

土岩组合地层旋喷桩止水桩锚支护基坑变形与受力数值分析

刘红军, 于雅琼, 王秀海

(中国海洋大学, 山东 青岛 266100)

摘要: 利用基于有限元原理的设计计算软件 Plaxis 对青岛三星数码大厦基坑工程进行数值模拟计算, 其地表水平位移的计算结果与实测数值吻合较好。并通过对模拟得到的基坑与支护结构的变形结果如基坑总位移、灌注桩水平位移和基坑周边地表沉降以及支护结构的内力分布情况如灌注桩剪力、轴力、弯矩和锚杆内力进行分析发现预应力锚杆能够明显地改变土体中的应力分布, 对基坑变形有很好的约束作用。说明在土岩二元结构地层条件下, 支护结构的变形主要产生于岩面以上, 采用桩锚支护结构是可行的, 用 Plaxis 进行基坑模拟可以用来作为深基坑设计、施工的辅助工具。

关键词: 土岩组合地层; 桩锚支护; 有限元; 基坑

中图分类号: TU473 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2012)S0-0297-06

作者简介: 刘红军(1966-), 男, 江苏靖江人, 中国海洋大学教授, 博导, 主要从事环境岩土工程的教学科研工作。

E-mail: hongjun@ouc.edu.cn。

Deformation and force analysis of pile anchor for soil-rock dualistic structure based on finite element theory

LIU Hong-jun, YU Ya-qiong, WANG Xiu-hai

(Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: The calculated results by using the finite element software, Plaxis, are adopted to simulate the excavation of Samsung Digital Building in Qingdao, which are coincident well with the test data. Through the analysis of the deformation of excavation and the distribution of internal force on supporting structure, it is proved that the deformation above the rock is more obvious, and the prestressed anchor bar is effective in changing the stress distribution in the soil and protecting the foundation from evident displacement. It is effective to use pile anchor in soil-rock dualistic structure. It is helpful to use the Plaxis for the design and construction of excavations.

Key words: soil-rock dualistic structure; pile anchor; finite element; excavation

0 引言

城市基坑所处地质及环境日趋复杂, 若设计施工不合理, 会造成基坑位移过大, 导致坑周土体产生较大沉降、临近建筑及道路开裂下沉、地下管网破坏等严重后果^[1]。基坑支护结构与土体相互作用是一个机理复杂的力学过程^[2]。传统的桩锚支护体系设计方法存在缺陷, 例如等值梁法等, 不考虑土体变形条件, 只作稳定分析^[3]。而采用有限元法对桩锚支护体系进行数值模拟和分析, 充分考虑到土的非线性和开挖方式的影响、支护结构与土体的共同作用和变形协调特性, 可以更全面准确的分析问题。本文应用平面弹塑性有限元理论, 借助有限元设计计算软件 Plaxis, 对

青岛三星数码大厦深基坑的开挖与支护施工进行了数值模拟计算, 据此分析了在典型土岩二元结构下基坑各开挖深度下的土体的位移及桩体、锚杆的受力状态, 并比较了基坑顶部边缘计算与实测的位移值, 认为采用桩锚支护体系是合理有效的。

1 工程概况

1.1 场地概况

青岛三星数码大厦工程场区位于青岛市李沧区, 书院路、古镇路、京口路包围的三角地带。拟建物为

表1 岩土物理力学性质

Table 1 Physico-mechanical properties of rock and soils

编号	地层名称	层厚/m	天然重度 $\gamma_{\text{unsat}}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	饱和重度 $\gamma_{\text{sat}}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	水平渗透系数 $k_x/(\text{m}\cdot\text{d}^{-1})$	竖向渗透系数 $k_y/(\text{m}\cdot\text{d}^{-1})$	弹性模量 $E_{\text{ref}}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	泊松比 ν	黏聚力 $c_{\text{ref}}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	内摩擦角 $\phi/(^{\circ})$
1	素填土	2.0	18.0	20.0	0.07	0.70	1.3×10^4	0.4	10	20
2	粉质黏土	4.5	19.0	19.6	0.01	0.01	1.0×10^4	0.34	26	10
3	粗砂	3.5	18.0	20.0	10.0	10.00	2.5×10^4	0.30	10	35
4	砾砂	3.5	20.0	21.0	8.0	8.00	3.0×10^4	0.35	10	35
5	强风化岩	2.0	23.0	23.0	6×10^{-5}	6×10^{-5}	4.5×10^4	0.28	30	45
6	中风化岩	2.5	25.0	26.0	3×10^{-5}	3×10^{-5}	6.0×10^6	0.25	70	55
7	微风化岩		27.0	28.0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	2.0×10^7	0.22	100	70

三幢24~27层的高层商住楼,设计3层联体地下车库。基坑工程地下室边界面积约9980 m²,基坑开挖支护深度16.5 m。基坑环境平面图如图1所示。



图1 基坑环境平面图
Fig. 1 Plan of excavation

1.2 工程水文地质条件

场区地形平坦,地面标高16.0~17.0 m。钻探揭露岩土层层序清晰,第四系厚度较平均,最大厚度约15 m,为全新统人工填土、洪冲积层与上更新统洪冲积层,基岩为燕山晚期花岗岩与后期侵入的煌斑岩岩脉,基岩面总体较平缓。岩土物理力学性质如表1所示。地下水类型为第四系空隙潜水至弱承压水,潜水稳定水位埋深0.4~1.6 m,承压水稳定水位埋深1.3~1.5 m,年水位变幅约2 m。

1.3 基坑支护概况

根据场地下部为基岩,很难嵌岩的这种工程地质条件,考虑现有的技术和设备以及基坑支护工程造价,支护桩嵌入岩层的深度是有限的,再结合周边环境的要求、工期以及经济性,研究设计方案最终采用小直径浅嵌灌注桩,5道锚杆,单排旋喷桩。该方案桩径小、入岩浅,单排旋喷桩止水,能满足工程需要,经济合理,锚杆设置考虑外力因素,安全度较高。典型设计剖面图如图2所示。

2 弹塑性分析理论

2.1 PLAXIS程序介绍

Plaxis程序^[4]是由荷兰开发的专门用于分析岩土工程变形和稳定性的大型有限元计算程序。该程序界面友好,建模简单,能自动进行网格剖分,用于分析土的本构模型有线弹性、理想弹塑性模型、软土模型、硬化模型和软土流变模型,可模拟施工步骤进行多步计算。

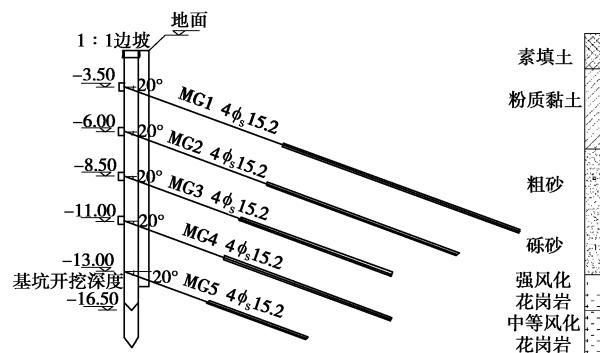


图2 基坑桩锚支护断面图
Fig. 2 Section of pile-anchor system

2.2 土体模型

土是一种极为复杂的复合体,具有极为复杂的力学行为。尽管土的线性模型和非线性弹性模型(如邓肯-张模型)用得较多,但众所周知,土体在外力的作用下,不仅产生弹性变形而且还会产生不可恢复的塑性变形^[5]。本文将土体视为弹塑性体,用弹塑性有限元将更趋向实际情况。

2.3 流动法则

在屈服之后,土体的特性将是部分弹性和部分塑性的。在任一应力增量过程中,其应变的变化假定可分为弹性分量和塑性分量两部分,得

$$d\epsilon_{ij} = (d\epsilon_{ij})_e + (d\epsilon_{ij})_p \quad (1)$$

为了导出塑性应变分量和应力增量之间的关系,假定塑性应变增量与塑性势 Q 的应力梯度成正比,得

$$(d\epsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial Q_{ij}} \quad , \quad (2)$$

式中 $d\lambda$ 为比例常数,称为塑性乘子。塑性势函数 Q

与屈服函数一致。这里

$$Q = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad . \quad (3)$$

2.4 硬化模式

在反复加载的条件下, 土体表现为一定的硬化性质即其帽盖向外扩张^[6]。由于帽盖的参数较敏感且较难确定, 本文将帽盖视为无限远处, 即相当于无帽盖的情况。

3 有限元模型建立及模拟方法

为简化计算, 对有限元模型建立如下假设: ①基坑开挖采用平面应变模型, 土体采用 Mohr-Coulomb 弹塑性模型; ②围护结构视为弹性受力状态, 围护桩体用无厚度弹性板单元模拟; ③桩体施工及开挖引起的土体应力改变不予考虑^[7]。

3.1 模型的建立

利用有限元分析程序 Plaxis 建立基坑桩锚支护的平面应变数值计算模型, 模型长 60 m, 高 40 m。Plaxis 软件提供了 6 节点单元和 15 节点单元两种。15 节点单元比前者的计算精度要高, 在处理复杂问题时能产生更高质量的应力效果, 但是计算所花费的时间长, 文中采用的是 15 节点单元。灌注桩采用 Plaxis 中的板单元模拟, 锚杆采用其中的点对点锚杆单元和土工格栅单元组合模拟, 点对点锚杆单元模拟锚杆的拉杆, 而土工格栅单元模拟注浆体^[8]。网格划分精度选择中等粗糙程度, 鉴于在注浆体周围可能出现应力集中, 对地下连续墙及基坑底部附近的网格进行加密, 这样既能减少计算时间又能得到较为理想的计算结果。在这里对网格进行局部加密, 尽管二维模型不可能精确地模拟应力状态及其与土的作用, 但在假设注浆体相对于土体没有相对滑动的情况下, 可以在总体水平上模拟应力分布和结构的变形及稳定性。几何模型及网格剖分图如图 3。

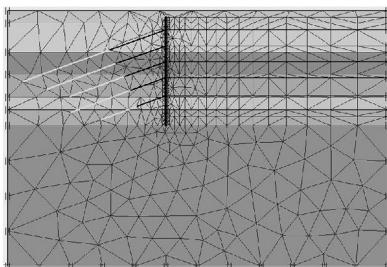


图 3 几何模型及网格剖分图

Fig. 3 Geometrical model and meshes of internal support

3.2 模型参数计算与赋值

(1) 板单元

灌注桩直径 800 mm, 桩净距 400 mm, 混凝土强度等级 C25($E=25 \times 10^9 \text{ Pa}$), 计算公式如下:

$$d = 0.838D \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{t}{D}}} \quad , \quad (4)$$

式中, d 为等效厚度, D 为桩直径, t 为桩净距。

板结构的轴力表示为

$$EA = Edh \quad , \quad (5)$$

式中, E 为板材料的弹性模量, 由混凝土强度等级决定, 本文取 $E=25 \times 10^9 \text{ Pa}$, h 为单位长度, 取 1 m。

板结构的抗弯刚度表示为

$$EI = E \frac{d^3 h}{12} \quad , \quad (6)$$

由以上公式求得板单元参数如表 2。

表 2 板单元特性

Table 2 Physico-mechanical properties of beams

$EA/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	$EI/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	D/m	$w/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{m}^{-1})$	ν
1.465×10^7	4.192×10^5	0.586	17.988	0.200

(2) 点对点锚杆单元和土工格栅

本工程锚杆的杆体类型为 4ΦS15.2, 即适应 4 根直径为 15.2 mm 的钢绞线组成一束作为杆体, 锚杆的轴向刚度 EA 可表示为

$$EA = Ean = E\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 n \quad . \quad (7)$$

式中 E 为钢绞线的弹性模量, 15.2 mm 的钢绞线的弹性模量取 200 GPa; a 为单根钢绞线的截面积; D 为钢绞线的直径, 即 15.2 mm。

注浆体的轴向刚度 EA 可表示为

$$EA = E_1(A_1 - A_2) + E_2 A_2 \quad . \quad (8)$$

式中 E_1 和 E_2 分别为注浆体和钢绞线的弹性模量; A_1 和 A_2 分别为注浆体和钢绞线的横截面积。由以上公式求的点对点锚杆单元和土工格栅单元参数如表 3。

表 3 点对点锚杆单元、土工格栅单元特性

Table 3 Physico-mechanical properties of node-to-node anchor and geotextile

MG1、MG2、 MG3、MG4、 MG5 锚杆 $EA/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	水平间距 $L_{\text{space}}/\text{m}$	Z1、Z2、Z3、 Z4、Z5 注浆体 $EA/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$
1.45×10^5	2.4	1.2 1.0×10^6

3.3 模拟施工过程

该计算剖面的开挖、支护模拟分为 13 个步骤进行: ①基坑放坡至距地面 1.0 m, 放坡比 1:1; ②灌注桩嵌入, 嵌入深度从距地面 1.0 m 到距地面 18.0 m; ③基坑内侧水位降至距地面 3.0 m, 基坑开挖至距地面 3.0 m; ④在距地面 3.0 m 处设置第一道锚杆并施加预应力 100 kN/m; ⑤基坑内侧水位降至距地面 5.5 m, 基坑开挖至距地面 5.5 m; ⑥在距地面 5.5 m 处设置第二道锚杆并施加预应力 100 kN/m; ⑦基坑内侧水位降

至距地面 8.0 m, 基坑开挖至距地面 8.0 m; ⑨在距地面 8.0 m 处设置第三道锚杆并施加预应力 100 kN/m; ⑩在距地面 10.5 m 处设置第四道锚杆并施加预应力 133.3 kN/m; ⑪基坑内侧水位降至距地面 13.3 m, 基坑开挖至距地面 13.3 m; ⑫在距地面 13.3 m 处设置第五道锚杆并施加预应力 266.7 kN/m; ⑬基坑内侧水位降至距地面 16.5 m, 基坑开挖至距地面 16.5 m。

4 计算结果及分析

经程序计算后基坑边形的最终结果输出界面如图 4 所示, 其中位移缩放 100 倍。由计算结果的初步分析可知, 本模型共生成 7557 个节点, 基坑最大总位移量 25.25 mm, 最大水平位移量 24.83 mm, 最大垂直位移量 8.28 mm, 在开挖过程中墙体始终发生了朝基坑一侧的变形, 且变形量随深度增加先增大后减小, 板的最大轴向力 -822.81 kN/m, 最大平面内剪力 598.45 kN/m, 最大弯矩 -551.45 kN/m。

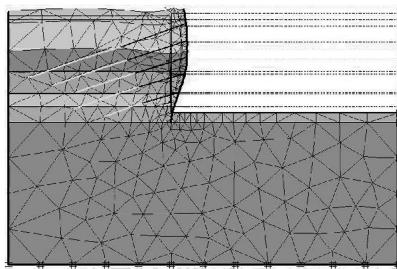


图 4 最终施工步输出界面 (位移缩放 100 倍)

Fig. 4 Final output interface

4.1 计算结果与实测结果对比

现场监测点位于基坑坡顶冠梁处, 对应模型中第 259 号节点, 桩的水平位移计算值与水平位移实测值的对比如图 5 所示。由图可见, 对于基坑坡顶冠梁处的水平位移, Plaxis 数值模拟计算值要略大于实测值, 这是因为实际的基坑是一个空间结构, 存在三维的约束效应, 而模型的建立与计算是在假定完全理想的状态下得到的, 与实际存在差异, 例如, 地下水位下降, 土层会发生进一步固结, 使土的力学参数提高, 因而真实位移会比模拟计算值小^[9]。但在变化趋势与数值大小上, 两者基本吻合, 说明通过 Plaxis 软件建立的模型是可靠的, 其能够对支护结构的变形与受力情况做出较好的预测, 为基坑设计提供有力的依据。

4.2 基坑变形分析

(1) 土体变形概述

施工完成后基坑外侧土体变形情况如图 6 所示。由图 6 可见: 垂直方向上, 基坑外侧土体的最大总位

移发生在基坑深度的一半偏上位置, 与其他地层形式施工时存在明显差异, 这是因为在土岩组合地层条件下, 当灌注桩底部嵌入岩层, 下部岩层由于力学性质高于上部土层, 自稳效果好, 会与支护结构共同产生较好的支护作用; 水平方向上, 基坑外侧土体的总位移随距灌注桩的距离增大而减小。土体最大总位移为 25.25 mm, 土体主要变形为水平位移, 最大值为 24.83 mm。

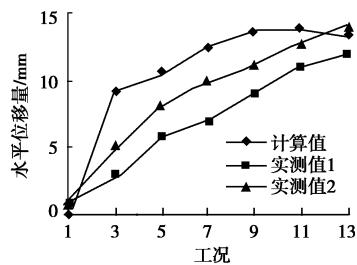


图 5 地表水平位移 - 工况图

Fig. 5 Horizontal displacement of ground surface

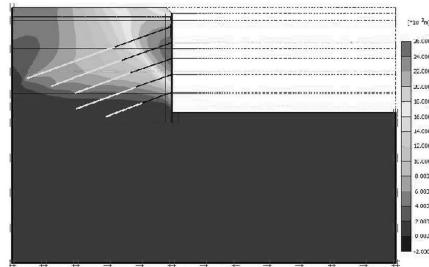


图 6 基坑总位移阴影图

Fig. 6 Total displacement of excavation

(2) 灌注桩变形分析

图 7 为灌注桩随施工工序进行发生的水平位移分析图, 从图 7 中可以看出: ①基坑开挖致使桩体产生向基坑内侧的水平位移, 随施工工序的进行灌注桩的整体水平位移不断增大; ②灌注桩嵌入土体后, 开挖土体以下的桩体部分也将产生水平位移; ③灌注桩的水平位移由桩顶到桩底先增大再减小, 最大位移出现的位置随施工工序的进行逐渐下移, 最终最大位移产生位置固定在距桩顶 5.0 m 处, 值为 25.089 mm; ④灌注桩上部分的整体位移普遍要比下部分的大, 这是由于灌注桩上部为易产生变形的土层, 下部为不易变形的花岗岩层, 下部有较好的自稳效果。

(3) 基坑周边地表沉降

图 8 描述了灌注桩外侧 18 m 内的地表竖向沉降情况, 由图 8 可以发现: 基坑外侧沉降随开挖深度增大而增大, 基坑外侧的最大沉降点并不是位于桩体处, 而是在距基坑 5 m 的地方, 最大竖向沉降值为 8.066 mm。之后随着距桩体距离的增大竖向位移逐渐减小并趋于稳定, 在整个模型范围内的最小竖向沉降为

2.798 mm。

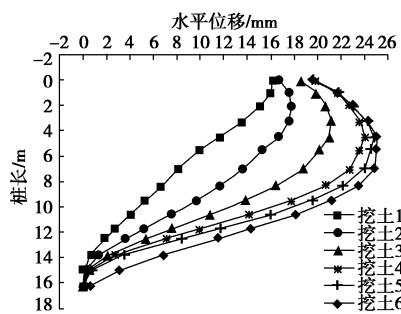


图 7 桩体水平位移

Fig. 7 Horizontal displacement of pile

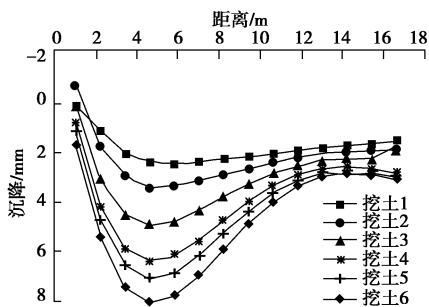


图 8 基坑外侧地表沉降

Fig. 8 Surface settlement outside excavation

4.3 支护结构内力分析

(1) 灌注桩剪力分析

图 9 描述了灌注桩在开挖过程中在土体和锚杆等多重作用下的剪力变化情况, 从图 9 可以看出, 剪力正负值交替出现, 剪力正负值骤变位置与锚杆所在位置大致重合。剪力最大值 822.823 kN/m, 产生于桩 15.5 m 深处。锚杆对灌注桩起到了很好的固定效果。但桩深 15.5 m 处的正负值骤变点并没有施工锚杆, 其产生主要是因为整个基坑开挖至此, 灌注桩嵌入基坑底部以下 1.5 m 的中风化花岗岩岩层, 物理力学性质稳定, 有很强的固定作用, 岩层以上土体压力与岩层对灌注桩的反力相互作用使之产生剪力突变。

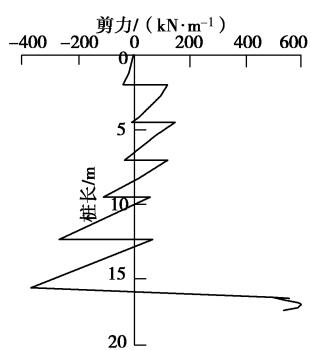


图 9 剪力 - 深度变化曲线

Fig. 9 Shearing force of beam

(2) 灌注桩轴力分析

图 10 描述了灌注桩在开挖过程中在土体和锚杆等多重作用下的轴力变化情况, 从图 10 可以看出, 轴力始终为负值, 轴力大小随桩长呈阶梯型变化, 随着桩深的增大, 轴力大小不断增大, 轴力最大值为 -822.813 kN/m, 产生于桩 15.5 m 深处。轴力随桩深的变化规律与剪力随桩深的变化规律基本一致, 产生阶梯型变化趋势的主要原因是锚杆在施工中起到了有效地固定作用。

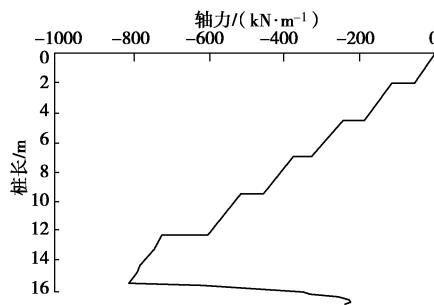


图 10 轴力 - 深度变化曲线

Fig. 10 Axial force of beam

(3) 灌注桩弯矩分析

图 11 描述了灌注桩在开挖过程中在土体和锚杆等多重作用下的弯矩变化情况, 同图 9、图 10 的变化规律类似, 灌注桩弯矩受土岩组合地层固有特性、锚杆作用以及开挖深度的影响, 在锚杆施工位置以及基坑底部位置都有数值上的明显变化。弯矩最大值为 -551.447 (kN·m)/m, 产生于桩 15.7 m 深处。

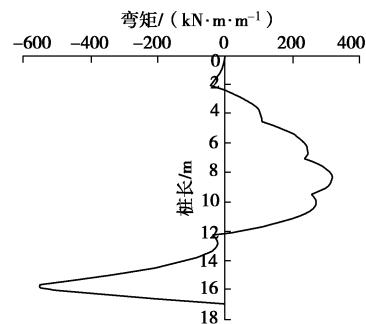


图 11 弯矩 - 深度变化曲线

Fig. 11 Bending moment of beam

(4) 锚杆内力分析

从表 4 可以看出: 锚杆计算内力值均未超过其承载力设计值, 最大值仅达到承载力设计值的 78.6%; 与施加的预应力值相比, 实际计算内力值均有所上升, 最大增幅 70.2%, 故锚杆处于正常工作状态, 能有效发挥作用。

5 结语

(1) 结合青岛三星数码大厦基坑工程的设计、施工与监测, 利用 Plaxis 软件对在土岩二元结构下的单

表 4 锚杆内力参数

Table 4 Physico-mechanical properties of node-to-node anchors

锚杆 编号	锚杆 间距/m	承载力设 计值/kN	施加预应 力/(kN·m ⁻¹)	计算内力值 (kN·m ⁻¹)	占承载力设 计值比例	较预应力 增幅
MG1	2.4	580	100	170.203	70.4%	70.2%
MG2	2.4	530	100	164.836	74.6%	64.8%
MG3	2.4	510	100	164.243	77.3%	64.2%
MG4	2.4	680	133.3	177.935	62.8%	33.5%
MG5	1.2	550	266.7	360.295	78.6%	35.1%

排旋喷桩锚支护方案进行模拟计算分析, 其计算结果与实测数据吻合较好, 证明采用弹塑性有限元模拟深基坑开挖支护的方法是行之有效的, 在分析桩锚支护体系的受力状态以及土体位移情况上能够为基坑设计、施工提供有效地模拟分析作用。采用 Plaxis 进行基坑模拟可以用来作为深基坑设计、施工的辅助工具。

(2) 桩锚支护结构用于土岩组合类型的地层中, 桩体的主要变形产生于基岩面以上的土体部分。

(3) 桩锚支护结构的基坑最大水平位移发生在基坑深度一半偏上的位置, 基坑水平位移呈“上下小中间大”的趋势, 同时, 在基坑外侧会产生水平位移, 呈先增大后减小的趋势, 其最大值并非出现在桩顶处, 而是在距基坑一定距离的地方, 因此在基坑的实际过程中应密切监测基坑周围的地面沉降, 以免对周围建筑物产生影响。

(4) 实践证明, 桩锚支护结构可有效应用于以青岛为特色的土岩组合地层的基坑工程中, 通过对支护结构的内力分析发现预应力锚杆能够明显的改变土体中的应力分布, 对基坑变形有很好的约束作用。

参考文献:

- [1] 向安田, 邓荣贵. 武汉某深基坑锚式连锁灌注排桩变形的有限元分析[J]. 地质灾害与环境保护, 1999, 10(3): 52–56. (XIANG An-tian, DENG Rong-gui. FEM analysis of tiedjogglepile deformation for a deep basal pit in Wuhan[J]. Journal of Geological Hazards and Environment Preservation, 1999, 10(3): 52–56. (in Chinese))
- [2] 刘红军, 张庚成, 刘涛. 土岩组合地层基坑工程变形监测分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(2): 550–553. (LIU Hong-jun, ZHANG Geng-cheng, LIU Tao. Monitoring and analysis of deformation of foundation pits in strata with rock-soil combination[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(2): 550–553. (in Chinese))
- [3] 田树玉. 锚杆式混合支护结构设计方法[J]. 建筑结构学报, 1998, 19(5): 72–77. (TIAN Shu-yu. Design of retaining
- [4] 蔡袁强, 李碧青, 徐长节. 挖深不同情况下基坑支护结构形状研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(1): 28–31. (CAI Yuan-qiang, LI Bi-qing, XU Chang-jie. Characteristics of retaining structures of deep foundation pits under different excavation depths[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(1): 28–31. (in Chinese))
- [5] 王江宏, 王春波, 卢广宁. Plaxis 在深基坑开挖与支护数值模拟中的应用[J]. 山西建筑, 2007, 33(35): 94–95. (WANG Jiang-hong, WANG Chun-bo, LU Guang-ning. Application of PLAXIS to simulation of foundation excavation and support[J]. Shanxi Architecture, 2007, 33(35): 94–95. (in Chinese))
- [6] 李好, 周绪红. 深基坑桩锚支护的弹塑性有限元分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2003, 33(3): 86–89. (LI Hao, ZHOU Xu-hong. Elastic-plastic fem analysis of pile-anchor protection in deep foundation pit[J]. Journal of Hunan University (Natural Science), 2003, 33(3): 86–89. (in Chinese))
- [7] 刘建航, 侯学渊. 基坑工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997. (LIU Jian-hang, HOU Xue-yuan. Manual of excavation engineering[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1997. (in Chinese))
- [8] 王安正, 雷金山. 基坑开挖变形监测及数值仿真分析[J]. 土工基础, 2010, 24(1): 62–66. (WANG An-zheng, LEI Jin-shan. Numerical simulation analysis and deformation monitoring of foundation pit[J]. Soil Engineering and Foundation, 2010, 24(1): 62–66. (in Chinese))
- [9] 李斯海, 张玉军. 深基坑开挖与支护过程的平面有限元模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 1988, 18(13): 342–345. (LI Si-hai, ZHANG Yu-jun. Numerical simulations by 2d FEM in process of excavation and supporting of deep foundation ditch[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1988, 18(13): 342–345. (in Chinese))

(本文责编 明经平)