

热动力学的稳态与非饱和土的临界状态

赵成刚

(北京交通大学土建学院, 北京 100044)

摘要: 临界状态的概念是临界状态土力学中最重要的概念之一, 它是临界状态土力学的基石。但到目前为止, 非饱和土临界状态的明确的定义以及到达临界状态的必要条件还没有清晰地给出。基于热力学的理论, 推导给出了非饱和土变形过程到达最终点即稳态的约束条件。指出非饱和土变形过程到达最后的结束状态就是稳定平衡状态(简称稳态), 而这种稳态针对非饱和土而言, 就是其临界状态; 非饱和土的临界状态是具有普适性的热力学过程的稳态的特殊情况。与基于实验给出的非饱和土临界状态的条件相比, 给出的非饱和土临界状态的约束条件是更具完备性和一般性, 并且是基于严格的热力学的理论推导得到的, 而不是根据某一特殊非饱和土样本的实验结果给出的结论。

关键词: 临界状态; 非饱和土; 热力学过程的稳态

中图分类号: TU47 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2012)04-0730-04

作者简介: 赵成刚(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事土力学与地震工程方面的研究。E-mail: cgzhao@bjtu.edu.cn。

Thermodynamic steady state and critical state for unsaturated soils

ZHAO Cheng-gang

(School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: The critical state is one of the most important concepts in modern soil mechanics. But so far the clear definition of the critical state for unsaturated soils and the necessary conditions and constraints to reach the critical state for unsaturated soils have not been well given. Based on the theory of thermodynamics, the conditions and constraints to attain to the steady state of thermodynamic process for unsaturated soils are proposed, and it is pointed out that the steady state of deformation process for unsaturated soils is the ultimate of deformation process and it is just the concept of the critical state for unsaturated soils. The proposed conditions and constraints to attain to the critical state of deformation process for unsaturated soils are more general and complete with more rigorous thermodynamic theory, and are not just dependent on the results from the tests on the specific samples of the particular unsaturated soils.

Key words: critical state; unsaturated soils; steady state of thermodynamic process

0 引言

土的临界状态是现代土力学中的一个极为重要的概念, 并且是临界状态土力学的基石。临界状态的重要性在于: 它给出了土体在整个变形过程中的结束点。这一结束点在建立土的本构模型时是至关重要的。没有它, 土体的变形将不知道走向哪里以及在何时、何点结束。因为不知道在何时、何点结束变形过程, 仅知道初始值的单边插值和由此所建立的土的本构模型会产生较大的误差。而当已知初始值和结束点值(临界状态)时, 所建立的土的本构模型只需在知初始值和结束点值之间通过某种内插既可以得到, 因此不会产生过大的误差。目前绝大多数土的本构模型都是基于临界状态的概念而建立的, 由此可知其重要性。

土的临界状态的概念是 Roscoe 等^[1]和 Schofield

等^[2]建立的。临界状态定义为整个变形过程的最终状态, 处于这种状态时, 土的体积、应力均保持不变, 但剪应变却不断发展。在三维轴对称(即三轴仪的应力状态)空间时, 其应力和应变需满足以下表达式

$$\dot{p}'=0; \quad \dot{q}=0; \quad \dot{\varepsilon}_v=0; \quad \dot{\varepsilon}_s \neq 0, \quad (1)$$

并且上述状态在 (p', q) 和 $(e, \ln p')$ 空间中可以用数学表达式表示为

$$(q/p')_c = M; \quad e = e_c = \Gamma + \lambda \ln(p'). \quad (2)$$

目前关于土的临界状态的研究主要是针对饱和土进行的, 而对于非饱和土的临界状态, 虽然在很多非饱和

基金项目: 国家自然科学基金项目(51078019); 国家重点基础研究发展计划项目(973)(2010CB732100); 北京市自然科学基金项目(8112024)

收稿日期: 2011-02-11

土本构模型中都得到了应用。但直到现在它的基本定义和需要满足的必要条件都没有明确和清晰地给出。由此会影响到非饱和土临界状态的准确确定。

非饱和土由于气相的存在，其工程性质变得非常复杂。其应力状态和各相的体积变化也比饱和土复杂很多。有效应力的表示也不仅与孔隙水压力相关，而且还和孔隙气压甚至饱和度相关。这时仅满足式(1)的要求是不能确定非饱和土临界状态的。因此非饱和土到达临界状态时应该满足何种条件？在式(1)的基础上还需要补充哪些条件，才能够描述非饱和土的临界状态？这些问题不解决好，非饱和土力学临界状态的理论及其相应的本构模型的建立是很难得到深化和进一步发展。以往关于非饱和土的临界状态的研究，绝大多数都是通过室内三轴实验，探讨非饱和土是否存在临界状态？如果存在临界状态，则非饱和土到达临界状态时应该满足何种条件？例如 Wheeler 等^[3]、Adams 等^[4]、Ranpino 等^[5]、Wang 等^[6]、Kayadelen 等^[7]研究者采用平均净应力、偏应力、吸力和孔隙比作为描述非饱和土临界状态的状态变量，研究到达临界状态的条件。也有研究者建议除了上述状态变量以外，再增加水的比体积 v_w 或饱和度 S_r 作为独立状态变量。Wheeler 等^[5]通过实验测得的 v_w 在临界状态时没有到达稳定值；而 Ranpino 等^[5]实验测得的 v_w 在临界状态时到达稳定值。Wang 等^[6]指出，采用 v_w 作为非饱和土临界状态的另一个独立状态变量可能并不可靠，需要更多的实验数据支持才能够做出最后的结论。

热力学原理是一种普适的理论。非饱和土的变化过程也必然遵循热力学原理。利用热力学原理可从更普遍的情况（条件）和更一般的视角审视非饱和土变化过程和行为，以便于更好地揭示其复杂行为和性质。本文将从热力学原理出发，研究非饱和土的临界状态。

基于热力学基本原理，针对非饱和土，以更加普遍的观点考虑其临界状态。指出热力学中的稳态是比临界状态土力学中的临界状态具有更加普遍意义和一般性的、描述系统最终到达的状态，而临界状态土力学中的临界状态只是热力学中稳态的一种特例。本文的研究表明：非饱和土的稳态将包含更多的条件和约束，而这一状态是土体变形过程的最终状态和结束点。

1 土体变形过程结束的热力学条件

假定：非饱和土体满足热力学局域平衡的假定。则非饱和土的变化过程就可以用局域平衡态热力学理论近似的描述其非平衡变化过程，即在外力和环境作用下非饱和土的变形过程最终会到达一种稳定平衡状态。局域平衡态热力学理论表明^[8-9]：对于没有质量和能量交换的封闭系统，在环境或外界扰动作用下，系

统在其发展过程中最终将会到达平衡态，此时满足 Gibbs 平衡时系统熵最大定律。按照非饱和土力学通常的做法，本文假定：非饱和土的典型单元为三维轴对称体积单元并与外界没有质量和能量（包括热能）交换。因此典型单元在其变形发展过程中最终将会到达平衡态，并满足 Gibbs 平衡时系统熵最大定律或自由能最小定律。而在等温等容条件下，系统的 Helmholtz 自由能 Ψ 在可逆过程中保持不变；在不可逆过程中总是减少，减少到 Ψ 最小值时系统到达平衡状态^[8-9]。下面给出热力学第一和第二定律^[8]

$$\begin{cases} \dot{W} + \dot{Q} = \dot{U} & \text{热力学第一定律,} \\ S_i = \dot{S} - \dot{Q}/T \geq 0 & \text{热力学第二定律,} \end{cases} \quad (3)$$

式中， W 、 Q 、 U 、 T 、 S_i 和 S 分别是功、热、内能、温度、内熵和总熵。由热力学第一和第二定律可以得到

$$\dot{W} - TS_i = \dot{U} - T\dot{S} = \dot{\Psi} . \quad (4)$$

根据热力学局域稳态平衡的理论^[8-9]，热力学系统到达局域平衡时，Helmholtz 自由能 Ψ 到达极小值，即 $\dot{\Psi} = 0$ ，并且各状态变量保持为常量。因此有

$$\dot{W} - T_s S_i = \dot{U}_s - T_s \dot{S}_s = \dot{\Psi}_s = 0 , \quad (5)$$

式(5)中，右下标 s 表示各状态变量到达稳态时的相应值。

2 非饱和土到达临界状态的条件

分析土力学问题时，最重要的首先是要选择合适的独立状态变量。独立状态变量的选择依赖于所涉及问题的性质和特点、已有的认识（包括理论知识和实验结果等）和研究者的经验等。在外部荷载作用下，用连续介质力学理论通常可以得到总应力 σ 和相应的应变 ε ，而土体中各相的体积变形以及与其对偶的广义应力都是内变量。根据孔隙介质理论，一般选择各相体积分数作为体积应变的内变量，并由此得到与之对偶的各相压力变量。但从土力学界易于接受的角度，本文采用了土力学界普遍使用的应力和参数的术语，即采用文献[10]给出的广义应力变量和与之对偶的广义应变：土骨架的变形 ε^s ，和非饱和土的有效应力 $\tilde{\sigma}$ ；孔隙中液相流体的变化用内变量饱和度 S_r 表示，与孔隙中液相饱和度变化相对偶的广义应力为基质吸力 s ；气相压力 P_a 和气相体积应变 ε_v^a 。

基于多相孔隙介质理论，笔者在文献[10]中假定：土颗粒和水不可压缩，不考虑温度和各相之间的质量交换以及渗流的影响，推导给出了非饱和土功 \dot{W} 的具体表达式为

$$\dot{W} = [\text{tr}(\tilde{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}^s) + sn\dot{S}_r + P_a n^a \dot{\varepsilon}_v^a] , \quad (6)$$

把式(6)带入式(4)后，得

$[\text{tr}(\tilde{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}^s) + sn\dot{S}_r + P_a n^a \dot{\varepsilon}_v^a] - TS_i = \dot{U} - T\dot{S} = \dot{\Psi}$ 。 (7)
式中 $\tilde{\sigma}$ 为文献[10]定义的非饱和土有效应力，具体表达式为 $\tilde{\sigma} = \sigma - [S_r P_w + (1-S_r)P_a]\delta$ ； σ 为总应力， S_r 为饱和度； P_a 为孔隙中气体的本征（真实）压力， P_w 为孔隙中流体的本征（真实）压力； ε^s 为固相应变张量； s 为基质吸力， $s = P_a - P_w$ ； n 为孔隙率； n^a 为气相体积分数， $n^a = n(1-S_r)$ ； ε_v^a 为气相体积应变张量。按照土力学通常的做法，把式(7)用三维轴对称应力和应变空间表示，得

$$[\tilde{p}\dot{\varepsilon}_v^s + q\dot{\varepsilon}_s^s + sn\dot{S}_r + P_a n(1-S_r)\dot{\varepsilon}_v^a] - TS_i = \dot{U} - T\dot{S} = \dot{\Psi}, \quad (8)$$

其中 ε_v^s 和 ε_s^s 分别为固相三轴应变条件下的体积应变和偏应变； \tilde{p} 为与固相体积应变 ε_v^s 相对偶的平均有效压力， $\tilde{p} = 1/3[\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}] = p - [S_r P_w + (1-S_r)P_a]$ ； $p = 1/3[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}]$ 为总应力的平均压力。

下面将从热力学的角度探讨变形过程结束时非饱和土到达稳定平衡状态时所具有的约束条件。非饱和土变形过程结束时根据热力学理论它必然到达稳定的局域平衡状态，这时非饱和土局域的状态变量不随时间而改变，并且 Helmholtz 自由能 Ψ 到达极小值，即 $\dot{\Psi} = 0$ 。这意味着：所有各相的广义应力变量和其它状态变量（除剪切应变外）不随时间而改变。变形过程结束到达稳态时式(8)满足式(5)的要求，即式(8)等于零；再把式(8)分解成为以下两式：

$$\left. \begin{cases} q_s \dot{\varepsilon}_s^s = T_s S_i \\ [\tilde{p}\dot{\varepsilon}_v^s + sn\dot{S}_r + P_a n(1-S_r)\dot{\varepsilon}_v^a]_s = \dot{U}_s - T_s \dot{S}_s = \dot{\Psi}_s = 0 \\ \dot{U}_s = 0 \quad \dot{S}_s = 0 \quad \dot{\Psi}_s = 0 \end{cases} \right\}, \quad (9)$$

式(9)中第一式表明：非饱和土变形过程到达稳态时，根据 Roscoe 等^[1]和 Schofield 等^[2]的研究，其稳态状态变量不包括剪切应变，而且稳态时剪切变形产生的能量假定为系统的全部耗散能量，它们将全部耗散掉（忽略了相对很小的弹性剪切应变及其相应的变形能量），并使系统的熵增加。式(9)中第二式表明：非饱和土变形到达稳态时，Helmholtz 自由能 Ψ 到达极小值， $\dot{\Psi} = 0$ ；即该式等于零。到达稳态时，通常各相的压力不为零，因此等式左端各相的体积变化必然等于零。这一结论非常重要，因为此前人们并不确切知道，也没有具体的概念，即非饱和土到达临界状态时，其各相的体积是否保持不变。有些研究者凭直觉感到非饱和土到达临界状态时，其各相的体积应该保持不变（例如 Ranpino 等^[5]、Wang 等^[6]、Kayadelen 等^[7]），但他们并没有从理论上讨论或论证过。本文利用热力学基本原理论证了非饱和土到达稳定平衡状态时，其各相的体积必然保持不变。由此可以得到

$$\dot{\varepsilon}_v^s = 0, \quad \dot{S}_r = 0, \quad \dot{\varepsilon}_v^a = 0, \quad \dot{\varepsilon}_s^s \neq 0, \quad (10)$$

式(10)中前 3 个等式左端各相的体积变化等于零意味着 ε_v^s ， S_r ， ε_v^a 必须保持为常量，另外为保持式(10)中前 3 个等式左端各相的体积变化等于零，也要求孔隙率 n 保持为常量，否则孔隙率 n 变化也会导致非饱和土中各相体积 ε_v^s ， S_r ， ε_v^a 发生变化，从而不能保证式(9)中第二式等于零。而与上述各式对偶的各相广义压力变量 \tilde{p} ， s ， P_a 和 q 到达稳态平衡时，根据热力学在稳定平衡的要求，它们应保持为常量。另外由 $\tilde{p} = p - [S_r P_w + (1-S_r)P_a]$ 等于常量以及上述到达稳态的条件，可知： p ， P_w ， P_a 以及净压力 $\hat{p} = p - P_a$ 也必然保持为常量不变。

由上述讨论可知，热力学过程发展到最后必到达稳定平衡状态。具体到非饱和土的变形过程，稳态平衡就意味着非饱和土的变形过程到达了最后状态即土力学中的临界状态，这时其相应的临界状态的约束条件为：①各相体积变化应满足式(10)即 $\dot{\varepsilon}_v^s$ ， \dot{S}_r ， $\dot{\varepsilon}_v^a$ 等于零和孔隙率 n 为常量；②各应力变量 p ， q ， P_w ， P_a ， \tilde{p} ， \hat{p} 和 s 则保持为常量。与饱和土力学的临界状态的要求式(1)相比，无疑从热力学的过程到达稳态平衡时非饱和土的约束条件要求的更多，并且这些要求都是针对内变量以及与其相对偶的各相压力变量的要求。它们反映了非饱和土材料在环境变化的作用下其材料本身内部产生变化并到达临界状态时的情况和要求。与通过室内三轴实验探讨非饱和土的临界状态相比（Wheeler 等^[3]、Adams 等^[4]、Ranpino 等^[5]、Wang 等^[6]、Kayadelen 等^[7]、陈正汉等^[11]），给出非饱和土到达稳定状态（临界状态）时的条件是更加全面和完备的，并且其理论基础更加坚实。当然在非饱和土实验中，当变形结束时也许没有到达本文给出的临界状态条件，但这并不说明本文给出的条件是错误的（因为本文的给出的条件是基于具有普适性的热力学理论推导而得到的），而可能是受实验设备和实验条件的限制，（与饱和土相似）土样的变形在到达稳定的临界状态前就因为变形过大而产生了不均匀或破坏。当然这些一般性的条件在特殊情况下是否都需要满足，还是可以研究和讨论的。基于上述非饱和土到达稳态（临界状态）时的一般性条件，讨论在两种特殊情况下非饱和土到达稳态（临界状态）时应满足的条件。

(1) 当不考虑气相压力 P_a 为独立的状态变量时，即忽略式(9)中第 3 项的能量，则可以得到相应的非饱和土临界状态应满足的条件为：各相体积变化应满足式(10)中前 2 项的要求（不考虑第 3 项的要求），以及孔隙率 n 为不变的常量；而与之对偶的各相压力变量 p ， q ， P_w ， \tilde{p} ， \hat{p} 和 s 则保持为常量。

(2) 当不考虑气相压力 P_a 和饱和度 S_r 为独立的状态变量时，则可以得到相应的非饱和土临界状态应

满足的条件为：各相体积变化应满足式（10）中第1项的要求，以及孔隙率 n 为不变的常量；而与之对偶的各相压力变量 p ， q ， P_w ， \tilde{p} ， \hat{p} 和 s 则保持为常量。Alonso等^[12]建立的Barcelona模型使用了净应力 \hat{p} ，基质吸力 s ，偏应力 q ，比体积 v 和剪应变 ε_s^s 作为状态变量；他们给出的到达临界状态的条件属于上面给出的第2种情况。而在Li^[13]和Sun等^[14]给出的耦合模型中，给出的到达临界状态的条件属于上面给出的第1种情况。另外当饱和度等于1时，土体处于饱和状态，基质吸力和气相压力为零，此时本文给出的非饱和土临界状态的约束条件为退化为饱和土临界状态的条件，即等价于式（1）给出的条件。

需要特别指出的是式（9）第二式给出的条件仅是必要条件，而不是充分条件。满足式（9）第二式的土体系统可以是稳定平衡，也可能是某种暂态的平衡。另外土体到达稳态平衡时，虽然其组构可以是各向异性的，但其组构（或更一般的结构），这种结构可能还包括前面给出的某些内变量及其影响），除了剪切应变外，必须保持不变，即达到稳态组构（或稳态结构），这时系统才到达最后的稳态平衡；否则系统虽然满足式（9）第二式，但因其结构未到达稳态结构，土体在不断的剪切应变作用下，其结构不断变化，此时土体的平衡是某种暂态的平衡，其Helmholtz自由能 Ψ 还没有到达极小值，因此不是稳态平衡，即没有到达最后的稳态平衡。根据Li等^[15]的研究，我们定义组构最后到达与加载方向一致的组构为稳态组构（或稳态结构）。

3 结语

本文基于热力学局域到达稳态时Helmholtz自由能 Ψ 到达极小值和相应的平衡条件，假定：土颗粒和水不可压缩，不考虑温度和各相之间的质量交换以及渗流的影响，采用了土力学界普遍使用的术语，即采用文献[10]给出的广义应力变量和与之对偶的广义应变变量以及推导给出的非饱和土功 \dot{W} 的表达式，推导得到了非饱和土到达稳态（临界状态）时应满足的一般性条件。这种条件是更加全面和完备的，并且具有更加坚实的理论基础，而不是通过实验建立的某种特殊土的临界状态的条件。讨论了以往利用室内三轴实验给出的非饱和土到达临界状态的条件，指出这些条件是本文给出的一般性条件在不考虑某些变量为独立状态变量时的特例。

参考文献：

- [1] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, WROTH C P. On the yielding of soils[J]. Géotechnique, 1958, 8(1): 22 - 53.
- [2] SCHOFIELD A N, WROTH C P. Critical state soil mechanics[M].

- London: McGRAW-HILL Book Company, 1968.
- [3] WHEELER S J, SIVAKUMAR V. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil[J]. Géotechnique, 1995, 45(1): 35 - 53.
- [4] ADAMS B A, WULFSOHN D. Variation of the critical-state boundaries of an agriculture soil[J]. European Journal of Soil Science, 1997, 48: 739 - 758.
- [5] RAMPINO C, MANCUSO C, VINALE F. Behavior of a compacted silty sand during suction controlled tests[C]// Proceedings of the 2nd International Conference on Unsaturated Soils, Beijing, China, 1998, 1: 108 - 113.
- [6] WANG Q, PUFAHL D E, FREDLUND D G. A study of critical state on an unsaturated silty soil[J]. Can Geotech J, 2002, 39: 213 - 218.
- [7] KAYADELEN C, SIVRIKAYA O, TASKIRAN T, et al. Critical-state parameters of an unsaturated residual clayey soil from Turkey[J]. Engineering Geology, 2007, 94: 1 - 9.
- [8] 高执隶. 化学热力学基础[M]. 北京：北京大学出版社，2006. (GAO Zhi-li. Elements of chemical thermodynamics[M]. Beijing: Beijing University Press, 2006. (in Chinese))
- [9] 罗九里, 赵南蓉. 从局域平衡热力学到随机热力学[M]. 成都：四川出版集团·四川科学技术出版社，2004. (LUO Jiu-li, ZHAO Nan-rong. From local equilibrium thermodynamics to stochastic thermodynamics[M]. Chengdu: Sichuan Press Company & Sichuan Science and Technology Press, 2004. (in Chinese))
- [10] ZHAO C G, LIU Y. Work and energy equations and the principle of generalized effective stress for unsaturated soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, 34(6): 920 - 936.
- [11] CHEN Zheng-han, SUN Shu-guo. Strength characteristics and critical state of an unsaturated compacted loess[M]// “Strength Theory—Application, Development & Prospects for 21st Century”, YU Mao-hong, FAN Sau-cheong, ed. Beijing and New York: Science Press, 1998, 9: 227 - 232.
- [12] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. Géotechnique, 1990, 40(3): 405 - 430.
- [13] LI X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils: 1: theory[J]. Géotechnique, 2007, 57(5): 411 - 422.
- [14] SUN D A, SHENG D C, CUI H B, et al. A density-dependent elastoplastic hydro-mechanical model for unsaturated compacted soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, 31(11): 1257 - 1279.

- [15] LI X S, DAFALIAS Y F. Anisotropy at critical state: the role
of fabric[C]// 9th HSTAM International Congress on
Mechanics Limassol, Cyprus, 2010.