

# $p-y$ 曲线在基坑工程中的应用

赵 迪<sup>1</sup>, 袁聚云<sup>1,2</sup>, 袁 勇<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 将横向受荷桩的  $p-y$  曲线法应用到深基坑工程中, 提出了一种考虑支护结构和土之间非线性共同作用的弹性地基反力法计算模型, 即对于基坑开挖面以上, 采用根据  $p-y$  曲线建立的支护结构-土非线性共同作用的计算模型; 基坑开挖面以下, 将支护结构看作横向受荷桩, 基坑开挖面以上土体看作超载作用在支护结构上。之后根据弹性地基梁的挠曲微分方程, 推导出考虑非线性共同作用的弹性地基梁挠曲微分方程, 应用有限差分法计算支护桩的内力和位移。

**关键词:**  $p-y$  曲线; 基坑; 计算模型; 非线性共同作用

中图分类号: TU470 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2012)S0-0222-03

作者简介: 赵 迪(1987-), 女, 硕士, 主要从事基坑工程方面的研究。E-mail: didi\_635@sina.com。

## Application of $p-y$ curves in excavation engineering

ZHAO Di<sup>1</sup>, YUAN Ju-yun<sup>1,2</sup>, YUAN Yong<sup>1,2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The  $p-y$  curve method for single pile under horizontal load is applied in excavation engineering. An elastic subgrade reaction model considering nonlinear interaction between protection-structure and soil for deep excavations is put forward. Above the pit plane, a computational model considering the protecting structure-soil nonlinear interaction is adopted; under the pit plane, the protection-structure is regarded as laterally loaded piles and the weight of soil above the pit excavation is applying to the protection-structure as an overloading. The differential equation of the elastic subgrade beam to consider the nonlinear interaction is derived based on the equation of the general elastic subgrade beam. The internal force and deflection of supporting piles are calculated by adopting finite difference method.

**Key words:**  $p-y$  curve; excavation engineering; computational model; nonlinear interaction

## 0 引言

深基坑支护结构设计计算方法主要有极限平衡法、土抗力法和有限元分析法三类。极限平衡法忽略的因素太多, 常常不能满足工程设计的要求, 应用已愈来愈少。有限元分析法在理论上较成熟, 但因其存在土的本构模型和土性参数确定难等困难, 难以实际应用。目前土抗力法中的弹性地基反力法应用日益广泛。

图 1 (a) 为《建筑基坑支护技术规程》(JGJ 120—99)<sup>[1]</sup>推荐的弹性支点法计算简图。图 1 (b) 是共同作用弹性地基反力法的计算图示, 该图表示基坑内、外侧的土体均用土弹簧模拟。当土的弹簧系数不随围护墙位移而变化时, 即为线性共同作用弹性地基反力法。但这两种方法都仅仅考虑了地基土的水平基床系数随深度的线性变化, 而没有考虑随围护墙水平位移的变化, 也没有考虑其在同一水平面上不同位置处的差异。在此基础上, 邓子胜等<sup>[2]</sup>提出了考虑支护结构

与土非线性共同作用的计算模型, 其计算简图也为图 1 (b) 所示, 土弹簧数也随围护墙位移而变化, 但其适合于基坑开挖面以上的地基土水平基床系数, 也可应用于基坑开挖面以下的地基土水平基床系数, 计算结果表明<sup>[3]</sup>: 在基坑开挖面以上, 该方法计算结果与实测值吻合良好; 在基坑开挖面以下, 计算结果也接近实测值。在此基础上, 本文根据横向受荷桩的  $p-y$  曲线方程, 建立了一种新的能考虑支护结构位移非线性影响的深基坑计算模型。

## 1 计算模型的建立

本文根据横向受荷桩的  $p-y$  曲线方程建立考虑支护结构非线性影响的土压力计算模型。将基坑分成两部分: 一为开挖面以上部分; 另一部分为开挖面以下部分。

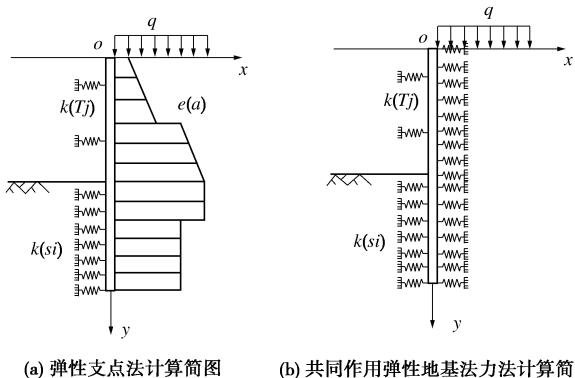


图 1 弹性地基反力法计算简图

Fig. 1 Simplified model for elastic ground reaction method

基坑开挖面以上部分采用文献[2]所提出的根据  $p-y$  曲线建立的支护结构-土非线性共同作用的计算模型, 基坑开挖面以上地基土的水平基床系数为

$$K = \frac{1}{1/(m_0 y) + x/(e - e_0)} \quad . \quad (1)$$

式中  $m_0$  为地基土的初始水平基床系数的比例系数, 可按地基土类别及围护墙设置情况, 取《建筑桩基技术规范》(JGJ94—2008)中  $m$  较大值的一半;  $y$  为自地面或开挖面以下计算点的深度;  $x$  为围护墙的水平位移, 被动变形时为正 ( $x > 0$ ), 主动变形为负 ( $x < 0$ );  $e$  为极限状态土压力, 当  $x > 0$  时为  $e$  被动土压力  $e_p$ , 当  $x < 0$  时  $e$  为主动土压力  $e_a$ ;  $e_0$  为静止土压力。

于是, 围护墙上以静止土压力为基准的土压力增量为:

$$\Delta e = Kx = \frac{x}{1/(m_0 y) + x/(e - e_0)} \quad . \quad (2)$$

当  $x > 0$  时为被动变形土压力增量 ( $\Delta e > 0$ ), 当  $x < 0$  时为主动变形土压力增量 ( $\Delta e < 0$ )。

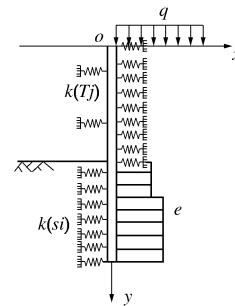
对于基坑开挖面以下的部分, 可以看作为是横向受荷桩, 故可以采用横向受荷桩中的  $p-y$  曲线法。 $p-y$  曲线<sup>[4]</sup>是指在水平力作用下, 地面下某个深度  $z$  处土反力  $p$  与该点桩的挠度  $y$  之间的关系曲线, 它综合反映了桩周土的非线性、桩的刚度和外荷作用性质等特点, 是一种弹塑性分析方法。其中  $p$  是桩产生挠度前、后所受到的土压力之差值。但是, 考虑到基坑开挖面以上土的自重引起的在开挖面以下土的侧压力, 所以, 本文提出的一种新的考虑支护结构位移非线性影响的计算模型, 如图 2 所示。

## 2 非线性共同作用弹性地基梁挠曲线微分方程

非线性共同作用弹性地基梁的挠曲线微分方程通式<sup>[5]</sup>为

$$EI \frac{d^4 x}{dy^4} + p(y, x) - q(y) = 0 \quad . \quad (3)$$

式中:  $E$  为围护墙的弹性模量;  $I$  为计算宽度围护墙横截面的惯性矩;  $p(y, x)$  为围护墙受到的地基反力集度;  $q(y)$  为围护墙受到的水平分布荷载集度。

图 2 根据  $p-y$  曲线提出的计算模型Fig. 2 Computational model based on  $p-y$  curves

在基坑开挖面以上: 支撑力作为节点荷载暂不考虑, 即

$$q(y) = (e_{0b}^u + \Delta e_b^u)b \quad . \quad (4)$$

式中  $e_{0b}^u$  为点  $y$  处的静止土压力;  $\Delta e_b^u$  为点  $y$  处由于围护墙位移  $x$  产生的土压力增量, 由式 (2) 计算;  $b$  为围护墙的计算宽度。

在基坑开挖面以下:

$$p(y, x) = E_s x \quad . \quad (5)$$

式中  $E_s$  为  $p-y$  曲线上的割线模量。

$$q(y) = K_a \sum_{j=1}^n \gamma_j h_j (\sum_{j=1}^n h_j = H_s) \quad (6)$$

式中:  $K_a$  为基坑开挖面以下土层的朗肯主动土压力系数;  $\gamma_j$  为基坑开挖面以上各层土的重度;  $h_j$  为基坑开挖面以上各层土的厚度。

将式 (4) ~ (6) 代入到式 (3), 得

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 x}{dy^4} - (e_{0b}^u + \Delta e_b^u)b &= 0 \quad (0 \leq y \leq H_s), \\ EI \frac{d^4 x}{dy^4} + E_s x - K_a \sum_{j=1}^n \gamma_j h_j &= 0 \quad (y \geq H_s). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

## 3 差分方程的建立

对于刚度为  $EI$  的常刚度支护桩, 将其沿长度方向分为  $n$  个等分单元, 分段长度为  $h$ , 如图 3 所示。在各分点  $i$  处, 记桩身的水平变位为  $y_i$ , 截面弯矩为  $M_i$ , 剪力  $Q_i$ , 土压力为  $P_i$ , 并记在该点处, 则由一维中心差分公式有

$$\frac{dx}{dy}|_i = \frac{1}{2h}(x_{i+1} - x_i) \quad , \quad (8a)$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2}|_i = \frac{1}{h^2}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \quad , \quad (8b)$$

$$\frac{d^4 x}{dy^4}|_i = \frac{1}{h^4}(x_{i+2} - 4x_{i+1} + 6x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2}) \quad . \quad (8c)$$

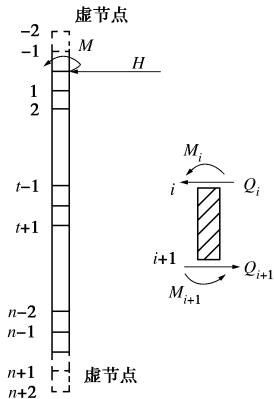


图 3 有限差分法计算简图

Fig. 3 Sketch of finite difference method

将式(8a)、(8b)、(8c)代入式(7)并稍加整理得到  $i$  点处的差分方程为

$$\left. \begin{aligned} & x_{i+2} - 4x_{i+1} + 6x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2} \\ &= \frac{h^4}{EI} (e_{0i}^u + \Delta e_{bi}^u) b \quad (0 \leq y \leq H_s), \\ & x_{i+2} - 4x_{i+1} + \left(6 + h^4 \frac{E_{si}}{EI}\right) x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2} \\ &= \frac{h^4}{EI} K_a \sum_{j=1}^n \gamma_j h_j \quad (y > H_s). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)可列出  $n+1$  个方程, 包括虚拟节点共有  $n+5$  个未知数, 补充 4 个方程即可求解。

在地面处 ( $i=0$  的点), 桩的受力情况明确, 具有已知的弯矩  $M_0$  和剪力  $Q_0$ , 以此作为支护桩顶的边界条件, 有

$$\left. \begin{aligned} & x_1 - 2x_0 + x_{-1} = \frac{h^2 M_0}{EI}, \\ & -x_{-2} + 2x_{-1} - 2x_1 + x_2 = \frac{2h^3 Q_0}{EI}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于桩底边界条件, 一般采用以下两种情况<sup>[6]</sup>:  
① 桩底的弯矩和剪力为已知, 例如桩尖处在极软土层或桩很长时, 可以认为桩底的弯矩  $M_n$  和剪力  $Q_n$  近似为零; ② 桩底的水平变位和角变位为已知, 如果桩足够长, 以致其底部不可能产生变位时, 则可以认为水平变位  $x_d$  和角变位  $x'_d$  为零。

以桩底的弯矩和剪力作为边界条件时, 有补充方程:

$$\left. \begin{aligned} & x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{h^2 M_n}{EI}, \\ & -x_{n-2} + 2x_{n-1} - 2x_{n+1} + x_{n+2} = \frac{2h^3 Q_n}{EI}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

以桩底的水平变位  $x_d$  和角变位  $x'_d$  作为边界条件时, 有补充方程:

$$\left. \begin{aligned} & x_{n+2} - 4x_{n+1} - 4x_{n-1} + x_{n-2}, \\ &= \frac{h^4}{EI} K_a \sum_{j=1}^n \gamma_j h_j - \left(6 + h^4 \frac{E_{sn}}{EI}\right) x_d, \\ & x_{n+1} - x_{n-1} = 2h x'_d. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

## 4 支护结构水平位移的计算

新增加的 4 个边界节点方程与原有的  $n+1$  个方程相结合, 消去虚拟的  $-2$ ,  $-1$ ,  $n+1$ ,  $n+2$  节点变量, 则可得到  $n+1$  方程。由于土体  $p-y$  曲线为双曲线型, 在差分简化所得单桩的位移方程矩阵中, 桩身水平刚度矩阵含有未知量桩身水平节点位移, 因此, 求解过程需先假设水平节点位移, 代入桩身水平刚度矩阵, 然后迭代求解, 此方法可由 MATLAB 编程实现。

## 5 结语

本文在前人<sup>[2]</sup>所提出的考虑支护结构与土非线性共同作用的弹性地基反力法的基础上, 将基坑分成两部分来考虑, 基坑开挖面以上采用的支护结构和土非线性共同作用模型, 而开挖面以下将支护结构看作为横向受荷桩而采用  $p-y$  曲线, 这种组合的土体抗力计算模型能模拟土抗力与位移的非线性关系。

### 参考文献:

- [1] JGJ 120—99 建筑基坑支护技术规程[S]. 1999. (JGJ 120—99 Technical specification for retaining and protection of building foundation excavations[S]. 1999. (in Chinese))
- [2] 邓子胜, 邹银生, 王贻荪. 考虑位移非线性影响的深基坑土压力计算模型研究[J]. 工程力学, 2004, 21(1): 107–111. (DENG Zi-sheng, ZOU Yin-sheng, WANG Yi-sun. Calculation of the earth pressure considering nonlinear displacement influence on deep excavation[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(1): 107–111. (in Chinese))
- [3] 邓子胜. 深基坑支护结构 - 土空间非线性共同作用研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2004. (DENG Zi-sheng. Research on nonlinear interaction between protection-structure and soil for deep excavations[D]. Changsha: Hunan University, 2004. (in Chinese))
- [4] 胡胜刚. 基于  $p-y$  曲线模型的桩基非线性性状分析研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2005. (HU Sheng-gang. Research on nonlinear character of pile foundation based on  $p-y$  curve model[D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2005. (in Chinese))
- [5] 高大钊, 孙 钧, 陈汉忠, 等. 深基坑工程[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999. (GAO Da-zhao, SUN Jun, CHEN Han-zhong. The foundation pit engineering[M]. Beijing: China Machine Press, 1999. (in Chinese))
- [6] 王惠初, 鲁子爱. 用  $p-y$  曲线计算横向荷载桩的内力[J]. 重庆交通学院学报, 1985(1): 61–65. (WANG Hui-chu, LU Zi-ai. Method for calculating internal forces of the laterally loaded pile according to  $p-y$  curves[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 1985(1): 61–65. (in Chinese))

(本文责编 孙振远)