

# 饱和冻土水热力耦合模型解析及验证

何 敏<sup>1, 3</sup>, 李 宁<sup>1, 2</sup>, 刘乃飞<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 中国科学院寒区旱区环境与工程研究所冻土工程国家重点实验室, 甘肃 兰州 730000;

3. 西北勘测设计研究院, 陕西 西安 710065)

**摘 要:** 在饱和冻土多孔多相介质理论构架的基础上, 通过引入 Clapeyron 方程描述温度梯度对冻结区水分迁移影响, 并结合寒区工程的实际特点, 对数学耦合模型中的应力平衡方程、连续性方程、能量方程进行了适当的简化, 从而建立了实用化的饱和冻土温度场、水分场、变形场耦合分析的数值模型。据此开发了能够反应各种外因(外载、温度)作用下土体多场耦合机制的有限元分析程序, 利用研发的程序对经典试验进行了分析, 初步验证了模型及分析程序的可行性与合理性, 为模型的工程应用奠定了基础。

**关键词:** 冻土; 水热力耦合模型; 水分迁移; 相变

**中图分类号:** TU47

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2012)10-1858-08

**作者简介:** 何 敏(1981-), 男, 湖北随州人, 博士研究生, 主要从事水电站设计及寒区岩土工程三场耦合等方面的研究工作。E-mail: hem@nwh.cn。

## Analysis and validation of coupled heat-moisture-deformation model for saturated frozen soils

HE Min<sup>1, 3</sup>, LI Ning<sup>1, 2</sup>, LIU Nai-fei<sup>1</sup>

(1. Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, CAREERI, CAS, Lanzhou

730000, China; 3. Northwest Hydro Consulting Engineering, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** Based on the theoretical frame of multi-phase porous medium for saturated frozen soils, the momentum equilibrium equation, the continuity equation, and the energy equation of the coupled model for frozen soils are simplified through the introduction of Clapeyron equation to describe the temperature gradient on the moisture migration in freezing zone and considering the actual engineering characteristics in cold regions. The program of the FEM resolution for the coupled heat-moisture-deformation model for civil engineering in cold zone is established under the plane strain. The simulated results for analyzing Penner's lab heaving tests are introduced to check and validate the rationality and reliability of the proposed model.

**Key words:** frozen soil; coupled heat-moisture-deformation model; moisture migration; phase change

## 0 引 言

我国西部广大寒区的众多工程冻害问题本质上是多孔多相介质带相变的固、液、气、热耦合问题<sup>[1]</sup>。从 20 世纪 50 年代后期至今, 众多国内外学者对寒区冻土水热迁移问题进行了比较深入的分析研究, 提出了各种水、热、力耦合模型:

(1) Chen 等<sup>[2]</sup>在冻胀的物理本质基础上, 考虑冻胀经验公式, 从而建立起各种半经验模型。

(2) Guymon 等<sup>[3]</sup>学者把复杂的冻土的冻胀融沉机理的综合影响因素简单的归结在冻土中未冻水含量随温度的关系上, 提出了冻土中热质迁移与水分迁移相互作用的流体动力学模型。

(3) Nixon<sup>[4]</sup>、Sheng 等<sup>[5]</sup>学者, 基于次冻胀理论

与冰分凝理论, 提出和发展了在不可变形的“刚性”冰和线性稳定温度场假定基础上的刚冰模型。

(4) 苗天德等<sup>[6]</sup>、郭力等<sup>[7]</sup>从热力学、混合物理论的角度出发, 建立起固、液两相介质带相变的水、热二场耦合模型, 可以模拟水分迁移与热质迁移的二场的耦合机制。

(5) Duquennoi 等<sup>[8]</sup>提出了热力学水、热、力三场耦合模型, 并由 Fremond 等<sup>[9]</sup>进一步发展完善, 该模型从热力学的角度出发, 以多孔多相介质的混合物理论为基础, 建立起了冻土微元体中土、冰、水三相介质的质量守恒、能量守恒及熵不等式, 从而进一步

**基金项目:** 国家自然科学基金创新群体项目(40821001); 中科院寒区旱区研究所重点实验室项目(SKLFSE-ZY-03)

**收稿日期:** 2010-10-08

提出了多相介质的相应的自由能和耗散能表达式与多相介质的本构方程。

(6) 张玉军等<sup>[10]</sup>建立了考虑饱和 - 非饱和介质的二维三场耦合模型, 考虑了膨胀力但未考虑除水外其它各相的连续方程。

(7) 许强等<sup>[11]</sup>根据 R.L.Harlan 水热耦合模型等推导了温度场方程和体积应变计算公式, 但未建立起真正的三场耦合控制微分方程, 且未考虑温度变化对土体变形的影响。然而这些模型中对相变潜热以及温度梯度引起的水分迁移等问题还考虑不足, 相关模型的实用化数值分析软件相关报道也较少。

(8) 陈波等<sup>[12]</sup>推证了多孔介质三场耦合数学模型微分方程, 开发了相应的三场耦合分析软件 CDST, 并验证了该软件的可靠性。陈飞熊等<sup>[13-14]</sup>根据传统的多孔多相介质力学研究方法, 推导出了冻土体的有效应力原理、连续性方程及各相成分的能量转换与传递方程, 本文在此基础上, 通过引入 Claperyon 方程描述冻结区温度梯度对水分迁移的影响, 并结合冻土工程特点对模型进行适当的简化, 试图建立实用化的寒区饱和冻土的三场耦合数值分析模型, 开发出相应的三场耦合数值分析软件, 并通过与经典试验成果对比分析, 验证模型及分析程序的合理性和实用性, 为进一步工程实用推广奠定基础。

## 1 饱和冻土三场耦合模型

### (1) 应力平衡方程

$$\nabla \sigma'_s + (1 - \chi) \nabla p_i + \chi \nabla p_w - \rho \bar{X} = 0, \quad (1)$$

式中,  $\sigma'_s$  为岩土骨架有效应力,  $p_w$  为未冻水压力,  $p_i$  为冰相压力,  $\rho$  为冻土体的密度,  $\bar{X}$  为冻土体体积力,  $\chi$  为未冻水压力系数, 在冻结区, 则有:  $\chi \approx 0$ , 在未冻区, 则有:  $\chi = 1$ 。

### (2) 连续性方程

单位时间冻土微元体的变形等于流入的水分的体积与土体内的未冻水相变成冰后增加的附加体积之和。

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v}_w - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} \dot{n}_{wi} = 0, \quad (2)$$

式中,  $\varepsilon_v$  为冻土体体积应变,  $\bar{v}_w$  为水分迁移速度场,  $\rho_w$ ,  $\rho_i$  分别为水、冰的密度,  $n_{wi}$  为冰水相变速率, 在未冻区,  $n_{wi} = 0$ 。

### (3) 能量方程

假定冻土体内各相成分之间的变形保持一致, 且每个分析单元上各相成分的混合温度为  $T$ , 则有

$$\bar{C}_3 \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{C}_1 \bar{v}_s \cdot \nabla T + \bar{C}_2 \bar{v}_w \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\bar{\lambda} \nabla T) - \bar{\beta} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - n_w \frac{\partial p_w}{\partial T} T \nabla \cdot \bar{v}_w - \nabla \cdot \left( (n_s \sigma'_s + n_i \sigma'_i) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) + L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t}. \quad (3)$$

式中 左边第 2 项、第 3 项分别表示土骨架、未冻水的流动对能量方程的影响(对流项); 右边第 1 项为传导项, 第 2 项为单元体热胀冷缩效应所做的功, 第 3 项为未冻水的孔隙水压力变化时所做的功; 第 4 项为单元体的应变能, 第 5 项为相变潜热。 $\bar{v}_s$  为冰的变形速率,  $\sigma'_i$  为冰项压力,  $\bar{u}$  为单元体的变形,  $L$  为水的相变潜热;  $\bar{C}_1$  为冻土中固体相的等效热容,  $\bar{C}_1 = n_s \rho_s C_s + n_i \rho_i C_i$ ,  $\bar{C}_2$  为未冻水的等效热容为  $\bar{C}_2 = n_w \rho_w C_w$ , 冻土的等效热容  $\bar{C}_3 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$ ; 固体相的等效热胀冷缩系数为  $\bar{\beta} = n_s \beta_s + n_i \beta_i$ ;  $\bar{\lambda} = n_s \lambda_s + n_i \lambda_i + n_w \lambda_w$  (其中,  $n_s$ ,  $n_i$ ,  $n_w$  分别为土粒、冰和未冻水的体积含量,  $C_i$ ,  $C_s$ ,  $C_w$  分别为土粒、冰和未冻水的热容,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_i$ ,  $\lambda_w$  分别为土粒、冰和未冻水的热传导系数)。

## 2 模型简化

### 2.1 Claperyon 方程的引入

负温条件下未冻水含量对于冻土体的物理、化学和力学特性是至关重要的。因此对前述三场耦合模型求解的关键在于确定冻结区水分迁移情况。本文假定冻结区未冻水的能量状况可通过水压力、渗吸势、冰压力、温度和融化热焓的 Clapeyron 方程来描述, 即

$$\frac{p_w}{\rho_w} - \frac{p_i}{\rho_i} = L \ln \frac{T}{T_0} + \frac{\pi}{\rho_w}, \quad (4)$$

式中,  $\pi$  为渗吸力, B. D. Kay 等<sup>[15]</sup>指出: 在没有约束的条件下, 基于平衡态, 让  $p_i$  等于零(即大气压下), 式(4)应用的正确性是无疑的。然而, 如果土体有约束且有外荷载的条件下, 则土固体颗粒、冰和液相水间的应力分布需要确定之。考虑到在一般的寒区岩土工程中的外荷约束较小, 以至于对土 - 水系统的作用可忽略不计, 以绝对温度  $T_0$  为参考点, 液相压力可表示为

$$dp_w = \frac{L \rho_w}{T_0} dT = \beta dT, \quad (5)$$

其中,  $\beta = \frac{L \rho_w}{T_0} \approx 1220 \text{ kPa/}^\circ\text{C}$ ,  $T_0$  为  $0^\circ\text{C}$  的绝对温度 (273 K)。

根据式(5), 式(4)可以简化为

$$p_w = \frac{\rho_w}{\rho_i} p_i + \frac{L \rho_w}{T_0} T = 1.09 p_i + \beta T, \quad (6)$$

$$\text{即有 } p_i = \frac{1}{1.09} p_w - \frac{\beta}{1.09} T \approx p_w - \beta T, \quad (7)$$

将式(7)代入式(1)式可得

$$\nabla \sigma'_s + \nabla p_w - \rho X = (1 - \chi) \beta \nabla T, \quad (8)$$

未冻水压力表示为

$$p_w = p_{wf} + \tilde{p}_w,$$

式中,  $p_{wf}$  为温度梯度下水分驱动力,  $\tilde{p}_w$  为冻土体发生变形时使土体内的水分受压或受拉而产生的超孔隙水压力, 简称为超孔隙水压力或固结孔压。

## 2.2 连续性方程简化

根据冻土体的各相成分体积分量变形协调条件, 可得

$$\frac{\partial n_{wi}}{\partial t} = \frac{\rho_i}{\rho_w} \left[ \left( 1 + \frac{n_i}{n_s} \right) \dot{n}_i + \frac{n_i}{n_s} \dot{n}_w \right] = - \frac{\rho_i}{\rho_w} \left[ \left( 1 + \frac{n_i}{n_s} \right) \dot{n}_s \right] + \dot{n}_w, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{n_{s0}}{n_s} - 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{n_{s0}}{n_s^2} \dot{n}_s. \quad (11)$$

式中  $n_s$ ,  $n_w$ ,  $n_i$  分别为土颗粒、未冻水、冰的体积分量;  $\dot{n}_s$ ,  $\dot{n}_w$ ,  $\dot{n}_i$  分别为土颗粒、未冻水、冰的体积分量变化速率。 $n_{s0}$  为初始土颗粒体积分量。

把式 (9) ~ (11) 代入式 (2), 得

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} \dot{n}_s = \nabla \cdot \bar{v}_w + \frac{\Delta \rho}{\rho_w} \dot{n}_w, \quad (12)$$

式中,  $\bar{\rho}_s = \rho_w \frac{n_{s0}}{n_s^2} - \Delta \rho \left( 1 + \frac{n_i}{n_s} \right)$ , 或

$$\bar{C}_4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v}_w + \frac{\Delta \rho}{\rho_w} \dot{n}_w = 0, \quad (13)$$

式中,  $\bar{C}_4 = 1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_w} \left( 1 + \frac{n_i}{n_s} \right) \frac{n_s^2}{n_{s0}^2}$ ,  $\Delta \rho = \rho_w - \rho_i$ 。

## 2.3 能量方程的简化

耦合模型中能量方程是一个高度的非线性方程, 这给模型的数值求解及相应程序编制带来极大的困难, 结合相关理论及寒区工程的实际特点, 对其进行简化处理是十分必要的。

根据热传导和质量迁移理论, 若不考虑土中水汽蒸发耗能和其他化学势的作用, 仅考虑水分迁移和冰水相变问题, 并且据 Nixon<sup>[16]</sup>和 Guyman 等<sup>[17]</sup>, Taylor 等<sup>[18]</sup>的研究, 传导项比对流项大 2~3 个数量级, 对流项的作用忽略不及, 并不考虑未冻水的可压缩性以及土骨架和冰的热胀冷缩效应, 则冻结过程的温度场方程可以简化为

$$\bar{C}_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\lambda} \nabla^2 T - \nabla \cdot \left[ (n_s \sigma'_s + n_i p_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right] + L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t}, \quad (14)$$

将式 (9)、式 (12) 代入式 (14) 可得

$$\bar{C}_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\lambda} \nabla^2 T - \nabla \cdot \left[ (n_s \sigma'_s + n_i p_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right] + L \frac{\rho_i^2}{\rho_s} \frac{n_{s0}}{n_s^2} \dot{n}_w - L \frac{\rho_i^2}{\rho_s} \left( 1 + \frac{n_i}{n_s} \right) \nabla \cdot \bar{v}_w, \quad (15)$$

考虑到冻结过程中含水率  $n_w$  是温度  $T$  的函数, 即

$$\frac{\partial n_w}{\partial t} = \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (16)$$

把式 (16) 代入式 (15), 得

$$\left( \bar{C}_3 + \bar{C}_6 \frac{\partial n_w}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\lambda} \nabla^2 T + \bar{C}_5 \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 p_w - \nabla \cdot \left[ (n_s \sigma'_s + n_i p_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right], \quad (17)$$

其中,  $\bar{C}_5 = L \frac{\rho_i^2}{\rho_s} \left( 1 + \frac{n_i}{n_s} \right)$ ,  $\bar{C}_6 = L \frac{\rho_i^2}{\rho_s} \frac{n_{s0}}{n_s^2}$ 。

把式 (5) 代入式 (17) 可得

$$\left( \bar{C}_3 + \bar{C}_6 \frac{\partial n_w}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = (\bar{\lambda} + \bar{C}_5 \frac{k_f \beta}{\gamma_w}) \nabla^2 T - \nabla \cdot \left[ (n_s \sigma'_s + n_i p_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]. \quad (18)$$

## 2.4 简化的控制微分方程

式 (8)、(12)、(17) 便构成了简化的控制微分方程, 即

$$\begin{cases} \nabla \sigma'_s + \nabla \tilde{p}_w - \rho X = -\nabla p_{wf} + (1 - \chi) \beta \nabla T \\ C_4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 \tilde{p}_w = \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 p_{wf} - \frac{\Delta \rho}{\rho_w} \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \left( \bar{C}_3 + \bar{C}_6 \frac{\partial n_w}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = (\bar{\lambda} + \bar{C}_5 \frac{k_f \beta}{\gamma_w}) \nabla^2 T - \nabla \cdot \left[ (n_s \sigma'_s + n_i p_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right] \end{cases}. \quad (19)$$

## 3 冻土本构关系

饱和土体的非线性应力 - 应变关系假定为

$$\{\sigma'\} = [E] \left( \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} \right), \quad (20)$$

式中,  $\{\varepsilon_0\}$  为考虑非线性时的土体的初应变,  $[E]$  表示应力 - 应变关系的弹性矩阵。

假定土体符合线弹性本构关系,

$$\begin{cases} \sigma'_x = E_1 \varepsilon_x + E_2 \varepsilon_y \\ \sigma'_y = E_2 \varepsilon_x + E_1 \varepsilon_y \\ \tau_{xy} = E_3 \gamma_{xy} \end{cases}, \quad (21)$$

$$E_1 = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = E_2 + 2E_3, \quad E_2 = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)},$$

$$E_3 = \frac{E}{2(1 + \mu)} = G, \quad E \text{ 为弹性模量, } G \text{ 为剪切模量, } \mu$$

为泊松比。

## 4 三场耦合控制微分方程

根据式 (19) 建立的控制微分方程, 并加上土体的本构关系式 (21), 可建立的最终饱和冻土三场耦合控制微分方程为

$$\begin{cases} E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (E_2 + E_3) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\tilde{p}_w + p_{wf})}{\partial x} + \rho X_x = -(1-\chi)\beta \frac{\partial T}{\partial x} \\ E_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (E_2 + E_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\tilde{p}_w + p_{wf})}{\partial y} + \rho X_y = -(1-\chi)\beta \frac{\partial T}{\partial y} \\ \bar{C}_4 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial(u+u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v+v_a)}{\partial y} \right) - \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 (\tilde{p}_w + p_{wf}) = -\frac{\Delta \rho}{\rho_w} \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \left( \bar{C}_3 + \bar{C}_6 \frac{\partial n_w}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \left( \bar{\lambda} + \bar{C}_5 \frac{\beta k_f}{\gamma_w} \right) \nabla^2 T - \nabla \left( \sigma_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (22)$$

上式的推导中, 把总变形 ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ) 分成两部分: 附加变形 ( $u_a$ ,  $v_a$  及  $\varepsilon_a$ ) (即由于土体内产生了水分迁移和水相变成冰体积发生膨胀而造成的变形) 和力学变形 ( $u$ ,  $v$ ) (即产生力学效应的变形, 也是总变形中扣除附加变形的剩余变形)。两者的关系式为

$$\begin{cases} \bar{u} = u + u_a \\ \bar{v} = v + v_a \end{cases}, \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (22) 得

$$\begin{cases} E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (E_2 + E_3) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho X_x = \beta \frac{\partial T}{\partial x} \\ E_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (E_2 + E_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho X_y = \beta \frac{\partial T}{\partial y} \\ \bar{C}_4 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial(u+u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v+v_a)}{\partial y} \right) - \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 (\tilde{p}_w + p_{wf}) = -\frac{\Delta \rho}{\rho_w} \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \left( \bar{C}_3 + \bar{C}_6 \frac{\partial n_w}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \left( \bar{\lambda} + \bar{C}_5 \frac{\beta k_f}{\gamma_w} \right) \nabla^2 T - \nabla \left( \sigma_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (24)$$

根据附加变形和力学变形的物理意义, 可把冻土体的连续性方程写为

$$\begin{cases} \bar{C}_4 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 \tilde{p}_w = 0, \\ \bar{C}_4 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 p_{wf} - \frac{\Delta \rho}{\rho_w} \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \end{cases} \quad (25)$$

用总变形表达的控制微分方程为

$$\begin{cases} E_1 \frac{\partial^2 (\bar{u} - u_a)}{\partial x^2} + E_3 \frac{\partial^2 (\bar{u} - u_a)}{\partial y^2} + (E_2 + E_3) \frac{\partial^2 (\bar{v} - v_a)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\tilde{p}_w + p_{wf})}{\partial x} + \rho X_x = -(1-\chi)\beta \frac{\partial T}{\partial x} \\ E_3 \frac{\partial^2 (\bar{v} - v_a)}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 (\bar{v} - v_a)}{\partial y^2} + (E_2 + E_3) \frac{\partial^2 (\bar{u} - u_a)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\tilde{p}_w + p_{wf})}{\partial y} + \rho X_y = -(1-\chi)\beta \frac{\partial T}{\partial y} \\ \bar{C}_4 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{k_f}{\gamma_w} \nabla^2 (\tilde{p}_w + p_{wf}) = -\frac{\Delta \rho}{\rho_w} \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \left( \bar{C}_3 + \bar{C}_6 \frac{\partial n_w}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \left( \bar{\lambda} + \bar{C}_5 \frac{\beta k_f}{\gamma_w} \right) \nabla^2 T - \nabla \left( \sigma_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (26)$$

温度影响下水分驱动力  $p_{wf}$ , 可由试验获得,  $n_w = n_w(T, p_i)$  也可根据试验确定; 方程组中, 考虑冻土体的本构关系已知后, 基本的未知量:  $T$ ,  $n_w$ ,  $\tilde{p}_w$ ,  $u$  (或  $v$ ) 4 个变量, 而方程组为 3 个加上未冻水体积含量  $n_w = n_w(T, p_i)$  共 4 个, 因此是一个封闭方程组, 可以求解。

在考虑空间域的有限元离散及时间域的差分离散后, 可得到三场耦合控制微分方程的有限元求解格式。本文在大型岩土工程软件 Final 的基础上, 按以上有限元的解析格式, 开发出了饱和冻土变形场、水分场和温度场全耦合求解的有限元分析软件 3G2011。

## 5 数值分析流程

求解三场耦合问题的有限元方程是一个非常复杂的过程<sup>[19-21]</sup>。必须根据具体的实际过程来确定计算用的有限元网格和计算时步长, 确定好初始条件和边界条件后, 才能求解。本文求解过程的具体步骤如下:

①根据温度场的边界条件求解 Laplace 方程, 得到初始温度场; ②根据初始温度场确定各计算参数 (包括水、热、力参数), 并判断冻结区和未冻区; ③根据初始温度场和边界条件, 假定应变能为零, 求解式 (26) 中的第 4 项, 得到下一时刻的温度场; ④根据此温度场确定各种水、热、力计算参数, 判断冻结区和未冻区; ⑤根据假定的水分驱动力模型, 计算出水分驱动力, 并由此计算由水分驱动力造成的水分迁移, 在加上在本时步长内的水分原位冻胀, 从而利用式 (25) 得到由水分迁移和冰水相变造成的附加变形  $\varepsilon_a$ , 并在由此附加变形确定等效节点力  $\{\Delta F_x^{\varepsilon_a}\}$ ,  $\{\Delta F_y^{\varepsilon_a}\}$ ; ⑥根据边界条件、由附加变形造成的等效节点力, 以及修正后的计算参数, 求解 (26) 式前 3 项, 从而得到冻土体中的孔隙水压场  $p_w$  和总变形场  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ; 根据总变形场和附加变形场 ( $u_a$ ,  $v_a$  或  $\varepsilon_a$ ), 求解冻土体中的应力场  $\sigma'_s$  (或固体相等效力  $\sigma_s$ ); ⑦根据此总变形场、附加变形场和应力场所确定的应变能, 重新求解温度场方程 (26) 第 4 项, 得到新的温度场; ⑧重复第④步至第⑦步, 进行循环迭代直到稳定; ⑨逐时步进行计算, 直到所需时间, 得到整个过程的温度场、水分场和应力场、变形场。

## 6 算例分析

为了检验三场耦合模型的可行性及其有限元解析和程序设计的正确性, 以 E. Penner<sup>[22]</sup>的实验资料为基础进行全面验证。

### 6.1 E. Penner 的室内实验

E. Penner 在研究冻土体内的冰透镜体的形成和发

展情况中,对开放系统中长 10 cm、直径 10 cm 的圆柱体饱水土试验试样,在 50 kPa 的外荷载条件下,进行的由下向上的单向冻结的冻胀试验。分析模型见图 1。

本文借用此实验成果检验所建立的三场耦合模型及开发程序的正确性和数值分析结果的合理性,并进一步把本文的分析成果与 Shen 等<sup>[23]</sup>所采用的 Harlan 修正模型对此实验进行的分析成果及陈飞熊未简化前的分析结果进行了对比分析。

## 6.2 试样土质特性和边界、初始条件

针对该实验的有限元模型及计算分析参数如图 1 和表 1 所示。

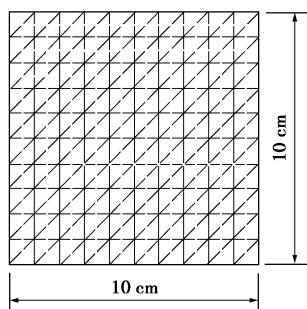


图 1 E. Penner 实验试样的有限元数值分析模型

Fig. 1 FEM mesh

表 1 分析计算热力学参数<sup>[23]</sup>

Table 1 Thermal parameters of soils in calculation<sup>[23]</sup>

成分	参数	
	热容 $C/(J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1})$	传导系数 $\lambda/(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$
土颗粒	$2.2 \times 10^6$	1.95
水	$4.18 \times 10^6$	0.602
冰	$1.93 \times 10^6$	2.22

土体的初始含水率为 0.35。冻土中的未冻水含量与温度的关系,可通过温度用两点法求得<sup>[24]</sup>或冻土中水分迁移的实验研究<sup>[25]</sup>。在本文的分析中采用的未冻水含量与温度的关系为

$$n_w = \begin{cases} 0.35, \dots T \geq -0.11^\circ C \\ 0.104109(-T)^{-0.5564}, \dots T < -0.11^\circ C \end{cases}$$

到目前为止,有关导水系数应力效应的资料很少,因此仅考虑其为温度的函数,利用 Horiguchi 等<sup>[26]</sup>的实验资料,可有

$$k = \begin{cases} 3.072 \times 10^{-11} e^{13.438T}, \dots T > 0.3^\circ C \dots \\ 3.453 \times 10^{-13}, \dots T \leq -0.3^\circ C \end{cases}$$

$k$  的单位为 m/s。

未冻土的杨氏模量取为 11.2 MPa<sup>[27]</sup>。冻土的应力应变关系仍假定为线弹性关系,并把冻土体的等效杨氏模量参照 Zhu 等<sup>[28]</sup>的实验结果假定为

$$E_0 = 4 \times 10^2 |T|^{0.636},$$

冻土和未冻土的泊松比均取为 0.3。

温度场的初始条件、边界条件如下:土体顶部为上边界,为暖端;底部为下边界,为冷端,土体进行由下向上的冻结。温度的边界条件如图 2 所示。为了模拟冻结试验前试样的初始状态,本文把时间  $t=0$  时刻时的上边界和下边界温度作为初始边界温度,利用初始边界温度条件和计算区域土体的热参数及其它特性参数求解 Laplace 方程,求得计算区域温度场的估计值,修正参数,再求解此 Laplace 方程,直至最终稳定的温度场作为初始温度场。

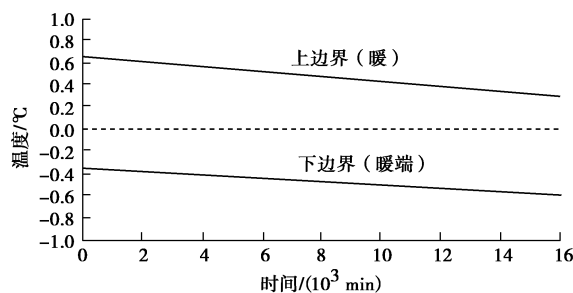


图 2 温度边界条件

Fig. 2 Boundary conditions of temperature

水分场的边界条件为:土体内为饱和土体,当土体冻结时,不但土体内水分进行迁移,而且有外界(从暖端)的水分进行补给。

变形场的边界条件:土体底部为约束边界,土体的左右两侧为法向位移约束,顶部为自由位移边界。

## 6.3 分析结果

冻结深度(温度为  $0^\circ C$  的深度)随时间的关系曲线如图 3 所示。由图 3 可见,在模拟冻结深度上,本文所分析的计算值较 Shen 等<sup>[23]</sup>的计算值好,更接近于实验成果,略小于陈飞熊的分析结果。

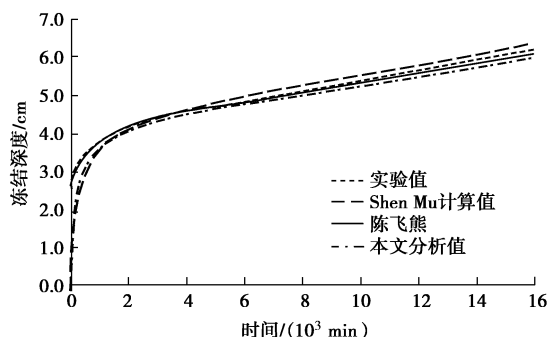


图 3 不同冻结时刻下试样的冻结深度

Fig. 3 Freezing depths at different time

7000, 16000 min 时沿深度上的温度分布曲线见图 4,由图可见,随着时间的发展,温度逐渐下降,冻结深度逐渐向上发展,由本模型分析的计算值与实验值吻合得相当好。土体内沿深度上的温度分布从

2000 min 起,基本上是呈直线分布。

冻胀量随时间的关系曲线如图 5 所示。从图 5 可看出,分析的冻胀量符合冻胀规律,分析的成果与实测值基本吻合。本文分析成果与 Shen 等<sup>[23]</sup>的分析成果相比,从冻胀量的绝对值来看较 Shen 等<sup>[23]</sup>的分析成果为差,但从冻胀量的发展规律上来看,较 Shen 等<sup>[23]</sup>的分析成果为好,同陈飞熊的分析结果规律一致。在 7000, 16000 min 时的变形场如图 6 所示。由图可见,冻胀量随时间的变化,初始阶段分析计算值明显小于实测值,并随时间的发展,差值逐渐变大,随后又逐渐缩小,最终基本保持稳定,与工程经验相吻合。

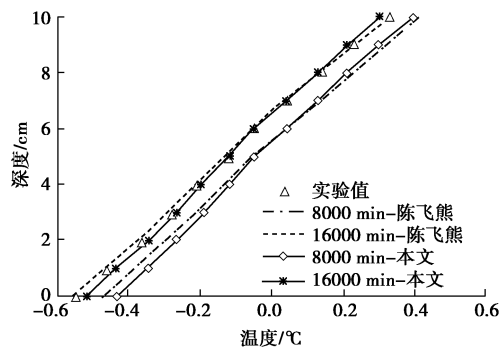


图 4 试样沿深度上的温度分布曲线

Fig. 4 Distribution of temperature along depth

取土的干重度为  $1750\text{ kg/m}^3$ , 可得到在 7000, 14000 min 时沿深度上的水分分布曲线 (图 7, 8)。从图中可见,本文的分析值普遍较 Shen Mu 的为小,分布的规律基本一致,略小于陈飞熊的分析结果,但规律基本一致。随着冻深的增加,在冻结前沿附近总含水率达到最大值。

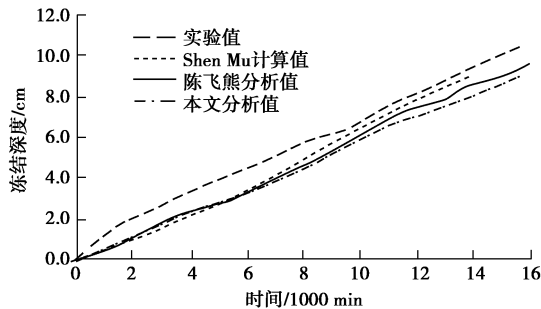


图 5 冻胀量随时间的变化曲线

Fig. 5 Variation of heave deformation with time

冻结过程中,土体的应力场(扣除了初始的 50 kPa 的均匀外荷载的影响)如图 9 所示。在冻结前,土体内的应力状态呈均匀分布。当土体发生部分冻结后,由水变成冰和未冻区的水分向冻结区迁移,引起冻土层体积膨胀,改变了土体中的应力状态。水分迁移对应力的影响主要发生在冻结区,而在未冻区,由于没有水分在此聚集,因此土体内的应力状态没有发生变化。

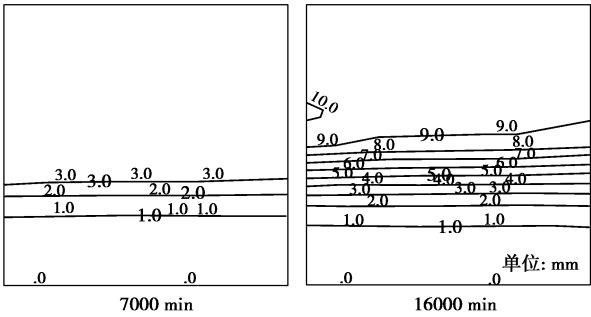


图 6 不同时刻下试样的冻胀变形场

Fig. 6 Heave displacement fields at 7000 and 16000 min

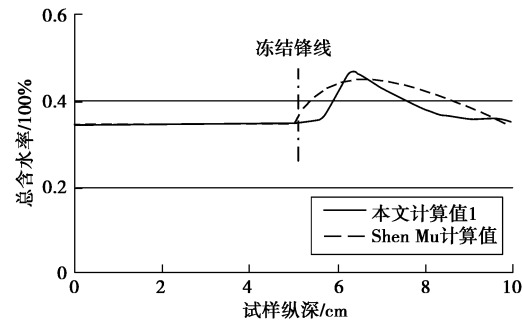


图 7 试样冻结 7000 min 时的含水率分布曲线

Fig. 7 Distribution of moisture along depth at 7000 min

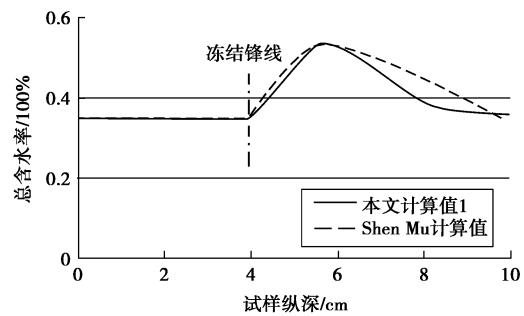


图 8 试样冻结 14000 min 时的含水率分布曲线

Fig. 8 Distribution of moisture along depth at 14000 min

随着时间的推移,冻结深度逐渐向上发展,冻结区也逐渐向上扩大,发生的应力扰动区也逐渐向上扩大,相应的应力值也逐渐增大。通过图 7, 8 的水分场和图 9 的应力场的对比分析可见,应力场和水分场的变化是完全协调的,含水率大的地方冻胀量大,相应

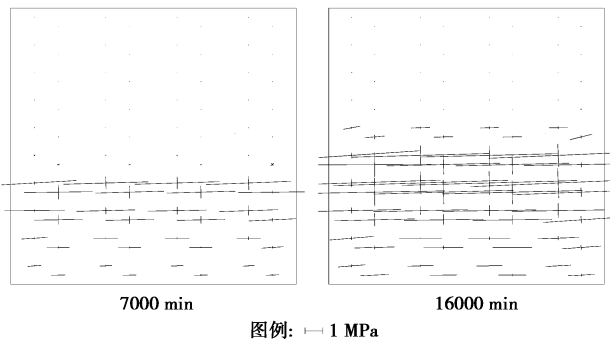


图 9 不同冻结时刻下试样的冻胀应力场

Fig. 9 Heave stress fields at 7000 and 16000 min

的冻胀应力也就大。由于试样顶部是自由的,而侧面是刚性约束的,所以,冻胀应力主要表现为侧向应力,而垂向应力则由于试样的垂向自由冻胀而释放。

## 7 结 论

(1) 通过引入 Clapeyron 方程描述温度梯度对水分迁移的影响,并从工程实用化角度出发对耦合模型进行了简化处理,建立了实用化的寒区饱和土温度场、水分场、变形场耦合数值模型,并在大型有限元分析平台 Final 上开发了相关程序。

(2) 利用开发的饱和冻土三场耦合程序进行了经典算例分析,分析成果与 E. Penner 的实验资料以及 Shen Mu 等人的模拟分析成果的对比表明:①模拟的试样在冻结过程中温度场的变化规律与室内试验结果一致;②分析得到的冻结过程中试样由于水分迁移引起的冻胀变形规律也与室内试验结果较吻合;且量值上也保持了 80%左右的精度,大部分数据点比 Shen Mu 的分析结果更接近于实验结果;③在冻结过程中冻结锋面附近的水分剧烈迁移区,分析结果与 Shen Mu 等人的分析结果基本一致,虽然当前尚无试验结果对比,但其分布规律与工程经验相吻合。

(3) 简化后的分析结果较陈飞熊的分析结果略小,但分布规律基本一致,能够很好的反应土体的冻胀规律,验证了简化正确性。同原模型相比简化后的模型相关参数少、计算速度快、适用性更强。

## 参考文献:

- [1] 李 宁,程国栋,徐学祖. 冻土力学的研究进展与思考[J]. 力学进展, 2001, 31(1): 95 - 102. (LI Ning, CHENG Guo-dong, XU Xue-zu. The advance and review on frozen soil Mechanics[J]. Advance in Mechanics, 2001, 31(1): 95 - 102. (in Chinese))
- [2] CHEN X B, WANG Y Q. Frost heave prediction for clayey soils[J]. Cold Region Science and Technology, 1988, 15(3): 233 - 238.
- [3] GUYMON G, BERG R, HROMADKA T. Mathematical model of frost heave and thaw settlement in pavements[R]. USA Cold Regions Research and Engineering Lab, 1993.
- [4] NIXON J F. Discrete ice lens theory for frost heave in soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1991, 28: 843 - 859.
- [5] SHENG Dai-chao. Thermodynamics of freezing soils-theory and application[D]. Sweden: Lulea University of Technology.
- [6] 苗天德,郭 力,牛永红,等. 正冻土中水热迁移问题的混合物理理论模型[J]. 中国科学 D 辑, 1999, 42(增刊): 8 - 14. (MIAO Tian-de, GUO Li, NIU Yong-hong, et al. Thermodynamic model of heat-moisture migration in saturated freezing soil with mixture theory[J]. Sciences in China (Series D), 1999, 42(S0): 8 - 14. (in Chinese))
- [7] 郭 力,苗天德. 饱和正冻土中水热迁移的热力学模型[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 87 - 91. (GUO Li, MIAO Tian-de. Thermo dynamic model of heat-moisture migration in saturated freezing soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5): 87 - 91. (in Chinese))
- [8] DUQUENNOI C, FREMOND M. Modelling of thermal soil behavior[J]. VTT Symposium 94. 1989, 2: 895 - 915.
- [9] FREMOND M, MIKKOLA M. Thermomechanical modelling of freezing soil[C]// Proceedings of the Sixth International Symposium on Ground Freezing, Rotterdam. A.A. Balkema, 1991: 17 - 24.
- [10] 张玉军. 核废料处置概念库近场热-水-应力耦合二维有限元模拟[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(9): 1053 - 1058. (ZHANG Yu-jun. 2D FEM simulation for coupled thermo-hydro-mechanical processes of near field in conceptual nuclear waste repository[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(9): 1053 - 1058. (in Chinese))
- [11] 许 强,彭功生,李南生,等. 土冻结过程中的水热力三场耦合数值分析[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005, 33(10): 1281 - 1285. (XU Qiang, PENG Gong-sheng, LI Nan-sheng, et al. Numerical method of phase-change field of temperature coupled with moisture, stress in frozen soil[J]. Journal of Tongji University (Nature Science), 2005, 33(10): 1281 - 1285. (in Chinese))
- [12] 陈 波,李 宁,嵇瑞花. 土冻结过程中的水热力三场耦合数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(4): 467 - 472. (CHEN Bo, LI Ning, ZHUO Rui-hua. Coupling numerical analysis of Thermo-hydro-mechanical of the frozen process of soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(4): 467 - 472. (in Chinese))
- [13] 陈飞熊,李 宁,程国栋. 饱和正冻土多孔多相介质的理论构架[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 213 - 217. (CHEN Fei-xiong, LI Ning, CHENG Guo-dong. The theoretical frame of multi-phase porous medium for the freezing soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2): 213 - 217. (in Chinese))
- [14] 陈飞熊. 饱和正冻土温度场、水分场和变形场三场耦合理论框架[D]. 西安: 西安理工大学, 2001. (CHEN Fei-xiong. The fully coupled modeling of the Thermal-moisture-deformation behavior for the saturated freezing soils[D].

- Xi'an: Xi'an University of Technology, 2001. (in Chinese))
- [15] KAY B D, PERFECT E. State of the art: Heat and mass transfer in freezing soils[C]// Proc of 5th International Symposium on Ground Freezing, Nottingham, UK, 1988.
- [16] NIXON J F. Field frost heave predictions using the segregation potential concept[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1982, **19**: 526 - 529.
- [17] GUYMON G, BERG R, HROMADKA T. A one-dimensional frost heave model based upon simulation of simultaneous heat and water flux[J]. Cold Regions Science and Technology, 1980, **3**: 253 - 263.
- [18] TAYOR G S, LUTHIN J N. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, **15**: 548 - 555.
- [19] 李洪升, 刘增利. 冻土水热力耦合作用的数学模型及数值模拟[J]. 力学学报, 2001, **33**(5): 622 - 629. (LI Hong-sheng, LIU Zeng-li. Mathematical model for coupled moisture, heat and stress field and numerical simulation of frozen soil[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2001, **33**(5): 622 - 629. (in Chinese))
- [20] 宁建国, 朱志武. 含损伤的冻土本构模型及藕合问题数值分析[J]. 力学学报, 2007, **39**(1): 70 - 76. (NING Jian-guo, ZHU Zhi-wu. Constitutive numerical model of frozen soil with damage and simulation of the coupled problem[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, **39**(1): 70 - 76. (in Chinese))
- [21] LAI Yuan-ming, WU Zi-wang, ZHU Yuan-lin. Nonlinear analysis for the coupled problem of temperature and seepage fields in cold region tunnels[J]. Cold Regions Science and Technology, 1999(29): 89 - 96.
- [22] PENNER E. Aspects of ice lens growth in soils[J]. Cold Regions Science and Technology, 1986, **13**: 91 - 100.
- [23] SHEN Mu, LADANYI B. Modelling of coupled heat, moisture and stress field in freezing soil[J]. Cold regions Science and Technology, 1987, **14**: 237 - 246.
- [24] XU Xue-zu, OLIPHANT J L, TICE A R. Prediction of unfrozen water contents in frozen soils by a two-points or one-point method[C]// Proc 4th Int Symp on Ground Freezing, Sapporo, Japan, 1985, **2**: 83 - 87.
- [25] 徐学祖, 邓友生. 冻土中水分迁移的实验研究[M]. 北京: 科学出版社, 1991. (XU Xue-zu, DENG You-sheng, Experimental research on heat-moisture migration in freezing soil[M]. Beijing: Science Press, 1991. (in Chinese))
- [26] HORIGUCHI K L, MILLER R D. Hydraulic conductivity functions of frozen materials[C]// Proc 4th Int Conf on Permafrost, Alaska, USA, 1983.
- [27] LAMBE T W, WHITMAN R V. Soil mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1969.
- [28] ZHU Yuan-lin, CARBEE D L. Uniaxial compressive strength of frozen silt under constant deformation rates[J]. Cold Regions Science Technology, 1984, **9**: 13 - 15.