

# 利用初流量法分析有自由面渗流问题之改进

潘树来<sup>1</sup>, 王全凤<sup>1</sup>, 俞 缙<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学土木工程学院, 福建 厦门 361021; 2. 中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221008)

**摘 要:** 在利用初流量法分析带有自由面的渗流问题时, 常因采用高斯积分点作为结点初流量计算判断依据所带来的误差而令解出现振荡。为了减低这一因素的影响及提高计算的效率, 针对常用的 4 结点平面单元和 8 结点 6 平面三维单元的自由面方程进行分析, 提出采用坐标变换和等参变换等技术来改造结点初流量的计算, 并建议按自由面穿越单元之状况引用分部积分, 使其积分上、下限符合高斯积分法的格式化要求, 从而可利用高斯积分法求出精确的结点初流量, 而精确的结点初流量则有助于改善解的振荡及提高计算结果的精度。通过一矩形均质坝实例分析, 表明该方法的稳定性和收敛性良好。

**关键词:** 初流量法; 有自由面渗流; 高斯积分法; 固定网格

中图分类号: TV139.11

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2012)02-0202-08

**作者简介:** 潘树来(1967-), 男, 澳门人, 博士研究生, 从事计算方法和岩土工程研究。E-mail: punsuloi@yahoo.com.hk。

## Improvement of analysis of free surface seepage problem by using initial flow method

PUN Su-loi<sup>1</sup>, WANG Quan-feng<sup>1</sup>, YU Jin<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China; 2. State Key Laboratory for Geomechanics and Deep

Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)

**Abstract:** When the initial flow method is applied in solving problems of free surface seepage, we often find an oscillating solution determined due to the error caused by taking the Gaussian integration points as the assumed nodes based on calculation of nodal initial flow. In order to reduce the impact of this factor and to improve the efficiency of computation, an analysis is made with the free surface equation commonly used by 4-node plane elements and 8-node 6-plane three-dimensional elements, a technique of transformation of coordinates as well as isoparameters is proposed to improve the calculation of the nodal initial flow, and an introduction of partial integration is also suggested according to the state of free surface penetrating elements, making the integration upper limit and lower limit in consistence with the formatting of the Gaussian requirements. Accordingly, an exact nodal initial flow integration will be obtained by using the Gaussian method, and this accurate nodal initial flow will then benefit the itself improvement of the oscillating solution and increase the precision of the calculation. Through the analysis of a homogeneous rectangular case, it is shown that a fair state of stability and convergence has been achieved by using the proposed improved method.

**Key words:** initial flow method; unconfined seepage; Gaussian integration method; fixed mesh

## 0 引 言

利用有限元技术分析基坑、边坡、堤坝等岩土工程时, 常会遇到地下水渗流的问题。处理这类有自由面渗流问题的难点在于其自由面(浸润面)位置为未知, 一般需要通过迭代求解。目前求解的方法可分为变网格法和固定网格法两大类。

变网格法是确定自由面的一种传统方法, 虽然已取得了不少成功经验, 但此方法也存有致命缺点: 每次迭代都要先确定自由面的位置及调整总体传导矩阵, 计算量大; 同时, 在调整网格时容易造成单元网

格畸变或交错重叠, 影响计算精度; 另外, 由于非渗流区域没有被考虑到分析系统中去, 故不适用于作应力场与渗流场耦合分析, 限制了它在工程中的应用。因此, 变网格法已逐步被淘汰。

为了解决变网格法的缺点, 学者们开始尝试采用

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51109084); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(200803850001); 福建省自然科学基金项目(2011J01317); 中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室开放基金项目(SKLGDEK1012); 泉州市科技计划项目(2010Z81)  
收稿日期: 2010-11-09

扩大分析系统范围的办法, 将渗流区与非渗流区结合起来形成总分析系统, 并引入总系统的边界条件作分析, 以达到求解过程中无需变更单元网格的目的, 从而形成了固定网格法。自 Neumann 于 1973 年提出用不变网格分析有自由面渗流的 Galerkin 法以来, 先后出现了多种固定网格法, 如剩余流量法<sup>[1]</sup>、单元渗透矩阵调整法<sup>[2]</sup>、初流量法<sup>[3]</sup>、节点虚流量法<sup>[4]</sup>、虚节点法<sup>[5]</sup>、改进节点虚流量法<sup>[6]</sup>等。在众多固定网格法中, 由于初流量法具有理论明确、只需一次形成总体传导矩阵、无需在每次迭代时确定自由面的近似位置和判别自由面与单元相交状况等优点, 因此, 初流量法是目前利用固定网格法求解有自由面渗流问题的一种较为有效方法。

在应用初流量法时, 关键是要算出自由面每次迭代时由初流量所引起的结点初流量值  $Q_0$  (记作结点“初”流量, 用作区分由边界条件所产生的结点流量), 而  $Q_0$  的误差与选用的积分计算方法密切相关。对于那些被自由面穿过的单元, 初流量法建议只取位于自由面之上的积分点作计算, 明显地, 此方法未能充分考虑由自由面所分割出非渗流区的实际形状及此位置上被积函数的大小和分布, 因此计算得出的  $Q_0$  带有很大的主观性和误差, 对于那些体积较大或自由面刚好位于积分点附近的单元来说, 误差就更大。而过大的误差将影响渗流场有限元方程的迭代计算, 令解出现振荡。

为了减小结点初流量之误差, 人们提出了多种不同的改进方法, 例如: 朱伯芳<sup>[7]</sup>建议自由面附近单元每排高斯积分点的数量应不小于 3, 使每个高斯积分点控制的面积尽可能小; 王媛<sup>[8]</sup>提出的改进初流量法, 针对影响初流量法解不稳定的主要因素提出了区域识别函数的新概念, 对不连续的区域识别函数进行了线性微调, 使之连续化, 从而降低了初流量法解的不稳定性; 李新强<sup>[9]</sup>提出引入连续调整系数法的概念来改进利用初流量法求解自由面的计算精度, 实例表明, 经改进后的初流量法稳定性和收敛性良好。

总的来说, 上述改进初流量法均建立在减小结点初流量的误差的基础上, 但这些方法均未能彻底解决计算方法本身所造成的误差。而本文提出的改进, 主要通过对自由面方程进行研究, 利用换元技术将自由面由曲线变为直线, 然后再透过等参变换及高斯积分法直接求出结点初流量。基于高斯积分法理论, 若选取的高斯积分点数量足够, 则计算所得的数值解为精确解, 因此, 本文改进方法只会出现计算精度之误差, 并不会出现计算方法上之误差。

## 1 初流量法简介

初流量法的基本原理类似于非线性应力分析中的初应力法, 即在达西定律中增加一个初流量项, 通过对初流量的调整, 将非线性分析化为一系列线性分析, 相关方程的推导可参见文献[3, 8], 其结果为

$$[M] \cdot [h] = [Q] + [Q_0] \quad (1)$$

式中,  $[M]$  为总体传导矩阵,  $[h]$  为结点水头列矩阵,  $[Q]$  为由边界条件引起的结点流量列矩阵,  $[Q_0]$  为由初流量引起的结点初流量列矩阵,

$$[Q_0] = \sum_e ([A]_e)^T \int_{\Omega_e} [B]^T ([K] - [K_0]) [B] h_e d\Omega \quad (2)$$

式中,  $[A]_e$  为整体组装的单元选择矩阵,  $[B]$  为几何矩阵, 其关系如式 (3) 所示,  $h_e$  为单元内结点水头,  $[K]$  为渗透矩阵,  $[K_0]$  为渗透修正矩阵,  $K_{ij}$ ,  $K_{j0}$  为介质渗透张量, 饱和区  $K_{j0} = K_{ij}$ , 非饱和区  $K_{j0} = 0$ ,

$$[B] = [B_1, B_2, \dots, B_8], B_i = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_i}{\partial z} \right]^T \quad (3)$$

其中,  $N_i$  为 8 结点单元的形函数。

为便于表述, 记  $F(x, y, z) = [B]^T ([K] - [K_0]) \cdot [B] h_e$ , 则结点初流量列矩阵方程可表示为

$$[Q_0] = \sum_e ([A]_e)^T \int_{\Omega_e} F(x, y, z) d\Omega \quad (4)$$

从式 (2) 可以看出, 饱和区单元的结点初流量为 0, 非饱和区单元的则可通过数值积分计算得出。

## 2 初流量法之改进

### 2.1 二维 4 结点四边形渗流单元

对于图 1 (a) 所示的平面 4 结点四边形单元, 经等参变换转为图 1 (b) 时, 单元的水头  $h$  和高度坐标  $z$ 、结点初流量列矩阵可分别表示为

$$\begin{cases} h = N_1 h_1 + N_2 h_2 + N_3 h_3 + N_4 h_4 \\ z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4 \end{cases} \quad (5)$$

$$\{Q_0\} = \sum_e ([A]_e)^T \int_{\Omega_e} F(x, z) \cdot |J|_{\xi\zeta} d\xi d\zeta \quad (6)$$

式 (6) 中, 由于  $F(x, z)$  要用到形函数对旧坐标  $(x, z)$  的微分, 但形函数是以新坐标  $(\xi, \zeta)$  表示, 两者需通过雅可比矩阵作变换。另外, 由自由面定义 ( $h=z$ ) 可得出自由面曲线方程为

$$N_1(h_1 - z_1) + N_2(h_2 - z_2) + N_3(h_3 - z_3) + N_4(h_4 - z_4) = 0 \quad (7)$$

式 (7) 是一个带有常数  $\xi$ ,  $\zeta$  和  $\xi\zeta$  项的二次多项式, 基于组成特点可改写为

$$(a_1 + a_2 \xi) + (a_3 + a_4 \xi) \zeta = 0 \quad (8)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= +(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) + (h_3 - z_3) + (h_4 - z_4), \\ a_2 &= -(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) - (h_3 - z_3) + (h_4 - z_4), \\ a_3 &= +(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) - (h_3 - z_3) - (h_4 - z_4), \\ a_4 &= -(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) + (h_3 - z_3) - (h_4 - z_4). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)经整理后,可得

$$\zeta = -\frac{a_2}{a_4} + \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_4 (a_3 + a_4 \xi)} \quad (10)$$

令  $p = \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_4 (a_3 + a_4 \xi)}$  进行坐标变换,则可将自由面

方程由曲线变为式(11)表示的直线,它与单元的关系如图1(c)所示,而位于自由面上结点3、4的坐标值可通过式(11)、(12)求出:

$$\zeta = -\frac{a_2}{a_4} + p \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_4 (a_3 + a_4 \xi)}, \\ \xi &= \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_4^2 p} - \frac{a_3}{a_4} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

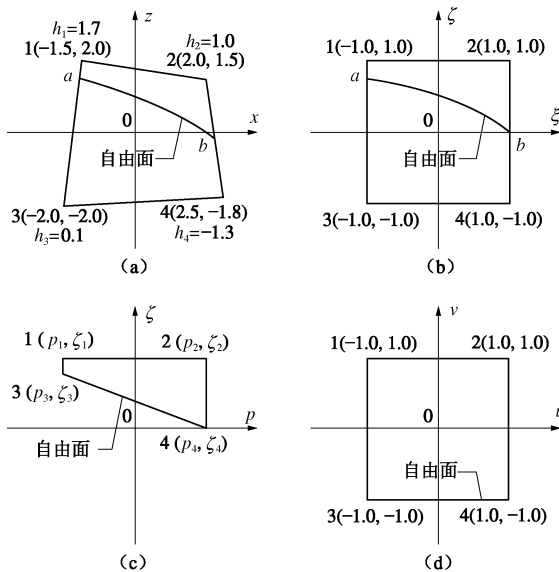


图1 带自由面的平面4结点单元

Fig. 1 A 4-node plane element with free surface

将式(11)、(12)代入式(6),便可得出经坐标变换后的结点初流量方程为

$$\left\{ Q_0 \right\} = \sum_e \left( [A]_e \right)^T \int_{p_3=p_3}^{p_4=p_4} \int_{\zeta_s=-\frac{a_2}{a_4}+p}^{\zeta_s=+1} F(x, z) \cdot |J|_{\xi\zeta} \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{a_4^2 p^2} dp d\zeta \quad (13)$$

式(13)中,由于积分区间是一个如图1(c)所示的四边形,故可再进行一次等参变换,使之变成如图1(d)的标准单元,然后便可通过高斯积分法算出结点初流量的值。在等参变换时,新旧坐标关系如式(14)所示,另外,由于旧单元有一组对边与坐标轴

平行,其雅可比矩阵必有元素  $\partial p / \partial v$  或  $\partial \zeta / \partial u$  为0,因此,新旧坐标面积元的关系为

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{4} \left[ (1-u)(1+v)p_1 + (1+u)(1+v)p_2 + (1-u)(1-v)p_3 + (1+u)(1-v)p_4 \right], \\ \zeta &= \frac{1}{4} \left[ (1-u)(1+v)\zeta_1 + (1+u)(1+v)\zeta_2 + (1-u)(1-v)\zeta_3 + (1+u)(1-v)\zeta_4 \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$dp dv = \frac{1}{16} \left[ (-p_1 + p_2 - p_3 + p_4) + (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4)v \right] \cdot \left[ (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4) + (-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4)u \right] du dv \quad (15)$$

将式(15)代入式(13),经整理后便可得出最终的结点初流量方程为

$$\left\{ Q_0 \right\} = \sum_e \left( [A]_e \right)^T \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha_p F(x, z) \cdot |J|_{\xi\zeta} du dv \quad (16)$$

式中,  $\alpha_p$  可被称为二维转换因子,

$$\alpha_p = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{16 a_4^2 p^2} \left[ (-p_1 + p_2 - p_3 + p_4) + (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4)v \right] \cdot \left[ (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4) + (-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4)u \right] \quad (17)$$

式(16)的积分上、下限已符合高斯积分法的格式化要求,可通过式(18)高斯积分法求出其数值解。

$$\left\{ Q_0 \right\} = \sum_e \left( [A]_e \right)^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j \cdot \alpha_p F(x_i, z_j) \cdot |J|_{\xi\zeta} \quad (18)$$

式中的变量  $x$  和  $z$ , 应先透过雅可比矩阵变为  $\xi$  和  $\zeta$ , 然后再通过式(12)、(14)转换为最终的变量  $u$  和  $v$ 。

#### (1) 单元结点初流量计算结果之验证

为了验证本文的改进方法,现以图1所示的均质单元 ( $K_{ij}=K$ ) 为例,分别采用积分法、以积分点是否位于非渗流区为判断准则的初流量法及本文改进方法进行结点初流量计算,结点初流量的积分分解为  $Q_{01} = 1.152704078K$ ,  $Q_{02} = 0.930373421K$ ,  $Q_{03} = -0.650222894K$ ,  $Q_{04} = -1.432854606K$ ,其它方法的计算结果列于表1、2。

从表1可看出,初流量法算出的结点初流量误差很大,达到以倍数计,而随着积分点数量增加,误差并没有改善。从表2可看出,本文改进方法能有效地降低误差,随着积分点数量增加,误差改善明显,当每行积分点取为5时,计算结果的相对误差只有百万分之几,说明本文方法计算效果理想。

#### (2) 自由面穿越平面单元的可能性及其模拟

从式(8)可看出,自由面是一条光滑的二次曲线,它穿越单元的种类可归纳为图2所示的4种情况。对于图2(a)、(b)的情况,可按前述方法直接求出结点1234范围的结点初流量。至于图2(c)、(d)之情



表 1 由初流量法算出之结点初流量数值解及其与积分解之比较

Table 1 Numerical solutions calculated by initial flow method and comparison between them and integral ones

每行积	$Q_{01}$		$Q_{02}$		$Q_{03}$		$Q_{04}$	
分点数	数值解	$\varepsilon$	数值解	$\varepsilon$	数值解	$\varepsilon$	数值解	$\varepsilon$
4	0.483804197K	-0.5803	1.742284226K	0.8727	-0.046087282K	-0.9291	-2.180001141K	0.5214
5	0.658980423K	-0.4283	1.942164814K	1.0875	-0.114630806K	-0.8237	-2.486514430K	0.7354
6	0.535642414K	-0.5353	1.747497602K	0.8783	-0.080516974K	-0.8762	-2.202623042K	0.5372

注：表中  $\varepsilon$ =(数值解-积分解)/积分解。

表 2 由本文改进方法算出之结点初流量数值解及其与积分解之比较

Table 2 Numerical solutions calculated by present improved method and comparison between them and integral ones

每行积	$Q_{01}$		$Q_{02}$		$Q_{03}$		$Q_{04}$	
分点数	数值解	$\varepsilon$	数值解	$\varepsilon$	数值解	$\varepsilon$	数值解	$\varepsilon$
4	1.152805902K	$8.833 \times 10^{-5}$	0.930271439K	$-1.096 \times 10^{-4}$	-0.650285165K	$9.577 \times 10^{-5}$	-1.432792176K	$-4.357 \times 10^{-5}$
5	1.152708965K	$4.240 \times 10^{-6}$	0.930367909K	$-5.925 \times 10^{-6}$	-0.650225256K	$3.633 \times 10^{-6}$	-1.432851618K	$-2.085 \times 10^{-6}$
6	1.152704234K	$1.353 \times 10^{-7}$	0.930373205K	$-2.322 \times 10^{-7}$	-0.650222911K	$2.614 \times 10^{-8}$	-1.432854528K	$-5.444 \times 10^{-8}$

注：表中  $\varepsilon$ =(数值解-积分解)/积分解。

况，由于自由面曲线光滑及其上、下方必为非渗流区及渗流区，故自由面与  $\xi=\pm 1$  边界必有交点，基于分部积分原理，可分别求出结点 1234 和 1'2'3'4 范围的结点初流量，然后相减得出所需的解。

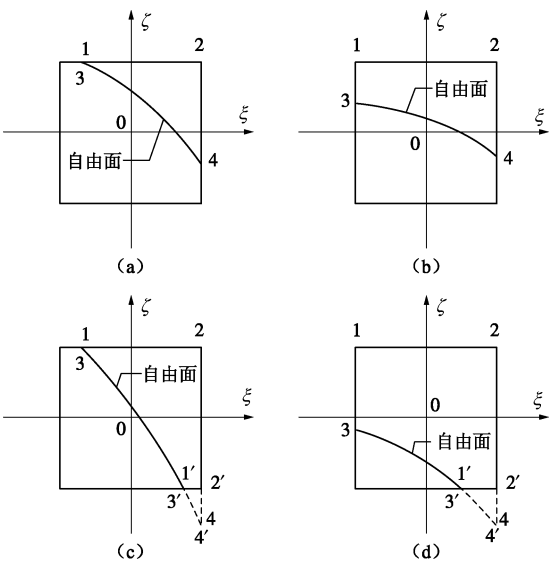


图 2 自由面穿越单元之状况

Fig. 2 Conditions of free surface through element

2.2 三维 8 结点 6 平面渗流单元

对于图 3 (a) 所示的等参单元，由自由面定义可得出自由面的曲面方程为

$$N_1(h_1 - z_1) + N_2(h_2 - z_2) + \cdots + N_8(h_8 - z_8) = 0。(19)$$

经整理后，式 (19) 可改写为

$$\zeta = -\frac{b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta}{b_5 + b_6\xi + b_7\eta + b_8\xi\eta}，(20)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= +(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) + (h_3 - z_3) + (h_4 - z_4) + \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) + (h_7 - z_7) + (h_8 - z_8), \\ b_2 &= -(h_1 - z_1) - (h_2 - z_2) - (h_3 - z_3) - (h_4 - z_4) + \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) + (h_7 - z_7) + (h_8 - z_8), \\ b_3 &= -(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) - (h_3 - z_3) + (h_4 - z_4) - \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) - (h_7 - z_7) + (h_8 - z_8), \\ b_4 &= +(h_1 - z_1) - (h_2 - z_2) + (h_3 - z_3) - (h_4 - z_4) - \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) - (h_7 - z_7) + (h_8 - z_8), \\ b_5 &= +(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) - (h_3 - z_3) - (h_4 - z_4) + \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) - (h_7 - z_7) - (h_8 - z_8), \\ b_6 &= -(h_1 - z_1) - (h_2 - z_2) + (h_3 - z_3) + (h_4 - z_4) + \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) - (h_7 - z_7) - (h_8 - z_8), \\ b_7 &= -(h_1 - z_1) + (h_2 - z_2) + (h_3 - z_3) - (h_4 - z_4) - \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) + (h_7 - z_7) - (h_8 - z_8), \\ b_8 &= +(h_1 - z_1) - (h_2 - z_2) - (h_3 - z_3) + (h_4 - z_4) - \\ &\quad (h_5 - z_5) + (h_6 - z_6) + (h_7 - z_7) - (h_8 - z_8)。 \end{aligned} \right\} (21)$$

在式 (20) 中，由于其分母带有  $\xi$  和  $\eta$  的相加和相乘项，无法将公式右侧部分分拆为  $\xi$  和  $\eta$  的独立项，故不能直接采用 2.1 节中坐标变换方法将自由面方程由曲面变为平面。然而，基于三维高斯积分原理，可先对某一坐标进行处理，将原属三维积分问题变为二维问题，从而可引用前述方法作计算。

由于自由面方程具有光滑及其上、下方必为非渗流区和渗流区的特点，当自由面同时穿过单元的顶、底面时，切割出顶面的范围必大于底面，因此，在选定先进行高斯积分计算的坐标时，应以自由面与单元顶面相交的状况作参考。另外，为了确保符合高斯积分的格式化要求，还应遵从以下两项原则：①选定的

坐标, 其积分区域应为 $[-1, +1]$ 或可通过单一坐标变换变为 $[-1, +1]$ ; ②在选定坐标的积分区域内, 其它两个坐标的积分下限应只有自由面一组方程, 若不能满足时, 可参考分部积分原理将单元划分为不同部分去处理。

对于图 3 (a) 所示的等参单元, 其顶面如图 3 (b) 所示, 应取坐标  $\eta$  先行处理。在此实例中,  $\eta$  的积分区域刚好为 $[-1, +1]$ , 否则, 可以以  $\eta$  方向下方的坐标  $\eta_x$  及上方坐标  $\eta_s$  作变换:

$$\eta = \frac{1}{2}[(\eta_x + \eta_s) + (-\eta_x + \eta_s)q] \quad (22)$$

而相应的自由面方程变为

$$\zeta = -\frac{[2b_1 + (\eta_x + \eta_s)b_3] + [2b_2 + (\eta_x + \eta_s)b_4]\xi + [2b_5 + (\eta_x + \eta_s)b_7] + [2b_6 + (\eta_x + \eta_s)b_8]\xi + (-\eta_x + \eta_s)b_3q + (-\eta_x + \eta_s)b_4\xi q}{(-\eta_x + \eta_s)b_7q + (-\eta_x + \eta_s)b_8\xi q} \quad (23)$$

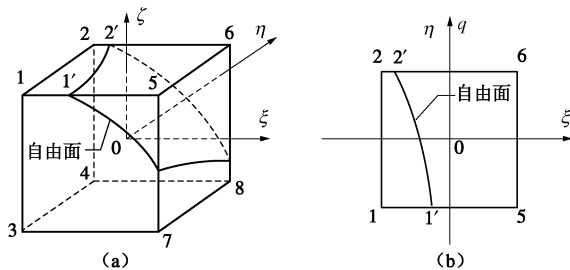


图 3 带自由面的 8 结点 6 平面等参单元

Fig. 3 8-node with 6-plane isoparametric element with free surface

以式 (22) 代入结点初流量方程, 并先对坐标  $q$  进行高斯积分处理后, 结点初流量方程及自由面方程可改写为

$$\{Q_0\} = \sum_e ([A]_e)^T \sum_{i=1}^n \frac{-\eta_x + \eta_s}{2} H_i \cdot \int_{\Omega_i} F(x, y, z) \cdot |J|_{\xi\eta\zeta} d\xi d\zeta \quad (24)$$

$$\zeta = -\frac{c_1 + c_2\xi}{c_3 + c_4\xi} \quad (25)$$

式中,  $c_1 = 2b_1 + (\eta_x + \eta_s)b_3 + (-\eta_x + \eta_s)b_3q_i$ ,  $c_2 = 2b_2 + (\eta_x + \eta_s)b_4 + (-\eta_x + \eta_s)b_4q_i$ ,  $c_3 = 2b_5 + (\eta_x + \eta_s)b_7 + (-\eta_x + \eta_s)b_7q_i$ ,  $c_4 = 2b_6 + (\eta_x + \eta_s)b_8 + (-\eta_x + \eta_s)b_8q_i$ 。

在对坐标  $q$  先进行高斯积分处理后, 原三维积分问题会变成在高斯积分点  $q_i$  上的二维积分问题, 而由于自由面在  $q_i$  平面上变成一条如式 (8) 所示的二次多项式, 因此, 完全可参照 2.1 节所介绍的平面问题方法作处理, 最终可得出三维 8 结点 6 平面渗流单元的结点初流量方程为

$$\{Q_0\} = \sum_e ([A]_e)^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k \cdot \alpha_s F(x_j, y_i, z_k) |J|_{\xi_j \eta_i \zeta_k} \quad (26)$$

式中,  $\alpha_s$  是三维转换因子,

$$\alpha_s = \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{32 c_4^2 p^2} [(-p_1 + p_2 - p_3 + p_4) + (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4)v] \cdot [(\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4) + (-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4)u] (-\eta_x + \eta_s) \quad (27)$$

与平面单元相比, 自由面穿越三维空间单元的状况要复杂得多, 单以被自由面切割出位于非渗流区的结点就有 1~7 个这 7 种情况, 而且每种情况也有不同形式的组合。因此, 需要找出这些情况的规律, 才能用简洁的方法进行模拟。

在使用高斯积分法时, 必须确保其积分边界由唯一的一道方程组成, 否则, 应采用分部积分处理, 基于此原则性要求, 可按积分边界的实际情况来划分分部积分的范围。在参照 2.2 节的方法选定水平面坐标  $\eta$  先进行高斯积分计算时, 可以以自由面与单元顶、底面相交的情况作判断。当自由面与单元底面相交而使积分下限由自由面和单元底面两部分组成时, 可先计算由单元顶面与自由面所组成的部分, 然后再扣除由单元底面与下方自由面所组成的多算部分。自由面与单元顶、底面相交大致有图 4 所示的 4 种情况, 对于 (a)、(c) 两种情况, 可直接求出由结点 1256 和自由面所组成范围的结点初流量, 至于 (b)、(d) 两种情况, 可分别计算由结点 1256 和自由面、及 1'2'5'6' 和自由面所组成范围的结点初流量, 然后相加便得出答案。总的来说, 不管自由面穿越单元的状况有多复杂, 按以上方法最多只需分四部分积分便可得出单元的结点初流量。

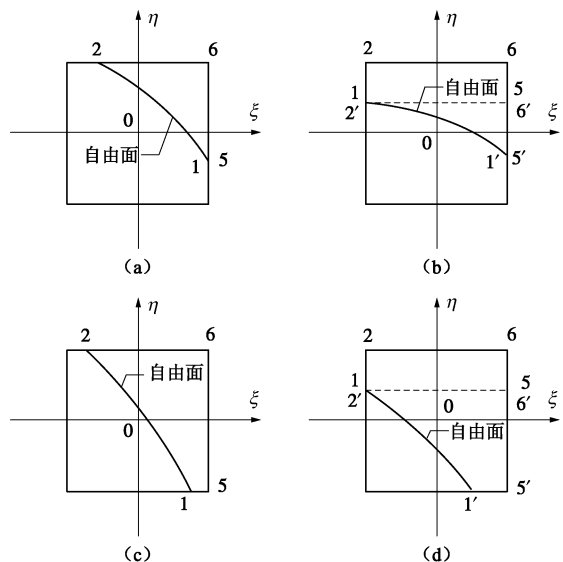


图 4 自由面穿越单元顶面或底面之状况

Fig. 4 Conditions of free surface across top or bottom of element

### 3 算 例

为考察本文的改进方法, 现以图 5 所示的尺寸为

表 3 本文改进方法与电模拟试验及其它数值方法算出的自由面位置之比较

Table 3 Comparison among free surface locations calculated by present improved method, electrical simulation tests and other numerical methods

X/m	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
电模拟试验解 <sup>[4]</sup>	10.00	9.78	9.31	9.05	8.31	7.91	7.64	6.93	5.86	5.47	4.73
节点虚流量法 <sup>[4]</sup>	10.00	9.74	9.38	9.01	8.51	8.03	7.41	6.77	6.05	5.19	4.33
初流量法 <sup>[3]</sup>	10.000	9.745	9.394	9.010	8.520	8.030	7.429	6.807	6.085	5.179	4.373
改进初流量法 <sup>[8]</sup>	10.000	9.745	9.393	9.007	8.517	8.025	7.428	6.805	6.076	5.189	4.375
本文方法	10.000	9.745	9.390	9.006	8.517	8.026	7.427	6.807	6.073	5.190	4.372

表 4 单元内取不同积分点数对自由面位置计算结果之影响

Table 4 Effect on free surface locations as calculated by different integral points in an element

X/m		1.0	2.0	4.0	5.0	6.0	8.0	9.0	10.0
初流量法 <sup>[3]</sup>	n=4	9.74456422	9.38660153	8.52668053	8.01962504	7.42305721	6.04434523	5.19150219	4.35736189
	n=6	9.74708443	9.39383819	8.50831200	8.02884265	7.42898608	6.08077863	5.17896002	4.37434586
	n=8	9.74526472	9.39423747	8.51976529	8.03042584	7.42874248	6.08482345	5.17892745	4.37291666
	n=12	9.74505825	9.38907987	8.51509911	8.02798520	7.42650419	6.06731194	5.19102046	4.37092718
	n=20	9.74543610	9.38906513	8.51650679	8.02423404	7.42485014	6.06825654	5.18957853	4.37307322
改进初流量法 <sup>[8]</sup>	n=4	9.74411992	9.39383364	8.51432509	8.03262801	7.42683849	6.06099322	5.18786827	4.36537094
	n=6	9.74217857	9.39353273	8.51315461	8.03044627	7.43166839	6.08984415	5.19330771	4.37448693
	n=8	9.74465622	9.39300503	8.51728275	8.02484575	7.42763178	6.07570802	5.18872026	4.37489685
	n=12	9.74561049	9.38877210	8.51499016	8.02671112	7.42688040	6.06859015	5.19193588	4.37178340
	n=20	9.74524344	9.38964076	8.51675472	8.02526564	7.42560006	6.06989673	5.18988792	4.37208832
本文方法	n=4	9.74483860	9.39000990	8.51700719	8.02605093	7.42717994	6.07300624	5.19015159	4.37167357
	n=6	9.74483847	9.39000957	8.51700631	8.02604989	7.42717822	6.07300392	5.19017199	4.37165322
	n=8	9.74483847	9.39000957	8.51700630	8.02604989	7.42717822	6.07300391	5.19017214	4.37165306
	n=12	9.74483847	9.39000957	8.51700630	8.02604989	7.42717822	6.07300391	5.19017214	4.37165306
	n=20	9.74483847	9.39000957	8.51700630	8.02604989	7.42717822	6.07300391	5.19017214	4.37165306

注：表中  $n$  为单元每行的高斯积分点个数。

10 m×10 m×1 m 均质土坝作分析，土坝上、下游水位分别为 10 m 和 2 m，底部为不透水边界，下游渗出面边界取为  $h=z$ 。建立计算模型时网格划分为 100 个 1 m×1 m×1 m 的 8 结点 6 平面单元，共有 242 个结点。在按自由面位置算出结点初流量后，再使用迭代法分析时，计算精度取  $\varepsilon=1.0\times10^{-10}$ 。利用自编的三维有限元程序，在取单元每行的积分点为 8 个及自由面经 5 次迭代后，得出的自由面位置与其它几种方法的对比见于表 3，自由面及等势线关系见图 5，从表 3 中的计算结果与试验解及其它数值解之吻合状况可说明本文改进方法正确可靠。

对于图 5 的实例，当采用不同的积分点时，自由面经 5 次迭代计算后得出的自由面位置见于表 4。从表 4 可看出，随着积分点数量增加，由初流量法及改进初流量法算得的自由面位置并不稳定，而本文方法在取单元每行的积分点为 8 个及更多后，计算出的结果已基本相同，此情况只有在结点初流量值相等或很接近时才会出现，说明本文方法在取一定积分点后计算得出的结点初流量精确可靠。

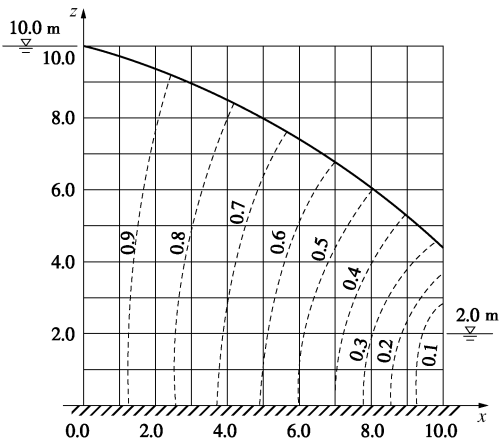


图 5 本文改进方法分析出的自由面及等势线位置

Fig. 5 Free surface and equipotential line introduced from analysis of present improved method

为了解本文方法的收敛性和稳定性，现仍以图 5 之实例及取单元每行的积分点为 8 个进行分析，得出相连两次迭代后自由面的差值如表 5 所示，经不同次数迭代后自由面位置平均振幅见于表 6。从表 5 可看出，随着迭代次数增加，改进初流量法及本文方法的

表 5 迭代过程中自由面位置之差值  $\Delta Z_x$

Table 5 Relative variation of positions of free surface during process of iteration											$10^{-3} \text{ m}$
$X/\text{m}$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	
初流量法 <sup>[3]</sup>	$m1$	0.48960	-3.76474	7.28274	-2.96292	7.69665	-1.27308	3.71088	15.37869	-13.87860	6.99741
	$m2$	-1.79971	-3.97404	-6.56062	-7.14040	-1.95096	-7.02647	-9.36627	-18.62471	-7.61812	8.64576
	$m3$	-0.16075	-0.20919	-0.18919	-0.12912	-2.03389	1.30232	0.82216	1.42518	-0.84766	-0.56081
	$m4$	-2.34283	-4.96191	-7.44869	-10.34540	-0.88154	-3.14072	-4.46625	-10.45283	-11.75001	8.18625
	$m5$	2.56906	3.12337	-1.91917	0.38388	-9.73114	-3.71854	-0.09049	-2.49503	-5.41478	-3.01875
改进初流量法 <sup>[8]</sup>	$m1$	1.26948	-2.27627	5.53256	-5.89217	4.52104	-4.16896	1.36528	4.38954	-7.35246	6.33244
	$m2$	0.01635	0.04856	0.00594	0.26233	-0.03658	-0.18547	-0.21764	-0.26936	0.25751	-0.01017
	$m3$	-0.00963	0.06935	-0.04008	0.16696	-0.09038	0.03642	-0.03468	0.01027	-0.00464	-0.00615
	$m4$	-0.00305	0.02086	-0.01228	0.04700	-0.02936	0.02315	-0.01103	0.00169	-0.00169	-0.00165
	$m5$	-0.00023	0.00159	-0.00080	0.00280	-0.00304	0.00881	-0.00308	0.00117	-0.00097	-0.00008
本文方法	$m1$	1.34429	-1.66091	5.54837	-6.34768	3.19275	-5.32658	-1.21207	-3.86146	-8.05529	6.92156
	$m2$	0.00656	0.06169	0.00514	0.16447	-0.05580	-0.17242	-0.13321	-0.09844	0.12880	0.03815
	$m3$	-0.01036	0.06183	-0.03077	0.12033	-0.07049	0.03251	-0.01614	0.01016	-0.00009	0.00043
	$m4$	-0.00312	0.01824	-0.00869	0.03060	-0.01990	0.01622	-0.00534	0.00215	-0.00084	0.00019
	$m5$	-0.00024	0.00143	-0.00054	0.00161	-0.00169	0.00555	-0.00169	0.00072	-0.00109	0.00012

注：表中  $m1$  至  $m5$  分别为自由面迭代第 5 次与第 6 次、第 19 次与第 20 次、第 49 次与第 50 次、第 99 次与第 100 次、第 199 次与第 200 次后自由面位置之差值。

表 6 迭代过程中自由面位置振荡幅度  $\overline{A_x}$

Table 6 Oscillation status of free surface positions during process of iteration												$10^{-3} \text{ m}$
$X/\text{m}$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	$\Sigma \overline{A_x}$	
初流量法 <sup>[3]</sup>	$m=6$	14.5473	32.9337	61.4520	67.5861	87.5100	83.0733	85.2027	79.0039	37.6047	50.3186	599.2323
	$m=20$	5.9945	12.9753	19.9561	33.9217	34.2263	42.7009	39.5425	36.9030	26.0910	25.5855	277.8969
	$m=50$	2.9083	6.6171	8.8677	16.1121	14.5126	24.5079	18.6154	19.6721	14.1336	13.2631	139.2099
	$m=100$	1.8043	3.9223	5.5151	9.8913	8.2443	14.2740	11.2014	12.9504	10.4071	7.8459	86.0561
	$m=200$	1.4613	3.6404	4.2980	7.1166	5.7753	8.5216	7.4657	9.8966	7.8475	5.6813	61.7042
改进初流量法 <sup>[8]</sup>	$m=6$	15.1553	31.8510	61.1093	67.1200	85.9975	82.3619	84.5831	76.8926	37.8349	48.5895	591.4950
	$m=20$	6.7552	11.7124	19.6022	33.8725	33.7073	42.1221	38.5667	36.5524	24.3484	24.0856	271.3249
	$m=50$	3.3154	5.4523	7.9278	16.4482	14.3176	22.6951	17.4706	17.1225	11.2087	12.4428	128.4010
	$m=100$	1.7638	2.8809	4.1788	8.4634	7.3617	12.6601	9.6031	9.6027	5.8793	6.8185	69.2124
	$m=200$	0.9023	1.8847	2.4700	4.9605	4.5222	6.6279	5.3143	5.1449	3.0163	3.5805	38.4236
本文方法	$m=6$	15.3403	30.9915	61.0436	66.6384	85.8328	81.9176	85.3673	77.4744	37.7349	49.5371	591.8779
	$m=20$	6.6195	10.9688	19.6044	33.3045	33.8376	40.0969	37.7068	37.4200	24.6651	24.7593	268.9827
	$m=50$	3.1224	5.0116	7.9337	16.4110	14.3994	20.7011	17.0704	17.5121	11.8750	12.8764	126.9130
	$m=100$	1.6438	2.6640	4.0631	8.5475	7.3931	11.4497	9.0592	9.3932	6.3294	7.1213	67.6641
	$m=200$	0.8362	1.7409	2.2993	4.2934	4.1963	5.9966	4.8363	4.9260	3.2798	3.7705	36.1752

注： $\overline{A_x} = \sum_{i=1}^m |(Z_{xi} - \overline{Z_x})| / m$ ， $\overline{Z_x} = \sum_{i=1}^m Z_{xi} / m$ ， $m$  为迭代次数。

表 7 位于自由面及其以上区域的高斯积分点总数

Table 7 Total Gaussian integral points located on and above free surface										
自由面迭代次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
初流量法 <sup>[3]</sup> 积分点总数	0	189860	196800	185960	182480	181840	181980	181840	181700	181760
改进初流量法 <sup>[8]</sup> 积分点总数	0	189860	196780	185960	182500	181880	181840	181780	181740	181720
本文方法积分点总数	0	189860	196760	185960	182500	181920	181780	181780	181680	181660
自由面迭代次数	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
初流量法 <sup>[3]</sup> 积分点总数	181780	181740	181540	181580	181580	181560	181600	181540	181580	181560
改进初流量法 <sup>[8]</sup> 积分点总数	181680	181620	181620	181600	181580	181580	181580	181600	181600	181600
本文方法积分点总数	181620	181600	181600	181620	181620	181640	181640	181640	181620	181620
自由面迭代次数	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48
初流量法 <sup>[3]</sup> 积分点总数	181540	181600	181620	181620	181580	181620	181640	181620	181620	181600
改进初流量法 <sup>[8]</sup> 积分点总数	181600	181620	181620	181600	181620	181620	181620	181620	181620	181660
本文方法积分点总数	181640	181640	181640	181640	181640	181640	181640	181640	181640	181640

收敛明显，而本文方法整体上要比改进初流量法更理想。从表 6 可看出，改进初流量法及本文方法解的振荡要比初流量法的小，而随着迭代次数增加，本文方法的普遍要比改进初流量法的小。说明本文方法的收



敛性和稳定性更好。

另外, 对于图5之实例, 在取较不利的单元每行积分点为20个后, 由初流量法、改进初流量法及本文方法所算得的位于自由面及其以上区域的积分点总数列于表7。从表7可看出, 本文方法的积分点数变动较其它两种方法的小, 并随迭代次数增加而趋向稳定。

## 4 结 论

(1) 建立在高斯积分法上的本文改进方法, 只要选取的积分点数量足够, 计算出的结点流量精确可靠, 而正由于结点流量精度高, 可大大地提高求解渗流场有限元方程时解的稳定性和收敛性, 提高计算效率, 有利于进行大型、复杂的渗流分析。

(2) 本文的改进方法, 具有原理简洁、易于模拟自由面穿越单元的不同状况、计算简便、计算结果可靠等特点, 适用于平面4结点及三维8结点6平面等线性单元, 而经适当处理后, 也适用于其它线性单元。

(3) 实例分析表明, 本文改进方法的稳定性和收敛性要优于传统的初流量法及现行的改进初流量法。

### 参考文献:

- [1] DESAI C S. Finite element residual schemes for unconfined flow[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, **10**(6): 1415 - 1418.
- [2] BATHE K J, KHOSHGOFTAAR M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration[J]. International Journal of Numerical Analytical Methods in Geomechanics, 1979, **3**(1): 13 - 22.
- [3] 张有天, 陈 平, 王 镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988(8): 18 - 26. (ZHANG You-tian, CHEN Ping, WANG Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1988(8): 18 - 26. (in Chinese))
- [4] 速宝玉, 朱岳明. 不变网格确定渗流自由面的节点虚流量法[J]. 河海大学学报, 1991, **19**(5): 113 - 117. (SU Bao-yu, ZHU Yue-ming. Procedure of nodal virtual flux for seepage free surface with fixed mesh[J]. Journal of Hohai University, 1991, **19**(5): 113 - 117. (in Chinese))
- [5] 凌道盛. 有自由面渗流分析的虚节点法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2002, **36**(3): 243-246, 326. (LING Dao-sheng. Virtual node method for seepage with free surface problem[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2002, **36**(3): 243-246, 326. (in Chinese))
- [6] 崔皓东, 朱岳明. 有自由面渗流分析的改进节点虚流量全域迭代法[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2009, **33**(2): 238 - 241. (CUI Hao-dong, ZHU Yue-ming. Improved procedure of nodal virtual flux of global iteration to solve seepage free surface[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2009, **33**(2): 238 - 241. (in Chinese))
- [7] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 第2版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998: 254 - 255. (ZHU Bo-fang. The finite element method theory and applications[M]. 2nd ed. Beijing: China WaterPower Press, 1998: 254 - 255. (in Chinese))
- [8] 王 媛. 求解有自由面渗流问题的初流量法的改进[J]. 水利学报, 1998(3): 68 - 73. (WANG Yuan. The modified initial flow method for 3-D unconfined seepage computation [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1998(3): 68 - 73. (in Chinese))
- [9] 李新强. 无压渗流有限元分析的改进初流量法[J]. 水利学报, 2007, **38**(8): 961 - 965. (LI Xin-qiang. Modified initial flow method for FEM analysis of unconfined seepage[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, **38**(8): 961 - 965. (in Chinese))