

底面为曲面基础地基极限承载力上限解

韩长玉，夏小和，王建华

(上海交通大学土木工程系，上海 200240)

摘要：为了解决曲面基础作用于土体的极限承载力问题，改进了 Prandtl 机构和 Hill 机构，利用极限分析理论，得到了底面为曲面基础地基极限承载力的上限解；通过两者的比较，以及与底面为平面基础地基极限承载力的比较，所得的上限解大于处于地基表面的平面基础地基极限承载力的上限解，小于埋深为基础宽度一半的平面基础地基极限承载力的上限解，研究结果可供地基承载力设计及计算参考。

关键词：极限承载力；上限解；曲面基础

中图分类号：TU47 文献标识码：A 文章编号：1000-4548(2012)02-0230-07

作者简介：韩长玉(1979-)，男，河南开封人，博士研究生，主要从事工程力学、岩土工程等方面的研究。E-mail: hanyu02@163.com。

Upper bound solutions of ultimate bearing capacity of curved footing

HAN Chang-yu, XIA Xiao-he, WANG Jian-hua

(Department of Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The bearing capacity of curved footing over foundation soil is considered. In order to solve the ultimate bearing capacity of curved footing on the soil, the Prandtl and the Hill mechanisms are improved. The kinematic approach of the limit analysis is used to calculate the average limit pressure under footings. Using the limit analysis methods, the upper bound solutions of the ultimate bearing capacity are obtained. By comparison, the solutions are greater than those of the ultimate bearing capacity of the plane footing and less than those of the ultimate bearing capacity of the plane footing with which the buried depth is half the width. The analytical solutions can be used for calculation of curved footing.

Key words: ultimate bearing capacity; upper bound solution; curved footing

0 引言

地基极限承载力决定了基础与土体的稳定性，人们通过理论分析、数值模拟和试验等方法，已经对其进行了长期的研究。Prandtl^[1]根据极限平衡理论，求得了软黏性土地基的极限承载力。Terzaghi^[2]根据 Prandtl 理论，提出了考虑土体重量的地基极限承载力公式。Meyerhof^[3-4]考虑了上覆土的抗剪强度，对 Terzaghi 极限承载力公式进行了修正，并且根据极限平衡理论，进一步发展了具有楔形端和圆锥形端基础的极限承载力的理论。武科等^[5]利用有限元软件，研究了桶形基础承载力的特性。Zhao 等^[6]应用滑移线理论，研究了环形基础的极限承载力。Kuo 等^[7]应用极限分析有限元法获得多层黏性土上刚性基础的地基承载力上下限值；徐干成等^[8]利用塑性极限分析法上限定理，结合变分方法分析了土体非均质和各向异性参数对承载力的影响。Al-Shamrani^[9]分别构建了与光滑和粗糙条形基础对应的 5 个三角形刚性块和 6 个三角形刚性块破坏机制来求解地基承载力问题。Yang 等^[10]

基于极限分析上限法，通过构建网格状刚性滑块体系，借助非线性优化程序求解均质地基的极限承载力，得到较理想的解答。与已有研究成果的对比分析表明，该方法是现有各种上限破坏机制中的一种更优机构，因而能够获得更为接近真解的上限解答。黄茂松等^[11]采用三角形多块体破坏机制，研究了非均质和各向异性对粗糙条形基础黏土地基承载力的影响，研究表明该上限解为目前同类方法的较优解答。张其一等^[12]都以极限分析理论为基础，建立了不同地基基础破坏模式，推导了不同基础形式的极限承载力公式。本文是在前人研究的基础上，应用极限分析上限解理论，讨论了底面为曲面基础的地基承载力的上限解。

1 极限分析的上限解定理及破坏机构

在极限分析理论中，如果假设机构满足速度边界

条件及应变与速度相容条件的变形模式，根据外功率等于所消耗的内功率而得到的荷载，不会小于实际破坏的荷载，从而求出的荷载为上限解。

如果所假设的相容塑性变形机构满足位移边界条件 $\dot{u}_i^{(p)} = 0$ ，由外力作的功率等于内部耗损功率，则虚功方程可表示为

$$\int_{A_T} T_i \dot{u}_i^{p^*} dA + \int_V F_i \dot{u}_i^{p^*} dV = \int_v \sigma_{ij}^{p^*} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p^*} dv , \quad (1)$$

式中, \dot{u}_i^p 是机构允许的塑性速率场, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p*}$ 是机构允许的虚塑性应变率场, σ_{ij}^{p*} 是与 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p*}$ 对应的应力场, T_i 和 F_i 分别是边界力和体力场。假设土体服从库仑屈服准则, 即

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad , \quad (2)$$

式中， τ 为剪应力， c 为黏聚力， σ 为压应力， φ 为土的内摩擦角。相关流动法则为

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{\max}}{\dot{\varepsilon}_{\min}} = -\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \quad , \quad (3)$$

式中， $\dot{\varepsilon}_{\max}$ ， $\dot{\varepsilon}_{\min}$ 平面流动主塑性应变率。与运动许可速度场相关联的塑流所消耗的能量，可以根据库仑材料的相关流动法则算出，即

$$D = c\dot{\gamma} \quad , \quad (4)$$

式中, D 为单位体积的能量耗损率, $\dot{\gamma}$ 为剪切应变。

土体的破坏机构形式假设有很多种，经实践证明比较合理且应用较多的假设是 Prandtl 机构和 Hill 机构。

2 利用 Prandtl 机构求解曲面基础地基承载力上限解

如图 1 所示的机构图, 此机构图是由基础底面为平面的 Prandtl 机构演变而来的, 底面为圆柱曲面的基础, 在力 F 的作用下, 压入力学性质服从库仑材料 ($c-\varphi$ 土体) 的地基内, 考虑土体重量 γ 、地基表面均匀荷载 q 作用, 假设土体均匀, 利用内部能量耗损率等于外功率的关系, 可以求得此机构的极限承载力。

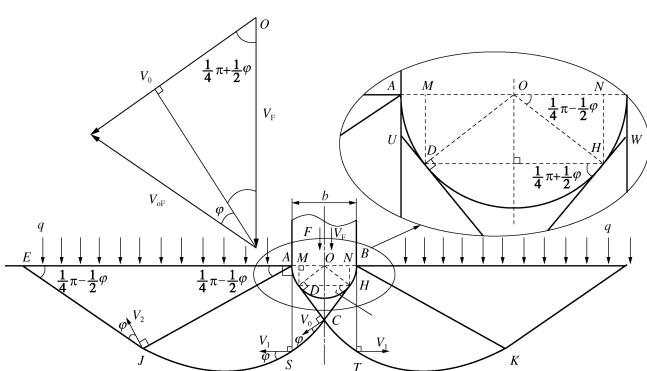


图 1 基于 Prandtl 机构的承载力计算和速度关系图

Fig. 1 Calculation of bearing capacity based on Prandtl mechanism and velocity diagram

由于该图对称于基础轴线，故只需讨论左边的塑性流动区。塑性流动被限制在速度间断线 $AUCSJE$ 以上的区域，该机构是由刚性曲边三角形 DCH 和 AUD ，中心角分别为 $\pi/4 - \varphi/2$ 和 $\pi/4 + \varphi/2$ 的对数螺线受剪区 UCS 和 ASJ ，底角为 $\pi/4 - \varphi/2$ 的等边三角形 AJE 组成的。由于破坏线 $CSJE$ 以下的土体保持静止不动，故 $CSJE$ 是一条速度间断线，因而这条线上各点的速度与该线成一角度 φ 。利用库仑材料相关流动法则，可以分别求出 UCS 和 ASJ 内以及 UC, CJ, JE 上的能量损耗。

设底面为曲面基础的宽度为 b , 利用图 1 的几何关系, 图中各条线的长度均可由 b 表示:

$$\left. \begin{aligned} |AU| &= |DU| = \frac{b}{2} \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right), \\ |DC| &= \frac{b}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \\ |UC| &= \frac{b}{2} \left[\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

设曲面基础向下的速度为 v_F ，由速度相容条件，如图 1 所示，可以分别求出 v_0 、 v_1 和 v_2 。

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} v_F \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \\ v_1 &= \frac{1}{2} v_F \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi}, \\ v_2 &= \frac{1}{2} v_F \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在静止土体与 $CSJE$ 线以上运动土体之间的间断面上, 对数螺线受剪区 UCS 和 ASJ 内以及 UC 上均有能量耗损。

此机构左半部分总的内部能量耗损率为

$$Q = \frac{cbv_0}{2} \left\{ \left[\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] (\cos \varphi - \cot \varphi) - \right.$$

$$\left. \cot \varphi \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} + (\cos \varphi + \cot \varphi) \cdot \right.$$

$$\left. \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi} + \left[\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] e^{\pi \tan \varphi} \right\} \right\} \quad . \quad (7)$$

左半部分表面荷载 q 所作的外功率为

$$W_q = -qbv_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \tan \varphi} + \right. \\ \left. [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi} \right\} \quad . \quad (8)$$

土体的重度为 γ ，左半部分重力所作的外功率 W_γ 为

$$\begin{aligned}
W_\gamma = & \frac{\gamma v_0 b^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left[\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \right] + \\
& \frac{\gamma v_0 b^2}{8(1+9\tan^2\varphi)} \left[e^{3(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 3 \tan\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \cdot \\
& \left[\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\kappa}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]^2 - \frac{\gamma v_0 b^2}{8(1+9\tan^2\varphi)} e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} \left\{ 1 + \right. \\
& \left. [3 \tan\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{3(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} \right\} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \right. \\
& \left. [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} \right\}^2 - \frac{\gamma v_0 b^2}{8} \cdot \cos\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} - \right. \\
& \left. \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} + [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] \cdot \right. \\
& \left. e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \right\}^2 .
\end{aligned} \quad (9)$$

极限荷载 F 所作的外功率的一半为

$$W_F = \frac{1}{2} F v_F . \quad (10)$$

使总的内部能量耗损率与基础极限荷载 F 所做的外功率相等:

$$Q = W_F + W_q + W_\gamma , \quad (11)$$

可以得到

$$F = cbN_c + qbN_q + \frac{1}{2}\gamma b^2 N_\gamma . \quad (12)$$

所以底面为曲面基础地基极限承载力的上限解 p_u 为

$$p_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma . \quad (13)$$

式中, p_u 为地基极限承载力 (kPa), c 为土体黏聚力 (kPa), φ 为土体内摩擦角, q 为表面荷载 (kN/m^2), γ 为土体重度 (kN/m^3), b 为基础底面的宽度 (m)。

承载力系数 N_c , N_q , N_γ 分别由下式确定:

$$\begin{aligned}
N_c = & \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left\{ [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] \cdot \right. \\
& [\cos\varphi - \cot\varphi] - \cot\varphi \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} + [\cos\varphi + \\
& \cot\varphi] \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{(\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} + [\cos\varphi + \cot\varphi] [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \right. \\
& \left. \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{\pi\tan\varphi} \}, \\
N_q = & \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} . \\
& \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} + [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \right\},
\end{aligned}$$

$$N_\gamma = -\left[\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] - \frac{1}{4(1+9\tan^2\varphi)}.$$

$$\begin{aligned}
& \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left[e^{3(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 3 \tan\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \cdot \\
& [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)]^2 + \frac{1}{4(1+9\tan^2\varphi)} \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \\
& \left\{ 1 + [3 \tan\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{3(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} \right\} \cdot \\
& \{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} \}^2 \cdot \\
& e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} + \frac{1}{4} \cos\varphi \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) \cdot \\
& e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})\tan\varphi} + [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)] e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \}^2 .
\end{aligned}$$

3 利用 Hill 机构求解曲面基础地基承载力上限解

如图 2 所示, 底面为曲面基础, 在力 F 作用下, 压入力学性质服从库仑材料 ($c-\varphi$ 土体) 的土体内, 失稳滑动模型服从 Hill 机构模式, 同时考虑土体重量 γ 、表面均匀荷载 q 作用。

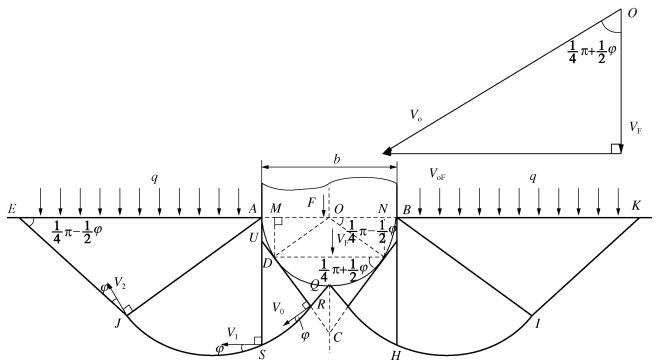


图 2 基于 Hill 机构的承载力计算和速度关系图

Fig. 2 Calculation of bearing capacity based on Hill mechanism and velocity diagram

由于该图对称于基础轴线, 故只需讨论机构的左半部分。塑流被限制在速度间断线 $QRSJE$ 以上的区域, 该机构是由刚性曲边三角形 DRQ 和 AUD , 中心角分别为 $\pi/4 - \varphi/2$ 和 $\pi/4 + \varphi/2$ 的对数螺线受剪区 URS 和 ASJ , 底角为 $\pi/4 - \varphi/2$ 的等腰三角形 AJE 组成的。由于破坏线 $QRSJE$ 以下的土体保持静止不动, 故 $QRSJE$ 是一条速度间断线, 因而这条线上各点的速度与该线成一角度 φ 。利用库仑材料相关流动法则, 可以分别求出 URS 和 ASJ 内以及 QR , EJ 上的能量损耗。

基础宽度为 b , 利用图 2 的几何关系, 图中各条线的长度均可由 b 表示:

$$\left. \begin{aligned} |AU| &= |DU| = \frac{b}{2} \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right), \\ |DC| &= \frac{b}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \\ |QR| &= \frac{1}{2} b \sec \varphi [1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

基础向下的速度为 v_F , 由速度相容条件(图2), 可以分别求出 v_0 , v_1 和 v_2 :

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v_F \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \\ v_1 &= v_F \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\tan\varphi}, \\ v_2 &= v_F \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

在静止土体与 QRSJE 线以上运动土体之间的断面上, 对数螺线受剪区 URS 和 ASJ 内均有能量耗损。

此机构左半部分总的内部能量耗损率为

$$\begin{aligned} Q &= \frac{cbv_0}{2} \cot \varphi \{ \tan \varphi [1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] - \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) - \\ &\quad \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + \sec \varphi [1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] - \\ &\quad \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) e^{\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + (1 + \sin \varphi) \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) \cdot \\ &\quad e^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + \sec \varphi (1 + \sin \varphi) [\cos \varphi \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \\ &\quad \cos \varphi \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] e^{\pi\tan\varphi} \}. \end{aligned} \quad (16)$$

左半部分表面荷载 q 所作的外功率为

$$\begin{aligned} W_q &= -qbv_0 \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \{ \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) e^{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + \\ &\quad \sec \varphi [\cos \varphi \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \cos \varphi \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 1 + \\ &\quad \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \}. \end{aligned} \quad (17)$$

土体重度为 γ , 左半部分重力所作的外功率 W_γ 为

$$\begin{aligned} W_\gamma &= \frac{\gamma v_0 b^2}{4} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \left\{ \frac{1}{2} \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) - \frac{\pi}{4} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sec \varphi [1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]^2 \right\} + \frac{\gamma v_0 b^2}{8(1+9\tan^2\varphi)} \cdot [e^{3(\frac{\pi-\varphi}{4})\tan\varphi} - \\ &\quad \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 3 \tan \varphi \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] \cdot \sec^2 \varphi [\cos \varphi \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \\ &\quad \cos \varphi \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]^2 - \frac{\gamma v_0 b^2}{8(1+9\tan^2\varphi)} e^{\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\tan\varphi} \cdot \\ &\quad \left\{ 1 + [3 \tan \varphi \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] e^{3(\frac{\pi+\varphi}{4})\tan\varphi} \right\} \left\{ \tan(\frac{\pi}{8} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\varphi}{4}) + \sec \varphi [\cos \varphi \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \cos \varphi \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\varphi}{2})] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \frac{\varphi}{2} \right] e^{\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\tan\varphi} \right\}^2 - \frac{\gamma v_0 b^2}{8} \cos \varphi \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \left\{ \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) \cdot \right. \\ &\quad \left. e^{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + \sec \varphi [\cos \varphi \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \cos \varphi \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \right. \\ &\quad \left. 1 + \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \right\}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

极限荷载 F 所做的外功率的一半为

$$W_F = \frac{1}{2} F v_F. \quad (19)$$

使总的内部能量耗损率与外功率相等:

$$Q = W_F + W_q + W_\gamma, \quad (20)$$

可以得到

$$F = cbN_c + qbN_q + \frac{1}{2}\gamma b^2 N_\gamma. \quad (21)$$

所以底面为曲面基础地基极限承载力的上限解 p_u 为

$$p_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma. \quad (22)$$

承载力系数 N_c , N_q , N_γ 分别由下式确定:

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{\cot \varphi}{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})} \left\{ \tan \varphi [1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] - \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) - \right. \\ &\quad \left. \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\cos \varphi} - \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) e^{\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + (1 + \right. \\ &\quad \left. \sin \varphi) \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) e^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + (1 + \sin \varphi) [\tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \right. \\ &\quad \left. \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\cos \varphi}] e^{\pi\tan\varphi} \right\}, \\ N_q &= \frac{2}{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})} \cdot \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \left\{ \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) \cdot e^{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)\tan\varphi} + \right. \\ &\quad \left. [\tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\cos \varphi}] e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \right\}, \\ N_\gamma &= - \left\{ \frac{1}{2} \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) - \frac{\pi}{4} - \frac{[1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]^2}{2 \cos \varphi} \right\} - \\ &\quad \frac{1}{2(1+9\tan^2\varphi) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})} \cdot [e^{3(\frac{\pi-\varphi}{4})\tan\varphi} - \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 3 \tan \varphi \cdot \\ &\quad \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] \cdot [\tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\cos \varphi}]^2 + \\ &\quad \frac{1}{2(1+9\tan^2\varphi) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})} \left\{ 1 + [3 \tan \varphi \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] e^{3(\frac{\pi+\varphi}{4})\tan\varphi} - \right. \\ &\quad \left. \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) \cdot \sec \varphi [\cos \varphi \tan(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}) + \cos \varphi \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi} \right\} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \right. \\ & \left. \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi} \right]^2 e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \cos\varphi \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi} + [\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \right]^2 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

4 结果比较

4.1 底面为曲面基础两种地基极限承载力解的比较

表 1 给出了底面为曲面基础地基极限承载力系数 N_c 与内摩擦角的对应关系。从表 1 中可以看出, 地基极限承载力系数 N_c 随着内摩擦角的增加而增加; 利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数 N_c , 始终小于利用 Hill 机构求解的地基极限承载力系数。由极限分析上限定理知道, 上限解越小越接近准确解, 说明利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数 N_c 更接近于真实地基极限承载力系数。

表 2 给出了底面为曲面基础地基极限承载力系数 N_q 与内摩擦角的对应关系。从表 2 中可以看出, 地基极限承载力系数 N_q 是内摩擦角的增函数; 利用 Hill 机构求解的地基极限承载力系数 N_q 始终大于利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数, 说明利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数 N_q 更接近于真实地基极限承载力系数。

表 3 给出了底面为曲面基础地基极限承载力系数 N_γ 与内摩擦角的对应关系。从表 3 中我们可以看出, N_γ 随着内摩擦角的增加而增加; 当 φ 小于 38.5° 时, 利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数 N_γ 小于利用 Hill 机构求解的地基极限承载力系数; 当 φ 大于 38.5° 时, 利用 Hill 机构求解的地基极限承载力系数 N_γ 小于利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数。说明当 φ 小于 38.5° 时, 利用 Prandtl 机构求解的地基极限承载力系数 N_γ 更接近于真实地基极限承载力系数, 当 φ 大于 38.5° 时, 利用 Hill 机构求解的地

基极限承载力系数 N_γ 更接近于真实地基极限承载力系数。

4.2 与底面为平面基础地基极限承载力的比较

底面为平面基础的地基极限承载力为

$$p_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma. \quad (23)$$

承载力系数 N_c , N_q , N_γ 分别由以下式子确定:

$$N_c = \cot\varphi[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)e^{\pi\tan\varphi} - 1],$$

$$N_q = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)e^{\pi\tan\varphi},$$

$$N_\gamma = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)e^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)\tan\varphi} - 1] + \frac{3\sin\varphi}{1+8\sin^2\varphi} \cdot \{[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\cot\varphi}{3}]e^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)\tan\varphi} + \frac{\cot\varphi}{3}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + 1\}.$$

基础底面为平面, 埋深为基础宽度一半的地基极限承载力的上限解为

$$p_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma. \quad (24)$$

承载力系数 N_c , N_q , N_γ , β 分别由下式确定:

$$N_c = \cot\varphi[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \beta\right) \cdot \sec\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{\varphi}{2} + \beta\right) \cdot e^{\pi\tan\varphi} - 1],$$

$$N_q = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} \left(e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} + \frac{1}{2}\right),$$

$$N_\gamma = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sec\varphi \csc\beta \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \beta\right) e^{\pi\tan\varphi} + \frac{\sec\varphi}{2(1+9\tan^2\varphi)} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \{[3\tan\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)]e^{\frac{3\pi}{2}\tan\varphi} + 3\tan\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\} + \frac{1}{4}\cot\beta e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi},$$

$$\tan\beta = \frac{1}{(2e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} + 1)} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

图 3 为 N_c 的计算结果曲线图, 从图 3 中可以看出, N_c 随着内摩擦角的变化呈递增关系; 上面曲线是埋深为 $b/2$ 底面为平面基础的地基承载力系数 N_c 曲线, 中间曲线为底面为曲面基础的地基承载力系数 N_c 曲线, 下面是底面为平面基础的地基承载力系数曲线。

表 1 地基承载力系数 N_c 随 φ 的变化

Table 1 Variation of N_c with φ

$\varphi / (\text{°})$	5	10	15	20	25	30	35	40
Prandtl 机构	7.391	9.428	12.287	16.437	22.711	32.667	49.433	79.833
Hill 机构	10.704	13.693	17.840	23.783	32.638	46.470	69.368	110.129

表2 地基承载力系数 N_q 随 φ 的变化Table 2 Variation of N_q with φ

$\varphi /(^{\circ})$	5	10	15	20	25	30	35	40
Prandtl 机构	1.954	2.983	4.625	7.326	11.944	20.223	35.984	68.366
Hill 机构	3.218	4.813	7.306	11.321	18.038	29.823	51.764	95.835

表3 地基承载力系数 N_y 随 φ 的变化Table 3 Variation of N_y with φ

$\varphi /(^{\circ})$	5	10	15	20	25	30	35	40
Prandtl 机构	1.484	2.612	4.711	8.754	16.873	34.114	73.575	173.290
Hill 机构	2.150	3.549	6.039	10.627	19.431	37.295	76.344	170.493

如图4所示, 为 N_q 的计算结果曲线图, 从图中我们可以看出, 地基极限承载力系数 N_q 随着内摩擦角的变化而变化, 呈非线性增加关系; 中间曲线为底面为曲面基础的地基承载力系数 N_q 曲线, 上面是埋深为 $b/2$ 底面为平面基础的地基承载力系数曲线, 其下面是底面为平面基础的地基承载力系数曲线。

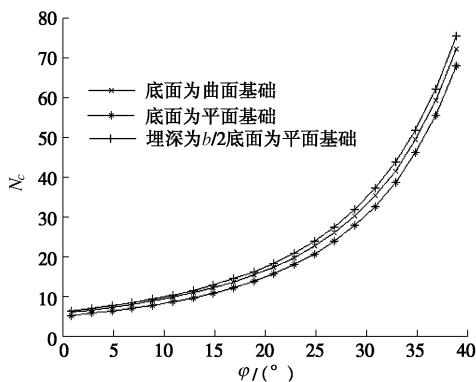
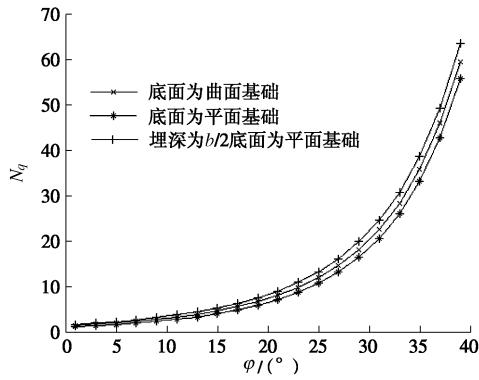
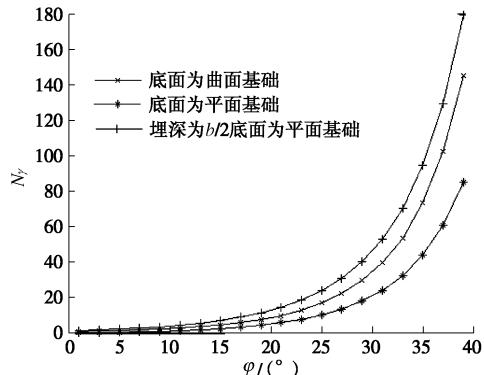
图3 地基承载力系数 N_c 随内摩擦角变化曲线Fig. 3 Relationship between N_c and φ 图4 地基承载力系数 N_q 随内摩擦角变化曲线Fig. 4 Relationship between N_q and φ

图5为 N_y 的计算结果曲线图, 从图5中可以看出, N_y 随着内摩擦角的增加而增加; 底面为平面基础的地基承载力系数 N_y 曲线处于最下面, 上面是埋深为 $b/2$ 底面为平面基础的地基承载力系数曲线, 底面为曲面

基础的地基承载力系数曲线处于中间位置。

图5 地基承载力系数 N_y 随内摩擦角变化曲线Fig. 5 Relationship between N_y and φ

5 结 论

本文研究了底面为曲面基础的地基极限承载力, 通过改进 Prandtl 机构和 Hill 机构模型, 计算各部分的内耗能、重力功率和荷载功率, 由机构的内、外能量率相等, 得到了底面为曲面基础的地基极限承载力的上解。得出如下 3 点结论。

(1) 由改进的 Prandtl 机构和 Hill 机构得到了底面为曲面基础的地基极限承载力的上解, 承载力系数 N_c , N_q , N_y 随着内摩擦角的增加而增加, 由改进的 Prandtl 机构得到的上解小于由改进的 Hill 机构得到的上解, 说明由改进的 Prandtl 机构得到的上解更接近真实解。

(2) 通过与底面为平面基础地基承载力系数 N_c , N_q , N_y 的比较, 底面为曲面基础的地基承载力, 大于在地基表面的底面为平面基础的地基承载力, 小于埋深为基础宽度一半的底面为平面基础的地基承载力。

(3) 底面为曲面基础的地基极限承载力的上解, 大于或等于真实解, 但是与工程计算中用底面为平面基础的地基承载力系数, 代替底面为曲面基础的地基承载力系数相比较, 所得的分析结果更接近实际

情况。

参考文献:

- [1] PRANDTL L. Über die eindringungsfestigkeit (harte). Plastischer baustoffe und die festigkeit von seheiden[J]. Journal of APPLIED Mathematics and Mechanics(ZAMM), 1921, **1**(1): 15 - 20.
- [2] Terzaghi. Soil mechanics in engineering practice[M]. New York: Wiley, 1976.
- [3] MEYERHOF G G. The ultimate bearing capacity of foundations[J]. Géotechnique, 1951(2): 301.
- [4] MEYERHOF G G. The Ultimate Bearing Capacity of Wedgeshaped foundations[J]. Soil Mechanics, 1961, 2: 105.
- [5] 武科, 栾茂田, 范庆来, 等. 倾斜荷载作用下桶形基础承载力特性研究[J]. 岩土力学, 2009, **30**(4): 1095 - 1101. (WU Ke, LUAN Mao-tian, FAN Qing-lai, et al. Studies of bearing capacity of bucket foundation against inclined loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(4): 1095 - 1101. (in Chinese))
- [6] ZHAO Lan, WANG Jian-hua. Influence of nonassociativity on the bearing capacity factors of a circular footing[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University(Science), 2009(4): 429 - 434.
- [7] KUO Y L. ANN-based model for predicting the bearing capacity of strip footing on multi-layered cohesive soil[J]. Computers and Geotechnics, 2008(7): 503 - 416.
- [8] 徐干成, 李成学, 刘平. 各向异性和非均质地基土上浅基础的极限承载力[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(2): 164 - 168. (XU Gan-cheng, LI Cheng-xue, LIU Ping. Ultimate bearing capacity of shallow footing on anisotropic and nonhomogeneous clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(2): 164 - 168. (in Chinese))
- [9] AL-SHAMRANI M A. Upper-bound solutions for bearing capacity of strip footings over anisotropic nonhomogeneous clays[J]. Soils and Foundations, The Japanese Geotechnical Society, Tokyo, 2005, **45**(1): 109 - 124.
- [10] YANG Feng, YANG Jun-sheng, A revised failure mechanism of strip footings for upper bound solution[J]. Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2008, Bundle F, 13:1 - 17.
- [11] 黄茂松, 秦会来, 郭院成. 非均质和各向异性黏土地基承载力的上限解[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(3): 511 - 518. (HUANG Mao-song, QIN Hui-lai, GUO Yuan-cheng. Upper bound solution for bearing capacity of nonhomogeneous and anisotropic clay foundation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(3): 511 - 518. (in Chinese))
- [12] 张其一, 栾茂田, 袁凡凡, 等. 复合加载情况下非均匀地基上矩形基础承载力研究[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(7): 970 - 975. (ZHANG Qi-yi, LUAN Mao-tian, YUAN Fan-fan, et al. Bearing capacity of rectangular footings on inhomogeneous foundation under combined loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(7): 970 - 975. (in Chinese))

第十二届环境岩土工程与全球可持续发展国际研讨会 (第一号通知)

由国际环境岩土工程协会 (ISEG) 主办的第十二届环境岩土工程与全球可持续发展国际研讨会将于 2012 年 6 月 27 日~29 日在美国洛杉矶举行。会议面向广大来自学术界、工业界和政府部门的研究人员、工程设计人员以及管理人员, 欢迎参加。

2012 年 2 月 3 日摘要提交截止日期; 2012 年 3 月 30 日全文提交截止日期。其他详细信息请登录网站:
<http://www.isegnet.org/2012>。

(南京大学地球科学与工程学院 施斌 唐朝生 供稿)