

# 基于自适应加权光滑约束与 PCG 算法的 三维电阻率探测反演成像

刘斌，李术才，聂利超，李利平，刘征宇，宋杰，隋斌，周宗青

(山东大学岩土与结构工程研究中心，山东 济南 250061)

**摘要：**三维电阻率探测在实际工程中日益受到重视，但存在着深部分辨率低、反演效率低等关键问题，严重制约了三维电阻率探测技术的应用和推广。针对深部分辨率低的问题，提出了一种随三维模型网格尺寸自适应调整的加权光滑约束，改善了深部网格的电阻率差异容许程度，实现了对不同深度网格约束的差异化加权处理，有效的提高了深部反演的分辨率和成像效果。针对反演计算耗时长、效率低的问题，基于预条件共轭梯度法求解快速稳定的优势，提出了三维电阻率快速稳定反演成像算法。在该算法中，将雅可比迭代中的对角阵作为预条件矩阵，其具有求逆方便、无需内存空间的特点，显著加快了收敛速度。最后，利用合成算例和隧道导水裂隙探测的工程实例验证了上述反演方法的可行性和有效性，表明借助于自适应调整加权光滑约束和预条件共轭梯度算法，有效的提高了深部分辨率和计算效率，显著改善了反演效果。

**关键词：**三维电阻率反演；自适应加权光滑约束；深部分辨率；预条件共轭梯度算法；导水裂隙探测

中图分类号：P631.322 文献标识码：A 文章编号：1000-4548(2012)09-1646-08

作者简介：刘斌(1983- )，男，山东高唐人，讲师，从事地下工程地质灾害预报与防治研究。E-mail: liubin0635@163.com。

## Inversion imaging of 3D resistivity detection using adaptive-weighted smooth constraint and PCG algorithm

LIU Bin, LI Shu-cai, NIE Li-chao, LI Li-ping, LIU Zheng-yu, SONG Jie, SUI Bin, ZHOU Zong-qing

(Research Center of Geotechnical & Structural Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

**Abstract:** Three-dimensional resistivity detection is increasingly concerned in actual projects. However, its application and extension is excessively restricted because of some key problems such as low deep resolution and low inversion efficiency. For the problem of low deep resolution, an adaptive-weighted smooth constraint is proposed, which is adjusted adaptively to the mesh size in a three-dimensional model. It improves resistivity difference tolerance of deep grids and achieves difference weighted processing of grid constraints at different depths. With the adaptive-weighted smooth constraint, the deep resolution and inversion imaging quality are improved effectively. For the problem of time-consuming and low inversion efficiency in inversion, a rapid and stable method of 3D resistivity inversion and imaging based on preconditioned conjugate gradient (PCG) algorithm is proposed. The diagonal matrix in Jacobi iteration is used as the preconditioned matrix for speeding up the convergence speed significantly. The inversion of the preconditioned matrix is convenient to be solved and doesn't occupy memory spacing. At last, the inversion method is applied in a synthetic example and water flowing fracture detection in tunnel engineering for checking its feasibility and effectiveness. The results show that the deep resolution, calculation efficiency and inversion quality of 3D resistivity detection are improved effectively by using the adaptive-weighted smooth constraint and the PCG algorithm.

**Key words:** 3D resistivity inversion; adaptive-weighted smooth constraint; deep resolution; PCG algorithm; water flowing fracture detection

## 0 引言

近年来，地球物理探测技术在铁路公路交通、水利水电、市政建设、矿山能源等领域发挥着越来越重

基金项目：国家自然科学基金重点项目（51139004）；国家自然科学基金青年项目（41102183）；山东省自然科学基金项目（ZR2011EEQ013）；中国博士后科学基金项目（20110491596）；山东大学自主创新基金项目（2010GN059）

收稿日期：2011-05-23

要的作用,特别是在复杂地形地质条件下,工程项目的前期地质勘察、施工期病害探查与质量控制、运营期健康监测与病害诊断,均需要地球物理探测技术的支撑,由此产生了一系列新的技术难题,对工程地球物理探测技术提出了新的要求。

作为一种重要的工程地球物理探测技术,直流电阻率法以其适应性强、方便快捷、成本低等众多优点被广泛应用于岩土工程勘察、地质灾害监测、环境岩土工程评价等领域中,随着探测条件复杂性的增加和服务对象的拓展,一维或二维电阻率勘探的精度和速度已经无法满足工程需要,对电阻率探测技术提出了“三维化、精细化、快速化”等更高的要求,因此,研究快速有效的三维电阻率反演成像方法具有重要的理论和工程意义。

目前国内外许多学者对三维电阻率反演成像方法进行了研究,其中 $\alpha$ 中心法和Born近似理论要求介质的电阻率变化不宜过大<sup>[1-2]</sup>,大大降低了其实用性。Zohdy法不需计算敏感度矩阵,计算量较小,但它是一种直接拟合法,反演精度有待提高<sup>[3-4]</sup>。最小二乘反演方法是目前主要的三维电阻率反演方法,Sasaki在最小二乘准则中加入光滑约束<sup>[5]</sup>,系统的研究了敏感度矩阵、光滑度矩阵的计算方法,为使用有限单元法和最小二乘法进行电阻率反演奠定了基础,阮百尧、吴小平、底青云、黄俊革、宛新林、Jie Zhang等分别从敏感度矩阵求解方法、反演方程求解方法等方面对最小二乘线性反演方法进行了发展和完善,使得三维电阻率探测反演速度、效果有了显著进步<sup>[6-13]</sup>。随着计算技术和最优化理论的发展,非线性反演方法被引入到电阻率反演研究中(模拟退火法、神经网络法、遗传算法等),但非线性反演方法耗时巨大,主要集中在一维或二维反演方面,目前未见到关于三维电阻率非线性反演的报道<sup>[14-20]</sup>。

上述研究工作作为三维电阻率反演奠定了基础,但是三维电阻率反演还存在一些未能很好解决的关键问题,如:①深部分辨率低,严重影响了三维电阻率法对深部目标体的探测和识别能力,不能满足“精细化”的要求,亟待提出一种提高深部网格反演分辨率的方法;②反演耗时较长,制约了三维电阻率探测在实际工程中的推广,无法实现“快速化”,急需提出一种快速稳定的反演算法,以提高三维电阻率探测的效率。

针对上述问题,本文提出了以网格间距因子自适应加权光滑约束控制深部分辨率的方法,改进了传统三维电阻率反演的光滑约束,显著改善了深部网格的反演效果。同时,提出了基于预条件共轭梯度法的三维电阻率反演算法,实现了三维电阻率观测数据的快

速稳定反演。另外,结合合成数据与实测数据的反演算例,验证了本文反演方法的可行性与有效性。

## 1 基于自适应加权光滑约束的反演方程

### 1.1 三维电阻率反演问题的线性化

本文的三维电阻率反演以有限元正演模拟为基础,首先建立三维有限元模型,如图1,为了突出探测核心区域,并且兼顾无穷远边界的模拟,将三维模型分为目标核心区域与边界区域,其中目标核心区域的网格尺寸较小,且相邻网格尺寸相同或相差不大,以保证目标核心区域的反演具有足够的精度冗余;而边界区域的网格尺寸步长增幅较大,以较少的边界网格数量达到无穷远边界模拟的要求。

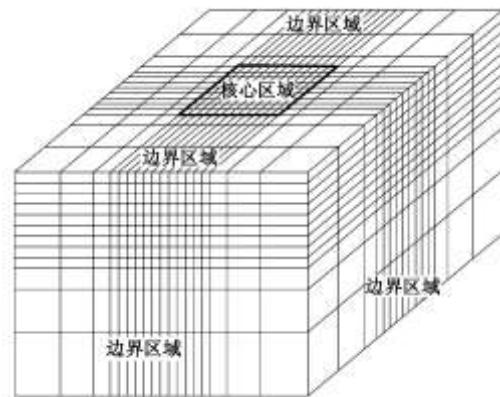


图1 三维有限元模型示意图

Fig. 1 Schematic map of 3D FEM meshes

假设三维模型中参与反演的网格参数(即网格电阻率值)为 $m=(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)^T$ ,观测数据(即视电阻率值)为 $d_{obs}=(\rho_{s1}, \rho_{s2}, \dots, \rho_{sn})^T$ ,其中 $m$ 为参与反演的网格数量, $n$ 为观测数据的数量。

直流电阻率探测的反演是典型的非线性问题,将该问题线性化并正则化,得到反演方程(式(1))及其对应的目标函数(式(2)):

$$A^T A \Delta m = A^T \Delta d \quad , \quad (1)$$

$$\Phi = (\Delta d - A \Delta m)^T (\Delta d - A \Delta m) \quad , \quad (2)$$

式中, $\Delta d$ 为实际观测数据与正演理论观测数据的差向量, $\Delta m$ 为模型参数的增量向量, $A$ 为 $n \times m$ 阶矩阵,称为偏导数矩阵,表示模型的理论观测数据对模型参数的偏导数,设 $A_{ij}$ 为矩阵 $A$ 的元素,如下:

$$A_{ij} = \frac{\partial \rho_{si}}{\partial \rho_j} \quad i=1, 2, \dots, n \quad j=1, 2, \dots, m \quad . \quad (3)$$

线性方程组(1)就是将非线性反演问题线性化的结果,由于在线性化过程中产生了截断误差,需要经过反复迭代才能得一个最佳解<sup>[21]</sup>。

### 1.2 基于网格间距因子的自适应加权光滑约束

对于方程(1)而言, 观测数据的个数往往小于未知参数的数目, 即  $n < m$ , 且由于观测数据存在误差等原因, 导致在  $m$  个方程中往往存在较强的相关性, 即  $\min(m, n) > r_A$ , 其中  $r_A$  是矩阵  $A$  的秩, 因此反演问题表现为混定问题, 往往造成矩阵  $A^T A$  的条件数较大, 导致方程(1)呈现出较高的病态程度<sup>[21]</sup>。

为解决病态方程的问题, 需在模型构制中施加光滑约束作为先验信息。以往研究中多采用简单的平均光滑约束形式, 使相邻网格之间的电阻率光滑“过渡”, 对于第  $i$  个网格而言(如图2, 红色部分为第  $i$  个网格), 光滑约束如式(4):

$$R_i = (\Delta m_i^F + \Delta m_i^B + \Delta m_i^L + \Delta m_i^R + \Delta m_i^U + \Delta m_i^D - 6\Delta m_i)/6, \quad (4)$$

式中,  $\Delta m_i$  为第  $i$  个网格的模型参数修正量,  $\Delta m_i^F$ ,  $\Delta m_i^B$ ,  $\Delta m_i^L$ ,  $\Delta m_i^R$ ,  $\Delta m_i^U$ ,  $\Delta m_i^D$  分别表示第  $i$  个网格的前、后、左、右、上、下的网格的电阻率修正量。

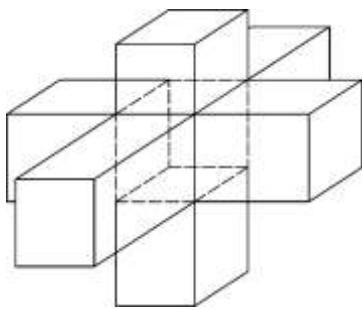


图 2 相邻网格位置图

Fig. 2 Schematic map of 3D adjacent grids

对式(4)进行分析, 这种约束可以保证相邻的网格之间的电阻率差异极小, 构制“简单”的三维模型, 具有天然的合理性, 对于相邻网格尺寸相同的情况尤为合理。然而, 随着深度的增加或向边界的靠近, 网格的尺寸逐渐增加, 网格代表的地质空间范围亦增大, 相邻网格间的电阻率过渡差异容许范围应随之增加, 但是光滑约束(4)表征的相邻网格间的电阻率差异程度却保持不变, 从而导致深部大尺寸网格间的“过渡”过于光滑, 分辨率受到严重的影响。

针对上述问题, 本文提出了一种基于网格间距因子的自适应加权光滑约束的形式, 表示如下:

$$R_i = \left( \frac{\Delta m_i^F}{l_F} + \frac{\Delta m_i^B}{l_B} + \frac{\Delta m_i^L}{l_L} + \frac{\Delta m_i^R}{l_R} + \frac{\Delta m_i^U}{l_U} + \frac{\Delta m_i^D}{l_D} - \alpha \Delta m_i \right) / 6, \quad (5)$$

式中,  $l_F$ ,  $l_B$ ,  $l_L$ ,  $l_R$ ,  $l_U$ ,  $l_D$  分别表示中心网格与其前、后、左、右、上、下相邻网格间的中心距离,

$$\alpha = \frac{1}{l_F} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_L} + \frac{1}{l_R} + \frac{1}{l_U} + \frac{1}{l_D}.$$

可见, 该约束利用相邻网格的中心间距因子作为光滑约束的加权, 在理论上讲, 随着深部网格尺寸的增加, 网格间的电阻率差异容许程度增加, 实现了不同深度网格电阻率差异程度的差异化处理, 分辨率也应得到提高。

整个模型的光滑约束可用矩阵形式表示, 如下:

$$R = C \Delta m, \quad (6)$$

式中,  $C$  为光滑度矩阵, 假设  $C_{ij}$  为  $C$  的元素, 则

$$\begin{cases} C_{ij} = 1/l_{ij} & \text{网格 } j \text{ 与网格 } i \text{ 相邻} \\ C_{ij} = 0 & \text{网格 } j \text{ 与网格 } i \text{ 不相邻} \end{cases}$$

$$C_{ii} = -\sum_{j=1}^m C_{ij}, \quad (7)$$

式中,  $l_{ij}$  为网格  $i$  与网格  $j$  的中心间距。

施加光滑约束后, 三维电阻率反演的目标函数表示如下:

$$\Phi = (\Delta d - A \Delta m)^T (\Delta d - A \Delta m) + \lambda (C \Delta m)^T (C \Delta m), \quad (8)$$

式中,  $\lambda$  为拉格朗日常数。

目标函数(8)对应的反演成像方程如式(9)

$$(A^T A + \lambda C^T C) \Delta m = A^T \Delta d. \quad (9)$$

## 2 基于预条件共轭梯度法的三维电阻率反演成像算法

共轭梯度法是一种常用的最优化方法, 在此基础上发展起来的预条件共轭梯度法具有求解快速稳定的显著优势, 本文以目标函数(8)和反演方程(9)为出发点, 形成了基于预条件共轭梯度法的三维电阻率快速反演算法, 其流程如图3, 其中包括两个相互嵌套的迭代过程: 反演迭代过程和反演方程求解迭代过程。

### 2.1 反演迭代

首先设定反演模型初值, 通过有限元模拟得到对应于已有模型参数的理论观测数据  $d_m$ , 然后进行收敛判断, 若满足收敛判据  $rus < \varepsilon_{inv}$  ( $rus$  为观测数据  $d_{obs}$  与正演理论值  $d_m$  之间的均方误差,  $\varepsilon_{inv}$  为反演收敛的容许值), 则输出反演结果; 若不满足收敛判据, 则求解反演方程, 得到新一代模型参数, 直到满足收敛判据时停止反演迭代, 输出反演结果。

在反演迭代中, 每计算一次偏导数矩阵  $A$ , 需要进行  $n$  次点源电场的有限元模拟, 耗时巨大。 $n$  次点源电场的正演模拟中需要求解  $n$  组大型线性方程组, 每组方程组的系数不变, 而右端向量彼此不同, 据此本文提出了基于 Cholesky 分解法的求解方法, 针对  $n$

次正演, Cholesky 分解法只需对右端系数矩阵进行一次分解, 然后对不同的右端向量进行回代计算即可, 计算效率明显提高。

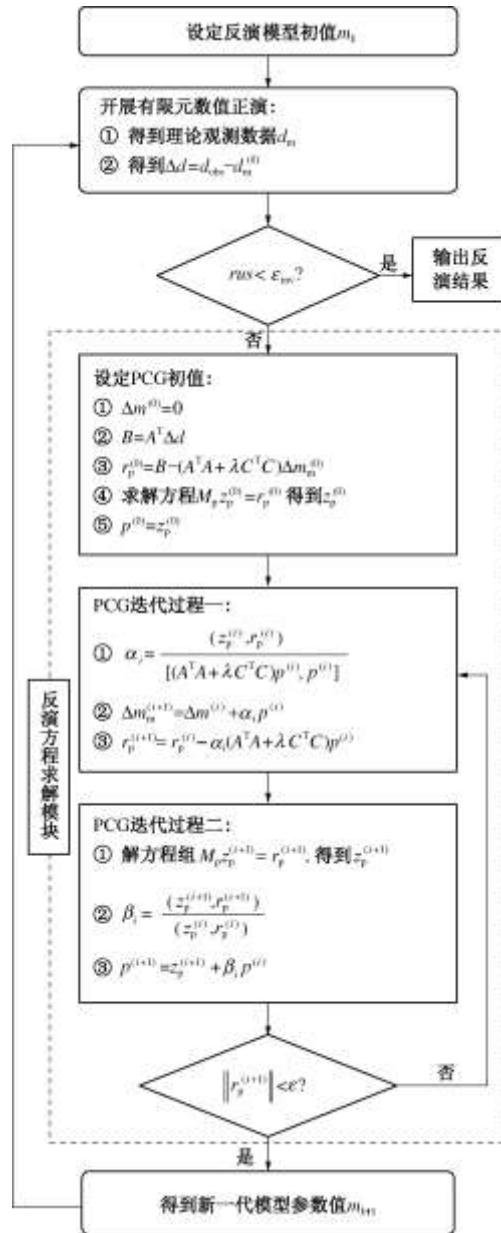


图3 基于预条件共轭梯度法的三维电阻率反演成像算法

Fig. 3 3D resistivity inversion algorithm based on PCG

## 2.2 PCG 法求解反演方程

### (1) 反演方程的求解迭代过程

该过程实质上是利用预条件共轭梯度算法求解反演成像方程的过程, 预条件共轭梯度算法的基本原理是, 针对线性方程组  $Ku = P$ , 假设非奇异矩阵  $C$ , 使  $\bar{K} = C^{-1}KC^{-T}$  条件数较原系数矩阵  $K$  得到改善

$$C^{-1}KC^{-T}C^Tu = C^{-1}P \quad , \quad (10)$$

令  $M = CC^T$  为预条件矩阵, 当  $M$  与  $K$  的结构形式相同时,  $\bar{K}$  的条件数较小, 可显著提高收敛速度。在三维电阻率反演成像方程的求解中, 通过一定次数的迭

代, 便得到模型参数增量  $\Delta m$ , 其中  $B$  为方程的右端向量,  $r_p$  是方程的右端与方程左端的差向量,  $\varepsilon$  为算法收敛的容许误差,  $z_p$ ,  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  均为迭代过程的中间变量<sup>[22-23]</sup>。

### (2) 雅可比预条件矩阵

$Mz^{(n+1)} = r^{(n+1)}$  的求解是制约 PCG 算法求解速度的关键问题, 本文采用雅可比迭代的块对角矩阵作为预处理矩阵, 如式(11), 该矩阵是对角矩阵, 其对角元素可直接索引, 不需另辟内存, 且求逆方便, 使得方程  $Mz^{(n+1)} = r^{(n+1)}$  的求解效率大大提高。

$$\begin{cases} M(i,j) = \sum_{k=1}^L (A(i,k)^2 + \lambda C(i,k)^2) & i=j \\ M(i,j) = 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (11)$$

## 3 合成数据算例

为了评价加权光滑约束和预条件共轭梯度反演算法的效果, 利用合成观测数据进行反演成像数值试验, 原模型如图4, 在均匀半空间中分别存在电阻率为  $50 \Omega\cdot\text{m}$  的低阻体和电阻率为  $800 \Omega\cdot\text{m}$  的高阻体, 围岩的电阻率为  $300 \Omega\cdot\text{m}$ , 两个异常体的顶部埋深均为  $4 \text{ m}$ , 底部距地面为  $11 \text{ m}$ 。采用温纳装置形式测量, 共  $30$  根电极, 电极间距为  $2 \text{ m}$ , 共布置了  $3$  条测 (图4 (b))。为了接近实际情况, 在合成数据中加入了  $5\%$  的随机噪声。

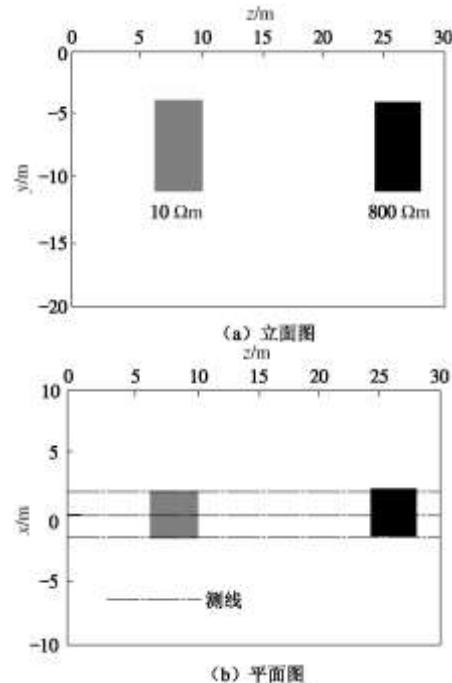


图4 模型示意图

Fig. 4 Schematic map of model

反演模型网格数量为  $12 \times 15 \times 40 = 7200$  个, 三维模型网格采用“反演核心区域等间距, 边界区域间距递增”的方式建立。为了对比自适应加权光滑约束与简

单平均光滑约束下的反演效果, 针对两种约束分别进行了反演计算。两种反演的迭代次数均为6次, 耗时约70 min(计算机配置为主频1.83 GHz, 内存1.0 GB, 下同), 与Cholesky分解算法求解反演方程相比(总耗时为105 min), 耗时降低约50%, 反演效率显著提高。

图5为传统的平均光滑约束下的反演结果, 可见靠近顶部的部分与原模型较为一致, 随着深度的增加, 反演成像效果逐渐变差, 异常体底部的范围明显大于原模型, 形态与原模型相差较大, 出现了多余构造, 分辨率明显降低, 给地质解释带来了干扰和困难。

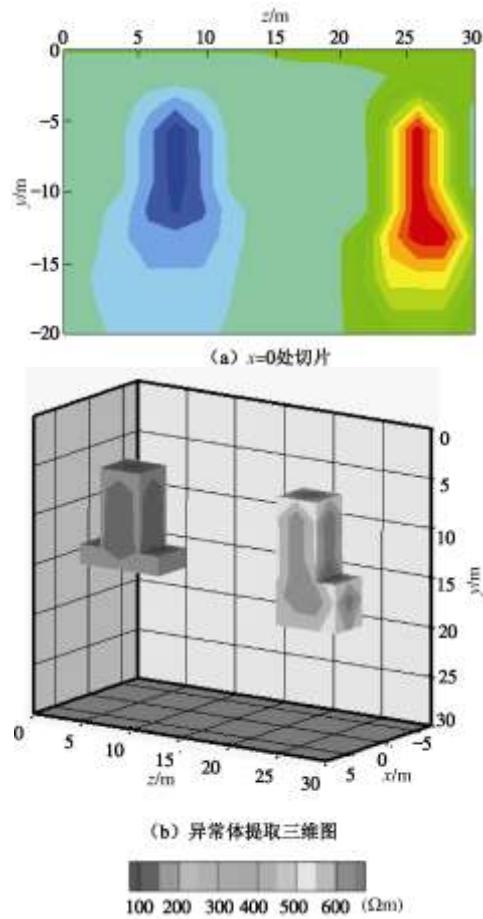


图5 平均光滑约束的反演结果

Fig. 5 Inversion results with mean smooth constraint

图6为自适应加权光滑约束下的反演结果, 成像效果明显改善, 两个异常体在位置、规模、形状、电阻率值等特征方面均与原模型基本一致, 尤其是提取出的异常体与原模型完全一致。

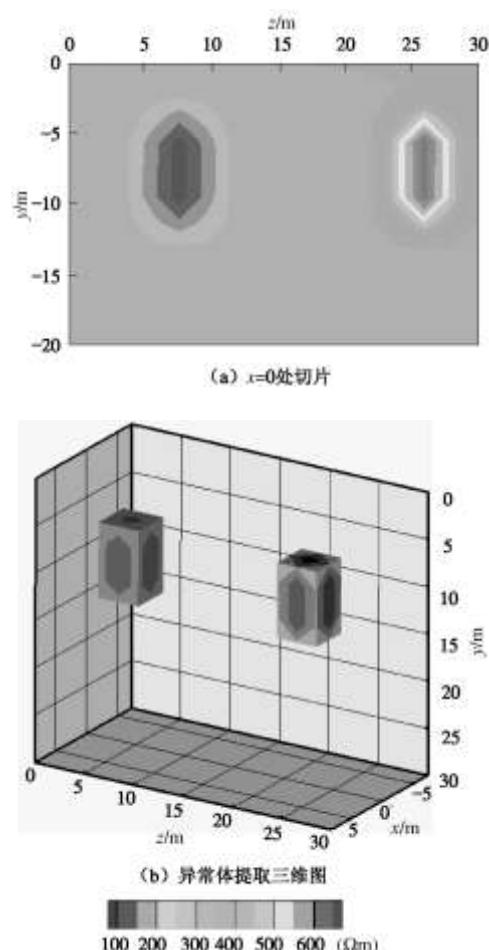


图6 施加自适应加权光滑约束的反演结果

Fig. 6 Inversion results with adaptive-weighted smooth constraint

可见, 借助自适应加权光滑约束和PCG算法, 三维电阻率反演的深部分辨率与计算速度明显提高。

#### 4 工程应用

湖北宜巴高速公路石门垭隧道属特长深埋隧道, 地层为侏罗系上统蓬莱组紫红色薄—中层状粉砂质泥岩与灰绿—灰白色长石石英砂岩不等厚互层, 局部夹砂质砾岩, 裂隙较发育, 局部段落具有较高的涌水风险。

隧道开挖至YK123+672位置时, 发生多处钻孔涌水, 为了探明掌子面前方的含水构造, 在掌子面上实施了三维电阻率探测, 测线布置如图7, 掌子面出露岩层为砂岩与泥质粉砂岩互层, 主要出水点有两个, 分别标记为①和②, 布置了两条水平测线, 测线一距底板2 m, 长度为12 m, 测线二距底板6 m, 长度为8 m, 测量方式采用施伦贝谢尔形式, 电极间距为0.5 m, 均一布置, 测线一共25个电极, 测线二共17个电极。

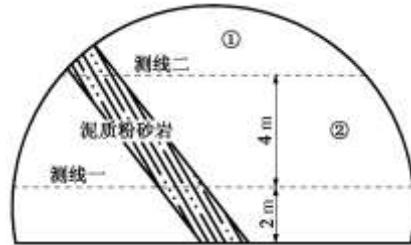


图 7 测线布置图

Fig. 7 Layout of survey lines

#### 4.1 探测结果解释

首先对原始数据进行前处理, 利用“比值法”减除其中的“纯隧道腔体干扰”(篇幅所限, 具体步骤不再赘述, “比值法”详见文献[25]), 再利用本文提出的三维电阻率反演方法对修正后的数据进行了反演, 模型网格数为 $24 \times 10 \times 25=6000$ 个, 三维模型网格采用“反演核心区域等间距, 边界区域间距递增”的方式建立, 反演迭代次数为5次, 耗时约45 min, 反演结果如图8, 在掌子面前方存在3个主要的低阻体, 结合掌子面的地质素描进行分析, 发现3个低阻体的位置分别与泥质粉砂岩、出水点①、出水点②的位置吻合, 因此作出如下推断:

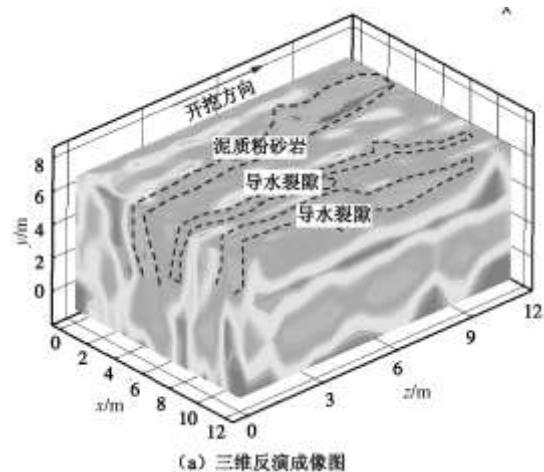
(1) 在 $x=4$  m到 $x=7$  m之间的低阻体为泥质粉砂岩, 其在 $y$ 方向上贯穿整个掌子面,  $z$ 方向上延伸至 $z=12$  m, 泥质粉砂岩含水后电阻率较低, 但不是导水构造。

(2) 在 $x=7$  m到 $x=8$  m之间的低阻体为导水裂隙, 与出水点①的位置吻合, 位于掌子面的中上部,  $z$ 方向上延伸至 $z=12$  m。

(3) 在 $x=10$  m到 $x=12$  m之间的低阻体为导水裂隙, 与出水点②的位置吻合,  $z$ 方向上延伸至 $z=11$  m。

#### 4.2 实际开挖情况对比

对隧道开挖情况进行了全程跟踪记录, 发现预报结果与开挖情况基本一致。泥质粉砂岩和中部的导水裂隙的探测效果较好, 而右部的导水裂隙与实际情况相比, 在 $z$ 方向上的长度略长, 实际工程中该裂隙在 $z=9$  m位置延伸至右边墙围岩内。



(a) 三维反演成像图

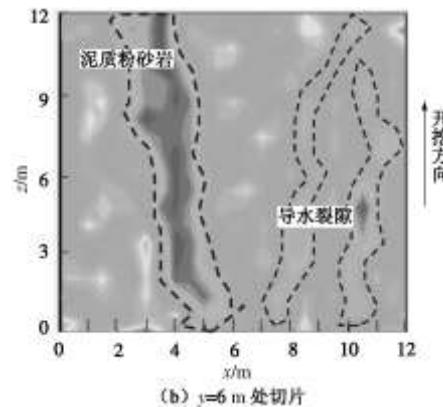
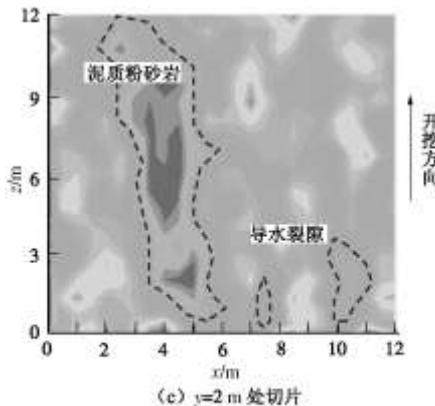
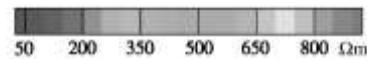
(b)  $z=6$  m 处切片(c)  $y=2$  m 处切片

图 8 反演结果

Fig. 8 Inversion results

#### 4.3 反演效果评价

对图9的反演图像分析, 可发现:

(1) 反演结果中并未出现随着深度增加而分辨率降低的情况, 深部网格的反演分辨率与浅部网格基本无差别, 深部网格的反演分辨率较传统方法有明显的提高, 实现了对导水裂隙分布的精细化探查。

(2) 三维电阻率的探测深度明显增加, 按照经典的电法勘探理论, 其探测深度受到测线长度的控制, 探测深度一般为测线长度的三分之一到三分之二, 而

本文中探测深度与测线长度相当。

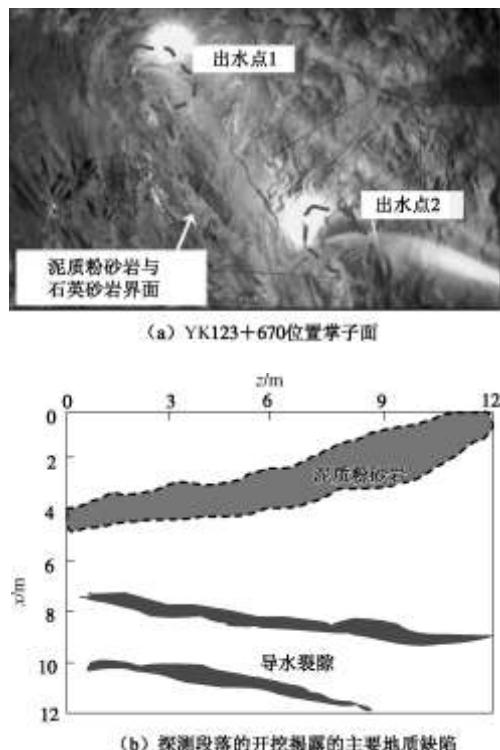


图 9 预报段落的开挖地质记录

Fig. 9 Geological records of detected section

可见,施加了自适应加权光滑约束后,深部网格的反演分辨率明显提高,这对于挖掘深部信息、提高反演效果、增加数据价值具有重要意义。

## 5 结 论

(1)本文提出的随三维模型网格尺寸自适应调整的加权光滑约束,实现了对不同深度网格约束的差异化加权处理,增加了深部网格的电阻率差异容许程度,改善了模型响应对深部网格参数的敏感性,从理论上可以有效的提高深部反演的分辨率和成像效果,为解决三维电阻率探测深部分辨率低的难题提供了有效的途径。

(2)本文提出了基于预条件共轭梯度法的三维电阻率快速反演算法,将雅可比迭代中的对角阵作为预条件矩阵,求逆快捷方便、不占用内存空间,其计算效率比Cholesky分解算法提高约50%,为三维电阻率探测提供了快速高效稳定的反演算法。

(3)本文提出的自适应调整加权光滑约束和PCG反演算法在合成算例和实际工程应用中取得了良好效果,深部网格的分辨率得到显著提高。

(4)本文的研究在直流电阻率探测的“三维化、精细化、快速化”方面进行了探索,对于提高深部分辨率、提升反演效率、改善反演效果、挖掘数据价值具有较为重要的意义,下一步的研究的重点是加强相

关的工程验证与实践。

## 参 考 文 献:

- [1] PETRICK W R Jr, SILL W R, WARD S H. Three dimensional resistivity inversion using alpha centers[J]. Geophysics, 1981, 46(8): 1148 - 1163.
- [2] LI Y, OLDENBURG D W. Approximate inverse mappings in DC resistivity problems[J]. Geophys J Int, 1992, 109: 343 - 362.
- [3] ZOHDY A A R. A new method for the automatic interpretation of schlumberger and wenner sounding curves[J]. Geophysics, 1989, 54(2): 245 - 253.
- [4] 毛先进, 冯锐, 鲍光淑. 边界积分方程用于电阻率 Zohdy 反演的初步研究[J]. 地球物理学报, 2000, 43(4): 574 - 579. (MAO Xian-jin, FENG Rui, BAO Guang-shu. Primary research on Zohdy inversion of resistivity using boundary integral equation[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2000, 43(4): 574 - 579. (in Chinese))
- [5] SASAKI Yutaka. 3D resistivity inversion using the finite-element method[J]. Geophysics, 1994, 59(11): 1839 - 1848.
- [6] 阮百尧, 村上峪, 徐世浙. 电阻率/激发极化率数据的二维反演程序[J]. 物探化探计算技术, 1999, 21(2): 116 - 125. (RUAN Bai-yao, Murakami Y, XU Shi-zhe. 2D inversion program of induced polarization data[J]. Computing Techniques For Geophysical and Geochemical Exploration, 1999, 21(2): 116 - 125. (in Chinese))
- [7] 黄俊革, 阮百尧, 鲍光淑. 基于有限单元法的三维地电断面电阻率反演[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2004, 35(2): 295 - 299. (HUANG Jun-ge, RUAN Bai-yao, BAO Guang-shu. Resistivity inversion on 3D section based on FEM[J]. Journal of Central South University (Natural Science), 2004, 35(2): 295 - 299. (in Chinese))
- [8] 底青云, 王妙月. 积分法三维电阻率成像[J]. 地球物理学报, 2001, 44(6): 843 - 852. (DI Qing-yun, WANG Miao-yue. 3-D resistivity tomography by integral method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2001, 44(6): 843 - 852. (in Chinese))
- [9] ZHANG Jie, MACKIE Randall L, MADDEN Theodore R. 3-D resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients[J]. Geophysics, 1994, 60(5): 1313 - 1325.
- [10] 吴小平, 徐果明. 利用共轭梯度法的电阻率三维反演研究[J]. 地球物理学报, 2000, 43(3): 420 - 426. (WU Xiao-ping, XU Guo-ming. Study on 3D resistivity inversion using conjugate

- gradient method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2000, 43(3): 420 - 426. (in Chinese))
- [11] 宛新林, 席道瑛, 高尔根, 等. 用改进的光滑约束最小二乘正交分解法实现电阻率三维反演[J]. 地球物理学报, 2005, 48(1): 439 - 444. (WAN Xin-lin, XI Dao-ying, GAO Er-gen, et al. 3-D resistivity inversion by the least-squares QR factorization method under improved smoothness constraint condition[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2005, 48(1): 439 - 444. (in Chinese))
- [12] PIDLISECKY Adam, HABER Eldad, KNIGHT Rosemary. RESINVM3D: A 3D resistivity inversion package[J]. Geophysics, 2007, 72(2): H1 - H10.
- [13] 孙跃. 直流电阻率法的三维有限元无限元数值分析[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(7): 733 - 737. (SUN Yue. Numerical analysis for three-dimensional resistivity model by using finite element/infinite element methods[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(7): 733 - 737. (in Chinese))
- [14] STEPHEN Jimmy, MANOJ C, SINGH S B. A direct inversion scheme for deep resistivity sounding data using artificial neural networks[J]. Journal of Earth System Science, 2004, 113(1): 49 - 66.
- [15] SINGH U K, TIWARI R K, SINGH S B. One-dimensional inversion of geo-electrical resistivity sounding data using artificial neural networks—a case study[J]. Computers & Geosciences, 2005, 31(1): 99 - 108.
- [16] 徐海浪, 吴小平. 电阻率二维神经网络反演[J]. 地球物理学报, 2006, 49(2): 584 - 589. (XU Hai-lang, WU Xiao-ping. 2D resistivity inversion using the neural network method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2006, 49(2): 584 - 589. (in Chinese))
- [17] DITTMER J K, SZYMANSKI J E. The stochastic inversion of magnetic and resistivity data using the simulated annealing algorithm[J]. Geophysical Prospecting, 1995, 43: 397 - 416.
- [18] 卢元林, 王兴泰, 王若, 等. 电阻率成像反演中的模拟退火方法[J]. 地球物理学报, 1999, 42(增刊 1): 225 - 233. (LU Yuan-lin, WANG Xing-tai, WANG Ruo, et al. The simulated annealing method of electrical resistivity tomography[J]. Chinese Journal of Geophysics, 1999, 42(S1): 225 - 233. (in Chinese))
- [19] 李帝铨, 王光杰, 底青云, 等. 基于遗传算法的 CSAMT 最小构造反演[J]. 地球物理学报, 2008, 51(4): 1234 - 1245. (LI Di-quan, WANG Guang-jie, DI Qing-yun, et al. The application of genetic algorithm to CSAMT inversion for minimum structure[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2008, 51(4): 1234 - 1245. (in Chinese))
- [20] 闫永利, 陈本池, 赵永贵, 等. 电阻率层析成像非线性反演[J]. 地球物理学报, 2009, 52(3): 758 - 764. (YAN Yong-li, CHEN Ben-chi, ZHAO Yong-gui, et al. Nonlinear inversion for electrical resistivity tomography[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2009, 52(3): 758 - 764. (in Chinese))
- [21] 王家映. 地球物理反演理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. (WANG Jia-ying. Inverse theory in geophysics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese))
- [22] 雷光耀. 预处理技术与 PCG 算法[J]. 数学进展, 1992, 21(2): 129 - 139. (LEI Guang-yao. Preconditioned technique and PCG algorithm[J]. Advances in Mathematics, 1992, 21(2): 129 - 139. (in Chinese))
- [23] 王勘成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. Finite element method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [24] 刘斌, 李术才, 李树忱, 等. 电阻率层析成像法监测系统在矿井突水模型试验中的应用研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(2): 297 - 307. (LIU Bin, LI Shu-cai, LI Shu-chen, et al. Application and study of ERT monitoring system to mine water inrush model test[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(2): 297 - 307. (in Chinese))
- [25] 刘斌, 李术才, 李树忱, 等. 隧道含水构造直流电阻率法超前探测研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 3093 - 3100. (LIU Bin, LI Shu-cai, LI Shu-chen, et al. Study of advanced detection of water-bearing geological structures with DC resistivity method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 3093 - 3100. (in Chinese))