

# 开挖土体侧移作用下被动单桩能量变分分析方法

梁发云<sup>1,2</sup>, 张浩<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 常规设计通常仅考虑桩基受主动荷载作用时的内力和变形, 然而基坑开挖引起的土体侧移会使邻近桩基产生附加内力和变形, 甚至可能引起桩的破坏。针对此类被动桩问题, 基于假定的开挖土体自由场位移模式, 采用 Winkler 地基模型, 提出一种能量变分分析方法。该方法基于最小势能原理, 通过能量方法建立变分控制方程, 针对不同的桩顶约束条件, 对被动桩问题进行分析。与经典解答和试验结果对比, 验证了本文方法的正确性, 该方法能够简便地分析土体侧移作用下被动单桩的性状。

**关键词:** 土体侧移; 被动桩; 两阶段法; Winkler 地基模型; 能量变分方法

中图分类号: TU473

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2012)S0-0019-05

**作者简介:** 梁发云(1976-), 男, 安徽肥东人, 博士, 副教授, 主要从事桩基础、地基处理和基坑工程等研究。E-mail: fyliang@tongji.edu.cn。

## Variational solution of single passive pile subjected to lateral soil movement induced by adjacent excavation

LIANG Fa-yun<sup>1,2</sup>, ZHANG Hao<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2.

Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** It is common to consider internal forces and deformation of piles under lateral loads. However, the lateral soil movement due to adjacent excavation can also generate additional internal forces and deformation in pile foundation of adjacent buildings, and it may lead to damage of adjacent pile foundation. Based on assumed soil movement and the Winkler's foundation model, a variational solution is developed. According to the principle of the minimum potential energy, the variational control equation is established to solve this problem under different pile head restraints. The validity of the proposed method is demonstrated through comparison with the existing theoretical solutions and experimental results. The simplicity of using the proposed solution makes it a good alternative approach to analyze the behavior of piles subjected to lateral soil movement.

**Key words:** lateral soil movement; passive pile; two-stage method; Winkler's foundation model; variational solution

## 0 引言

城市建设中经常会遇到由于基坑开挖等原因而引起的土体侧移问题, 土体侧移作用会使邻近建筑物的桩基础产生附加内力或变形, 并可能导致邻近的桩基础发生破坏, 此类工程事故屡有报道<sup>[1-3]</sup>。其中最为典型的是2009年6月发生在上海的某13层楼房整体倒塌事故, 其主要原因是由于在紧贴楼房北侧的堆土和紧邻南侧的地下车库基坑开挖的联合作用下, 所产生的过大土体侧向位移导致桩基破坏而倒塌<sup>[2]</sup>。

土体侧移作用下的桩基础变形和内力分析属于典型的被动桩问题, 目前分析此类问题较为常用的方法是基于假定土体位移场分布的两阶段法, 分析过程分

为两个阶段: 第一阶段得到没有桩时的自由土体位移, 第二阶段将自由土体位移作为已知条件, 施加于被动桩, 计算土体侧移作用下被动桩的反应<sup>[4-6]</sup>。通常采用差分法求解挠曲微分控制方程, 需要较多的分段数才能达到较好的计算精度, 计算工作量较大<sup>[7-8]</sup>。

在各类常用的求解方法中, 能量变分方法因其概念清晰, 积分求解简便, 容易达到理想的计算精度, 近年来已逐渐应用于求解桩顶受水平力作用的主动桩

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(41172246; 90915011); 上海市教  
委科研创新重点项目(10ZZ24); 中央高校基本科研业务费专项资金  
项目

**收稿日期:** 2012-08-25

问题。其中Shen等<sup>[9]</sup>和Yang等<sup>[10]</sup>基于Winkler地基模型,采用能量变分法分别对桩顶受水平力和弯矩作用的单桩进行分析。

本文基于假定的开挖土体自由场位移模式,采用Winkler地基模型,提出一种求解被动桩的能量变分分析方法。该方法基于最小势能原理,通过能量方法建立变分控制方程,对受土体水平位移作用的被动桩问题进行求解,并与经典解答和试验结果对比验证。

## 1 能量变分分析方法

假设基坑开挖引起的自由土体位移为 $h_z$ ,在桩基的约束作用下,土体的自由位移受到约束,设桩身的最终侧向位移为 $y_z$ ,基于桩-土变形协调,该位移也就是土体的最终侧向位移。土体的约束位移也就是桩-土的相对位移为 $\Delta = h_z - y_z$ ,由Winkler地基模型,约束位移产生的桩侧土压力为

$$F = K \cdot \Delta \quad (1)$$

式中 $K$ 为桩周土体的基床反力模量,其定义为桩身某处单位长度土体抗力与桩-土相对位移的比值( $\text{kN/m}^2$ ); $F$ 为桩在单位长度上的受力大小( $\text{kN/m}$ )。

### 1.1 桩土体系总势能

对于受土体侧移作用下的单桩,其桩土体系总势能 $\pi_p$ 由4部分组成:①桩身弹性变形能;②桩土相互作用产生的能量;③桩顶被约束水平位移时所受水平力产生的能量;④桩顶被约束转角时所受弯矩产生的能量。

结合式(1),桩土体系总势能 $\pi_p$ 表达式如下:

$$\pi_p = U_p + \frac{1}{2} \int_0^L (h_z - y_z) K (h_z - y_z) dz + H_t y_t + \frac{\partial y_t}{\partial z} M_t \quad (2)$$

其中, $U_p$ 为桩身弹性变形能,其表达式为

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^L E_p I_p \left( \frac{d^2 y_z}{dz^2} \right)^2 dz \quad (3)$$

式中 $E_p I_p$ 为桩的刚度; $H_t$ 为桩顶被约束水平位移时所受的水平力; $M_t$ 为桩顶被约束转角时所受的弯矩; $y_t$ 为被约束的桩顶侧向变形; $L$ 为桩长。

### 1.2 桩身位移的矩阵表示

文献[9]和[10]分别采用两个独立的有限矩阵来表示桩顶受水平力作用和桩顶受弯矩作用的桩身侧向变形,本文沿用此表达方法,亦采用两个独立的有限矩阵来分别表示桩顶受水平力作用和受弯矩作用的桩身侧向变形。

桩顶受水平力作用的桩身侧向变形表达为

$$y_{zh} = \{Z_h\}^T \{\delta_h\} \quad (4)$$

式中

$$\{Z_h\} = \left\{ 1, \frac{z}{L}, \sin \frac{\pi z}{L}, \sin \frac{2\pi z}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi z}{L} \right\}^T \quad (5)$$

$$\{\delta_h\} = \{a_h, b_h, \beta_{h1}, \beta_{h2}, \dots, \beta_{hn}\}^T \quad (6)$$

桩顶受弯矩作用的桩身侧向变形表达为

$$y_{zm} = \{Z_m\}^T \{\delta_m\} \quad (7)$$

式中

$$\{Z_m\} = \left\{ 1, \frac{z}{L}, \cos \frac{\pi z}{2L}, \cos \frac{3\pi z}{2L}, \dots, \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2L} \right\}^T \quad (8)$$

$$\{\delta_m\} = \{a_m, b_m, \beta_{m1}, \beta_{m2}, \dots, \beta_{mn}\}^T \quad (9)$$

式中 $a_h$ 和 $a_m$ 代表桩的侧向刚体运动; $b_h$ 和 $b_m$ 代表桩的转动; $\beta_{hi}$ 和 $\beta_{mi}$ 作为桩变形的非线性参数; $n$ 表示矩阵中非线性参数的项数。桩的最终侧向变形可通过叠加 $y_{zh}$ 与 $y_{zm}$ 求得,即

$$\{y_z\} = \{y_{zh}\} + \{y_{zm}\} \quad (10)$$

### 1.3 变分控制方程

基于最小势能原理,桩土体系总势能 $\pi_p$ 应取最小极值点,将式(10)代入式(2)求极值,可得

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \delta_i} = 0 \quad i = (1, 2, \dots, n+2) \quad (11)$$

式中, $\delta_i$ 为式(6)和式(9)中的待定系数。

式(11)求解整理可得变分控制方程如下:

$$\frac{\partial U_p}{\partial \delta_i} + \int_0^L K y_z \frac{\partial y_z}{\partial \delta_i} dz = \int_0^L K h_z \frac{\partial y_z}{\partial \delta_i} dz - H_t \frac{\partial y_t}{\partial \delta_i} - M_t \frac{\partial \left( \frac{\partial y_t}{\partial z} \right)}{\partial \delta_i} \quad (12)$$

### 1.4 变分控制方程求解

分别考虑桩顶处单独作用约束水平力或约束弯矩的情况,变分控制方程式(11)可分别写成

$$\left[ \int_0^L E_p I_p \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 y_{zh}}{\partial \delta_{hi}} \right)}{\partial \delta_{hi}} \frac{\partial^2 \{Z_h\}^T}{\partial z^2} dz + \int_0^L K \frac{\partial y_{zh}}{\partial \delta_{hi}} \{Z_h\}^T dz \right] \{\delta_h\} = \int_0^L K h_z \{Z_h\} dz - H_t \frac{\partial y_{ht}}{\partial \delta_{hi}} \quad (13a)$$

$$\left[ \int_0^L E_p I_p \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 y_{zm}}{\partial \delta_{mi}} \right)}{\partial \delta_{mi}} \frac{\partial^2 \{Z_m\}^T}{\partial z^2} dz + \int_0^L K \frac{\partial y_{zm}}{\partial \delta_{mi}} \{Z_m\}^T dz \right] \{\delta_m\} = \int_0^L K h_z \{Z_m\} dz - M_t \frac{\partial \left( \frac{\partial y_{mt}}{\partial z} \right)}{\partial \delta_{mi}} \quad (13b)$$

式中 $\delta_{hi}$ 和 $\delta_{mi}$ 分别为向量 $\{\delta_h\}$ 和 $\{\delta_m\}$ 中的系数;

$y_{ht}$  和  $y_{mt}$  分别为桩顶单独作用约束水平力或约束弯矩时被约束的桩顶侧向变形。

将式 (13a) 和式 (13b) 表示成矩阵形式:

$$([K_{pH}] + [K_{sH}])\{\delta_h\} = \{H\}, \quad (14)$$

$$([K_{pM}] + [K_{sM}])\{\delta_m\} = \{M\}. \quad (15)$$

式中  $[K_{pH}]$  和  $[K_{pM}]$  表示桩身刚度;  $[K_{sH}]$  和  $[K_{sM}]$  表示土体刚度;  $\{H\}$  表示自由土体位移和桩顶受约束水平力的联合作用;  $\{M\}$  表示自由土体位移和桩顶受约束弯矩的联合作用。

由式 (13a) 和式 (13b) 分别求得  $[K_{pH}]$ ,  $[K_{pM}]$ ,  $[K_{sH}]$  和  $[K_{sM}]$ , 其具体表示形式如下:

$$[K_{pH}] = \frac{E_p I_p \pi^4}{2l^3} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1^4 & \\ & & & \ddots \\ & & & & n^4 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$[K_{pM}] = \frac{E_p I_p \pi^4}{2l^3} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \left(\frac{2n-1}{2}\right)^4 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$K_{sH} = \int_0^L \{Z_h\} K \{Z_h\}^T dz, \quad (18)$$

$$K_{sM} = \int_0^L \{Z_m\} K \{Z_m\}^T dz. \quad (19)$$

进而由式 (14) 和式 (15) 计算得到  $\{\delta_h\}$  和  $\{\delta_m\}$ , 再由式 (4) 和式 (7) 求得  $y_{zh}$  和  $y_{zm}$ , 按式 (10) 叠加得到桩的侧向变形  $y_z$ 。

桩身弯矩可由式 (20) 求得

$$M = E_p I_p \frac{d^2 y_z}{dz^2}. \quad (20)$$

### 1.5 桩顶在各约束条件下的求解

按照桩顶约束情况, 分别考虑桩头自由、桩头铰结、桩头固结三种约束情况的求解, 说明如下:

(1) 桩头自由, 即桩顶水平位移和转角均不被约束, 桩顶所受约束水平力和弯矩都为 0, 可直接求得桩身弯矩和变形。

(2) 桩头铰结, 即桩顶约束水平位移但不约束转角, 桩顶所受约束弯矩为 0, 通过不断试算桩顶所受约束水平力来使其满足桩顶约束条件, 最终可求得桩顶所受约束水平力, 以及桩身弯矩和变形。

(3) 桩头固结, 即桩顶同时约束水平位移和转角, 通过不断试算桩顶处所受约束水平力和弯矩来使其满足桩顶约束条件, 最终可求得桩顶所受约束水平力和

弯矩, 以及桩身弯矩和变形。

以上算法通过 Matlab 编程进行数值计算, 取 10 阶的刚度矩阵  $[K_{pH}]$ ,  $[K_{pM}]$ ,  $[K_{sH}]$  和  $[K_{sM}]$  即可满足计算精度。

## 2 算例验证

### 2.1 基于离心模型试验结果的被动单桩算例

Leung 等<sup>[11]</sup>通过离心模型试验研究了基坑开挖引起的土体侧移对桩的影响。该实验采用的是 Toyoura 粉砂, 基坑开挖深度为 4.5 m, 桩距离基坑 3 m, 桩长 12.5 m, 桩的直径为 0.63 m, 桩身抗弯刚度为  $2.2 \times 10^5$  kN/m<sup>2</sup>, 桩顶边界条件为约束水平位移为零, 但不约束转角。开挖引起的自由土体位移参照文献[11]给出的离心模型试验数据。

在本文计算中, 基床反力模量  $K$  采用 Vesic<sup>[12]</sup> 提出的建议方法:

$$K = \frac{0.65 E_s}{(1 - \nu^2)} \left[ \frac{E_s D^4}{E_p I_p} \right]^{1/12}. \quad (21)$$

式中  $E_s$  为土体弹性模量, 按文献[11]中给出的取值方法, 取  $E_s = 6z$  ( $z$  为桩的埋置深度);  $\nu$  为土的泊松比;  $D$  为桩径。

利用本文理论计算所得水平位移和弯矩与文献[11]实测得的数据对比如图1和图2所示。由图中可见, 本文计算结果与实测数据基本符合, 验证了本文方法的可行性。

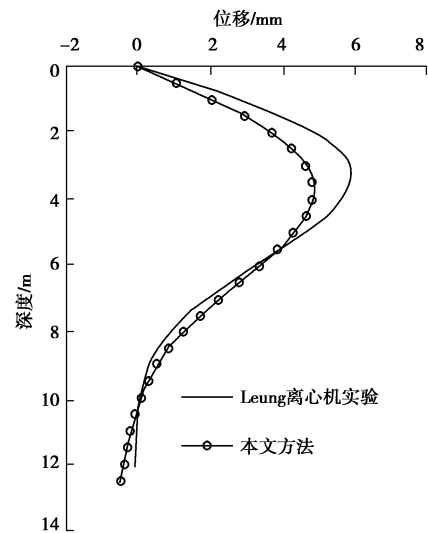


图1 单桩侧向位移对比

Fig. 1 Comparison of lateral displacements of single pile

### 2.2 基于经典理论解答的被动单桩算例

杨敏等<sup>[13]</sup>通过算例研究对比了被动单桩的几种经典理论解答。该算例采用的是桩长  $L = 25$  m, 直径  $d = 1$  m 的水平受荷桩, 桩头自由, 桩身的抗弯刚度  $EI = 7.02 \times 10^5$  kN/m<sup>2</sup> 土体假定为均质黏性土, 不排水抗剪

强度  $c_u = 20$  kPa, 泊松比  $\nu = 0.49$ , 初始剪切模量  $G_i = 1200$  kPa。假定受到如图3所示的初始土体自由位移场作用<sup>[14]</sup>。

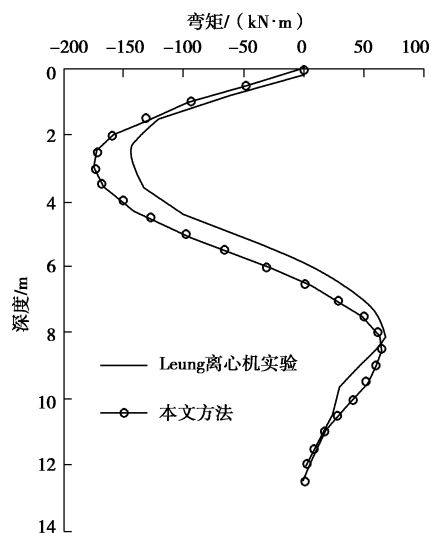


图2 单桩桩身弯矩对比

Fig. 2 Comparison of bending moments of single pile

基床反力模量  $K$  按式 (21) 取值, 利用本文理论算法算出的结果如图4和图5所示, 与文献[4, 5]的  $p-y$  曲线法和文献[6]的弹性理论法计算结果基本一致, 验证了本文算法的正确性。

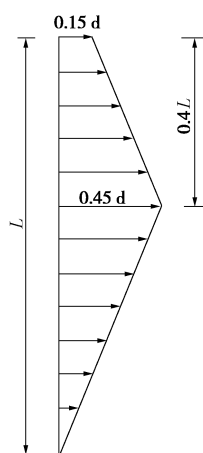


图3 土体水平位移分布模式

Fig. 3 Profile of horizontal soil movement

### 3 结 语

本文针对开挖土体侧移作用的被动桩问题进行分析, 基于假定的开挖土体自由场位移模式, 采用 Winkler 地基模型, 提出一种求解被动单桩的能量变分分析方法。针对不同桩顶约束条件进行求解, 桩顶水平位移和转角均不被约束时, 可不考虑桩顶约束水平力和弯矩, 桩身变形和内力可直接求得; 桩顶约束水平位移而不约束转角时, 可不考虑桩顶约束弯矩, 通过试算求得桩顶约束水平力, 并可求得桩身变形和内

力; 桩顶水平位移和转角均被约束时, 同样可通过试算求得桩顶约束水平力和弯矩, 进而求得桩身的变形和内力。

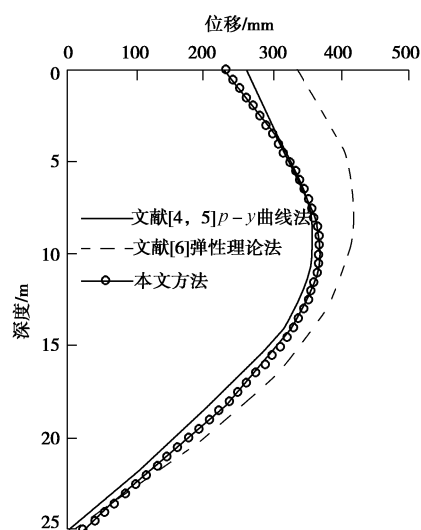


图4 单桩侧向位移对比

Fig. 4 Comparison of lateral displacements of single pile

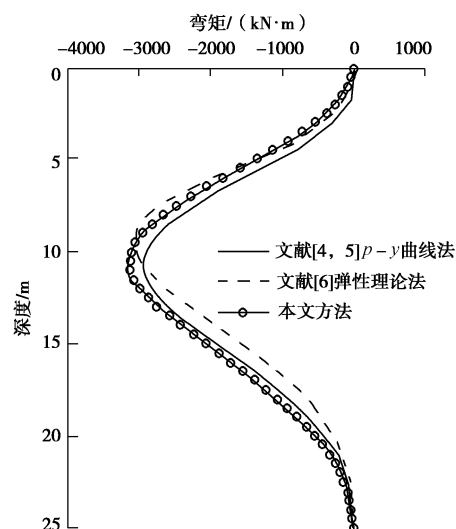


图5 单桩桩身弯矩对比

Fig. 5 Comparison of bending moments of single pile

本文方法利用 Matlab 进行编程计算, 计算简便。与经典解答和离心试验结果的对比表明, 本文提出的变分方法的计算结果是合理的, 能够比较有效地分析被动单桩的性状。通过引入弹塑性地基模型, 本文方法可拓展至土体达到塑性状态的情况, 本文方法还可拓展至被动群桩等复杂的工程问题中。

### 参考文献:

- [1] 杨 敏, 朱碧堂, 陈福全. 堆载引起某厂房坍塌事故的初步分析[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(4): 446 - 450. YANG Min, ZHU Bi-tang, CHEN Fu-quan. A preliminary study on

- collapse of an industrial building due to adjacent surcharge loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(4): 446 – 450. (in Chinese)
- [2] 梁发云, 于 峰, 李镜培, 等. 土体水平位移对邻近既有桩基承载性状影响分析[J]. 岩土力学, 2010, **31**(2): 449 – 454. (LIANG Fa-yun, YU Feng, LI Jing-pei, et al. Analysis of the bearing capacity of a single pile under adjacent building subjected to lateral soil movements[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(2): 449 – 454. (in Chinese))
- [3] STEWART D P, JEWELL R J, RANDOLPH M F. Design of piled bridge abutments on soft clay for loading from lateral soil movement[J]. Géotechnique, 1994, **44**(2): 277 – 296.
- [4] BYRNE P M, ANDERSON D L, JANZEN W. Response of piles and casings to horizontal free-field soil displacements [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1984, **21**(4): 720 – 725.
- [5] GOH A T C, WONG K S. Analysis of piles subjected to embankment induced lateral soil movements[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1997, **123**(9): 792 – 801.
- [6] POULOS H G, DAVIS E H. Pile Foundation Analysis and Design[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1980: 311 – 322.
- [7] GOH ATC, TEH CI, WONG KS. Analysis of piles subjected to embankment induced lateral soil movements[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, **123**(9): 792 – 801.
- [8] HUANG MS, ZHANG CR, LI Z. A simplified analysis method for the influence of tunnelling on grouped piles[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2009, **24**(4): 410 – 422.
- [9] SHEN W Y, TEH C I. Analysis of laterally loaded piles in soil with stiffness increasing with depth[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, **130**(8): 878 – 882.
- [10] YANG K, LIANG R. Numerical solution for laterally loaded piles in a two-Layer soil profile[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2006, **132**(11): 1436 – 1443.
- [11] LEUNG C F, CHOW Y K, SHEN R F. Behavior of pile subject to excavation-induced soil movement[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2000, **126**(11): 947 – 954.
- [12] VESIC A S. Bending of beams resting on isotropic elastic solids[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1961, **87**(2): 35 – 53.
- [13] 杨 敏, 周洪波. 承受侧向土体位移桩基的一种耦合算法 [J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(24): 4491 – 4497. (YANG Min, ZHOU Hong-bo. Coupling analytical solution of piles subjected to lateral soil movements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(24): 4491 – 4497. (in Chinese))
- [14] POULOS H G. Analysis of piles in soil undergoing lateral movement[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1973, **99**(SM5): 91 – 406.

(本文责编 黄贤沙)