H S, HARRIS D. Kinematic variables bridging discrete and continuum granular mechanics[J]. Mechanics Research Communications, 2006, **33**: 651 - 666.
- [12] 李立青, 蒋明镜, 吴晓峰. 椭圆形颗粒堆积体模拟颗粒材料力学性能的离散元数值方法[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增刊 1): 713 - 718. (LI Li-qing, JIANG Ming-jing, WU Xiao-feng. A developed discrete element model NS2D for simulating mechanical properties of elliptical particles assemblages[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(S1): 713 - 718. (in Chinese))
- [13] 蒋明镜, 申志福, 李立青. 双滑移转动率模型对椭圆散粒体的适用性[J]. 计算力学学报, 2013, 待刊. (JIANG Ming-jing, SHEN Zhi-fu, LI Li-qing. Applicablity of double slip and rotation rate model for elliptical granular assemblage[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2013, in press. (in Chinese))
- [14] LIN X, NG T T. Contact detection algorithms for three-dimensional ellipsoids in discrete element method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1995, **19**(9): 653 - 659.
- [15] JIANG M J, KONRAD J M, LEROUEIL S. An efficient technique to generate homogeneous specimens for DEM studies[J]. Computers and Geotechnics, 2003, **30**(5): 579 - 597.
- [16] JOER H A, LANIER J, FAHEY M. Deformation of granular materials due to rotation of principal axes[J]. Géotechnique, 1998, **45**: 605 - 619.
- [17] DOUNIAS G T, POTTS D M. Numerical analysis of drained direct and simple shear tests[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, **119**(12): 1870 - 1891.
- [18] 黄茂松, 孙海忠, 钱建固. 粗粒土的非共轴性及其离散元数值模拟[J]. 水利学报, 2010, **41**(2): 173 - 181. (HUANG Mao-song, SUN Hai-zhong, QIAN Jian-gu. Non-coaxial behavior of coarse granular aggregates simulated by DEM[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2010, **41**(2): 173 - 181. (in Chinese))