

# 基于统一硬化参数的砂土临界状态本构模型

姚仰平，余亚妮

(北京航空航天大学交通科学与工程学院，北京 100191)

**摘要：**在临界状态理论的基础上，通过引入状态参数来调整硬化参数和剪胀方程，从而更好地反映砂土的剪胀、剪缩特性以及砂土对密度、有效主应力的双重依赖性，通过引入修正屈服函数的参数，能更好地描述砂土的塑性变形特性。同时，模型采用砂土等向固结线和临界状态线在孔隙比与有效应力幂函数平面内呈线性关系，并且只用一组材料参数即可描述在较大密度和较大有效应力范围内砂土的应力应变响应。通过模拟结果与试验结果对比，验证了模型的有效性。

**关键词：**砂土；临界状态；状态参数；硬化参数；本构模型

中图分类号：TU441 文献标识码：A 文章编号：1000-4548(2011)12-1827-06

作者简介：姚仰平(1960-)，男，陕西西安人，博士，教授，博士生导师，主要从事土的基本特性和本构模型研究。

E-mail: ypyao@buaa.edu.cn。

## Extended critical state constitutive model for sand based on unified hardening parameter

YAO Yang-ping, YU Ya-ni

(Department of Civil Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Based on the unified hardening parameter, an extended critical state constitutive model for sand is proposed. One state parameter is used to adjust the hardening parameter and dilatancy equation, giving a better description of dilatancy and contraction behavior for sand. The other parameter is used to revise the yield function, predicting the plastic deformation more appropriately. The introduction of the parameters into the model emphasizes the dependency on both the density and the effective principal stress of sand. The linear isotropic consolidation and the critical state lines are applied in void ratio versus the power of the effective mean stress space. The combined effect of the density and the effective mean stress on sand can be described by the proposed model using a unique set of model parameters in a wide range of density and confining pressure. A comparison between model simulations and experimental results shows the validity of the proposed model.

**Key words:** sand; critical state; state parameter; hardening parameter; constitutive model

## 0 引言

大量的试验研究结果表明，砂土的变形行为不仅依赖于其相对密度也依赖于所处的固结压力<sup>[1-2]</sup>。相同有效应力下，密度低的砂剪缩，密度高的砂剪胀；相同密度的砂，在较小围压下剪胀，而在较大围压下则可能发生剪缩。以往的许多模型都将不同密度的同种砂视为不同的材料<sup>[3-5]</sup>，采用不同的模型参数，忽视了加载过程中材料状态的改变，不能很好地描述砂土受力过程中密度和围压变化较大的情况。为了统一反映密度和压力对砂土变形特性的耦合影响，Been 等<sup>[1]</sup>提出了一个状态参数，此后 Jefferies 等<sup>[6]</sup>，Manzari 等<sup>[7]</sup>，Li 等<sup>[8-9]</sup>，Ling 等<sup>[10]</sup>以及 Constantine<sup>[11]</sup> 都在此方面开展了卓有成效的研究工作。

本文基于临界状态概念，通过引入状态参数 $\psi$ ，

使得硬化参数 $H^{[12-14]}$ 和剪胀方程都依赖于状态参数而变化，又通过引入参数 $\chi$ 来修正屈服函数，从而更好地模拟砂土的塑性变形。同时本文采用等向固结线 NCL 和临界状态线 CSL 在  $e - (p/p_a)^{\xi}$  平面内呈线性关系，强化了模型中砂土对于密度和平均有效应力的双重依赖性，本文对一种砂土只需采用一组材料参数即可描述较大的密度和较大压力范围内砂土的排水和不排水应力应变响应。

## 1 临界状态线和状态参数

临界状态线定义为剪切中砂土的体应变增量为

基金项目：国家自然科学基金项目（50879001, 10872016, 11072016）

收稿日期：2010-11-01

0, 偏应变增量为无穷大的一个状态。经过研究发现, 砂土的临界状态线在  $e - \lg p$  平面上并非直线<sup>[15-17]</sup>。Li 等<sup>[18]</sup>对早期文献研究后提出, 砂土的临界状态线在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面上近似为直线, 建议采用下式拟合:

$$e_c = e_{c0} - \alpha_c \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (1)$$

式中  $e_{c0}$  为  $p=0$  时对应于临界状态线上孔隙比的值,  $\alpha_c$  是 CSL 的斜率;  $p_a$  是标准大气压, 通常取 100 kPa,  $\xi$  是材料常数。在图 1 中, 通过对比 Verdugo 和 Ishihara 于 1996 年对 Toyoura 砂土的试验数据与 Li 和 Wang 提出的拟合曲线发现, 式(1)能较好地反映砂土的临界状态特性。

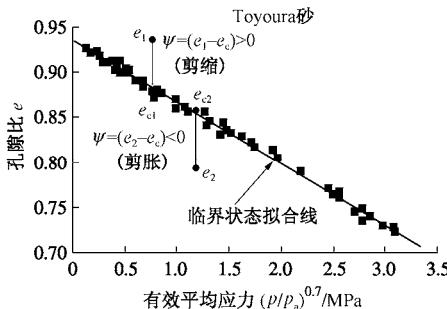


图 1 在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面 Toyoura 砂临界状态线及其拟合线

Fig. 1 Critical state line of Toyoura sand and fitted line in  $e$  versus  $(p/p_a)^\xi$  space

如果仅仅知道  $e$  和  $p$  的值, 还不足以确定该砂土的密实程度, 因为缺乏一个相对固定的状态作为参考。Been 等<sup>[1]</sup>将砂土的临界状态线作为参考, 定义了一个状态参量  $\psi$ , 用来描述砂土的当前状态。 $\psi$  的定义如图 1 所示, 其值为当前有效平均正应力下的孔隙比  $e$  与临界孔隙比  $e_c$  之差, 表示为

$$\psi = e - e_c \quad (2)$$

这样, 只要知道砂土的当前状态  $(e, p)$ , 就能确定砂土目前处于什么状态。当  $\psi > 0$ , 砂土剪切时会发生剪缩, 当  $\psi < 0$ , 砂土处于相对密实状态, 剪切时会发生剪胀。可见,  $\psi$  可以作为反映砂土剪胀程度的参量。

## 2 砂土等向固结特性

对于砂土, 其固结特性与黏土截然不同, 在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面上不存在唯一的等向固结线, 而是有无数条等向固结线 ICLs, 彼此之间也不平行。基于砂土等向固结线与临界状态线规律相似性的假设, 等向固结线在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面上同样被描述为线性关系:

$$e = e_{i0} - \alpha \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (3)$$

式中,  $e_{i0}$  为  $p=0$  时对应于等向固结线上孔隙比的值,

$\alpha$  是 ICL 的斜率。所有的等向固结线在相当大的有效应力范围内最后都交于  $N$  点, 如图 2 所示。

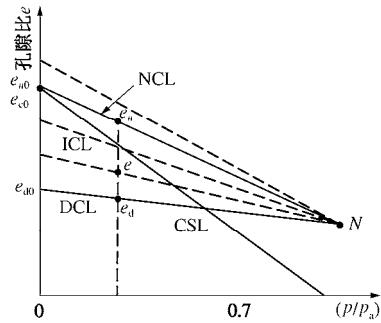


图 2 在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面上的正常固结线、临界状态线、等向固结线及最密固结线

Fig. 2 Normally consolidated, critical state, isotropic consolidation and densest consolidation lines in  $e$  versus  $(p/p_a)^\xi$  space

从图 2 可以看出, 在所有的等向固结线中, 有两条特殊的线, 分别是正常固结线 NCL 和最密固结线 DCL。而砂土的 NCL 被认为在  $p=0$  时与临界状态线 CSL 相交, 因为当砂土的围压接近 0 时, 它的剪切体变值也接近于 0, 故初始点应在临界状态线上。正常固结线表达式为

$$e_n = e_{n0} - \alpha_n \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (4)$$

式中,  $e_{n0}$  为  $p=0$  时对应于正常固结线上孔隙比的值,  $\alpha_n$  是 NCL 的斜率。最密固结线 DCL 是指可能的最密的等向固结线, 定义为

$$e_d = e_{d0} - \alpha_d \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi \quad (5)$$

同样,  $e_{d0}$  为  $p=0$  时对应于最密固结线上孔隙比的值,  $\alpha_d$  是 DCL 的斜率。其他等向固结线的斜率可通过 NCL 和 DCL 进行插值得到

$$\alpha = \alpha_d + (\alpha_n - \alpha_d) \cdot \frac{(e - e_d)^2}{(e_n - e_d)^2} \quad (6)$$

在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面上弹性卸载线的斜率假设为

$$\alpha_e = \alpha_d \frac{\beta}{\beta_d} \quad , \quad (7)$$

式中,  $\beta$  和  $\beta_d$  是参照 Richart 等<sup>[19]</sup>提出的经验公式给出的关于孔隙比的修正系数  $\beta = (1+e)/(2.97-e)^2$ ,  $\beta_d = (1+e_d)/(2.97-e_d)^2$ 。若初始状态在 DCL 上, 则  $\beta/\beta_d = 1$ 。

## 3 本构模型描述

### 3.1 屈服面

姚仰平等<sup>[14]</sup>在修正剑桥模型屈服函数的基础上, 引入了一个新的状态参数  $\chi$ , 将屈服函数修正为

$$f = \left( \frac{\eta}{M - \chi\eta} \right)^2 + 1 - \frac{p_y}{p} = 0 \quad . \quad (8)$$

式中  $\eta = q/p$  是应力比;  $M$  是临界状态应力比;  $p_y$  是等向压缩的回弹点所对应的平均正应力, 如图 3 所示;  $\chi$  是依赖于 NCL 与 CSL 之间距离关系所确定的一个修正参数。

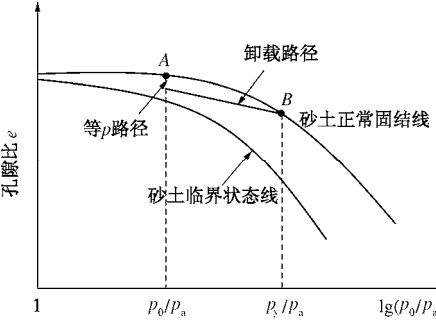


图 3 在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面内砂土的等向压缩、回弹曲线

Fig. 3 Isotropic loading and unloading curves of sand in  $e-\lg(p_0/p_a)$  space

对式(4)全微分有

$$de_n = -\alpha_n \xi \left( \frac{p_y}{p_a} \right)^{\xi-1} \frac{dp_y}{p_a} \quad . \quad (9)$$

塑性孔隙比增量为

$$de^p = -(\alpha_n - \alpha_e) \xi \left( \frac{p_y}{p_a} \right)^{\xi-1} \frac{dp_y}{p_a} \quad . \quad (10)$$

塑性体应变增量  $d\varepsilon_v^p$  与塑性孔隙比增量  $de_n^p$  之间的关系为

$$d\varepsilon_v^p = -\frac{de_n^p}{1+e} \quad . \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)中并进行积分可得

$$\int \frac{1+e}{\alpha_n - \alpha_e} d\varepsilon_v^p = \int \xi \left( \frac{p_y}{p_a} \right)^{\xi-1} \frac{dp_y}{p_a} = \left( \frac{p_y}{p_a} \right)^\xi - \left( \frac{p_0}{p_a} \right)^\xi \quad . \quad (12)$$

假定与塑性体应变相关的硬化参数增量定义为

$$dH = \frac{1+e}{\alpha_n - \alpha_e} d\varepsilon_v^p \quad . \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)可得

$$\int dH = H = \int \frac{1+e}{\alpha_n - \alpha_e} d\varepsilon_v^p = \left( \frac{p_y}{p_a} \right)^\xi - \left( \frac{p_0}{p_a} \right)^\xi \quad . \quad (14)$$

式中  $p_0$  是初始平均有效应力。可由式(14)推出:

$$p_y = \left( p_a^\xi H + P_0^\xi \right)^{\frac{1}{\xi}} \quad . \quad (15)$$

将式(15)代入式(8)可得

$$f = \left( \frac{\eta}{M - \chi\eta} \right)^2 + 1 - \frac{1}{p} \left( p_a^\xi H + P_0^\xi \right)^{\frac{1}{\xi}} = 0 \quad , \quad (16)$$

式(16)即本文模型所采用的砂土屈服函数。在式(16)

的基础上结合式(11), 对砂土沿着等  $p$  路径  $p=p_0$  剪切至临界状态( $\eta=M$ )时(图3):

$$\left( \frac{1}{1-\chi} \right)^2 + 1 - \left( \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^\xi \frac{\Delta e_n^p}{\alpha_n - \alpha_e} + 1 \right)^{\frac{1}{\xi}} = 0 \quad . \quad (17)$$

在等  $p$  路径  $p=p_0$  上, NCL 与 CSL 之间的距离表示为

$$\Delta e^p = (\alpha_c - \alpha_n) \left( \frac{p_0}{p_a} \right)^\xi \quad . \quad (18)$$

联立式(17)和(18)可得

$$\chi = 1 - \left( \left( \frac{\alpha_c - \alpha_e}{\alpha_n - \alpha_e} \right)^{\frac{1}{\xi}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (19)$$

然而, 当用塑性体应变作为硬化参数时, 屈服函数不能描述比 NCL 更密实的砂土的剪胀特性。因此, 引入姚仰平等<sup>[12-14]</sup>提出的硬化参数  $H$ , 以便使屈服函数更好地反映砂土的剪胀特性。姚仰平等提出的原始的硬化参数表达式为

$$H = \int dH = \int \frac{M_f^4 (M_f^4 - \eta^4)}{M_f^4 (M_f^4 - \eta^4)} d\varepsilon_v^p \quad . \quad (20)$$

在本模型中, 该硬化参数被扩展为如下新形式:

$$H = \int \frac{1+e}{\alpha - \alpha_e} \frac{M_c^4 (M_f^4 - \eta^4)}{M_f^4 (M_c^4 - \eta^4)} d\varepsilon_v^p \quad . \quad (21)$$

式中,  $M_c$  为特征状态应力比, 可表示为<sup>[8]</sup>

$$M_c = M \exp(m\psi) \quad . \quad (22)$$

式中,  $m$  为模型参数, 可由三轴压缩试验得到。同样, 将破坏应力比  $M_f$  引入模型中, 其表达式为<sup>[8]</sup>

$$M_f = M \exp(-n\psi) \quad . \quad (23)$$

式中,  $n$  为模型参数, 同样可由三轴压缩试验得到。在剪切过程中随着当前孔隙比  $e$  慢慢接近于  $e_c$ ,  $\psi$  值也慢慢趋近于 0,  $M_f$  就会相应地趋近于临界状态值  $M_0$ 。

图 4 中硬化参数  $H$  的特性得到很好的体现, 图中硬化参数  $H$  的值在变形达到峰值强度后开始减小, 因此砂土的软化特性可以得到很好的描述。参照式(21), 依赖于应力路径的塑性体应变修正系数  $R(\eta)$  可表述为

$$R(\eta) = \frac{M_f^4}{M_c^4} \frac{M_c^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \quad . \quad (24)$$

硬化参数表达式(21)可变形为

$$H = \int \frac{1+e}{\alpha - \alpha_e} \frac{1}{R(\eta)} d\varepsilon_v^p \quad . \quad (25)$$

对于正常固结土而言, 塑性体应变修正系数  $R(\eta) = 1$ , 故硬化参数表达式(25)退回到式(14)。

在密实状态下，砂土的屈服函数(16)表达式不变，只需将其中的硬化参数替换为式(21)的形式即可。

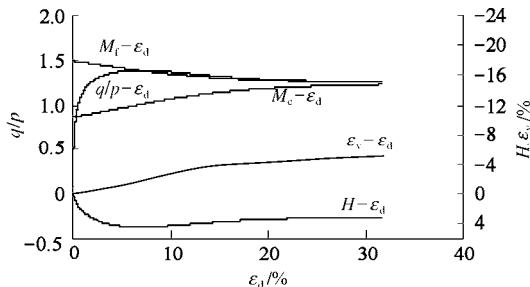


图 4 硬化参数、特征状态应力比及破坏应力比在排水条件下特性

Fig. 4 Behaviors of hardening/softening parameter, characteristic state stress ratio and failure stress ratio under drained condition

### 3.2 剪胀方程和塑性势面

参照修正剑桥模型中的剪胀方程，并引入特征状态应力比  $M_c$ ，建立与砂土状态相关的剪胀表达式为

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} = \frac{M_c^2 - \eta^2}{2\eta} \quad , \quad (26)$$

式中， $d\epsilon_v^p$  是塑性体应变增量， $d\epsilon_d^p$  是塑性剪应变。所以塑性势函数可相应地表示为

$$g = \eta^2 + M_c^2 - \frac{M_c^2 p_x}{p} = 0 \quad . \quad (27)$$

其中， $p_x$  为塑性势函数曲线在  $p$  轴对应的正应力， $M_c$  为特征状态应力比。

决定塑性应变大小的比例系数  $\Lambda$  可通过以下方法确定：对屈服函数(16)全微分可得

$$df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_v^p} d\epsilon_v^p = 0 \quad . \quad (28)$$

其中

$$d\epsilon_v^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial p} \quad . \quad (29)$$

由屈服函数(16)和硬化参数表达式(25)可得：

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{\partial f}{\partial H} \frac{1+e}{\alpha_e - \alpha_e} \frac{1}{R(\eta)} \quad . \quad (30)$$

将式(29)、(30)代入式(28)可得

$$\Lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta}{\frac{1+e}{\alpha_e - \alpha_e} \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial g}{\partial p} / R(\eta)} \quad . \quad (31)$$

将屈服函数(16)变形后可得

$$f = \left[ \frac{p}{p_a} \left( \frac{\eta}{M - \chi\eta} \right)^2 + \frac{p}{p_a} \right]^\xi - \left( \frac{p_0}{p_a} \right)^\xi - H = 0 \quad . \quad (32)$$

由式(32)可得在比例系数  $\Lambda$  中：

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\xi}{p} \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi \left[ \left( \frac{\eta}{M - \chi\eta} \right)^2 + 1 \right]^{\xi-1} \quad , \quad (33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \xi \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi \left[ \left( \frac{\eta}{M - \chi\eta} \right)^2 + 1 \right]^{\xi-1} \frac{2M\eta}{(M - \chi\eta)^3} \quad , \quad (34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial H} = -1 \quad . \quad (35)$$

由塑性势函数(27)可得

$$\frac{\partial g}{\partial p} = 1 - \frac{\eta^2}{M_c^2} \quad . \quad (36)$$

### 3.3 弹塑性应变增量的计算

总的应变增量由弹性增量和塑性增量组成：

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad . \quad (37)$$

其中弹性应变增量可由下式确定：

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{mm} \delta_{ij} \quad . \quad (38)$$

其中， $\nu$  是泊松比，弹性模量  $E$  表达式为

$$E = \frac{3(1-2\nu)(1+e) \cdot p_a^\xi}{\alpha_e \cdot \xi \cdot p^{\xi-1}} \quad . \quad (39)$$

塑性剪应变增量由下式计算：

$$d\epsilon_d^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial q} \quad , \quad (40)$$

其中

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{2\eta}{M_c^2} \quad . \quad (41)$$

塑性体应变增量为

$$d\epsilon_v^p = \frac{M_c^2 - \eta^2}{2\eta} d\epsilon_d^p \quad . \quad (42)$$

## 4 Toyoura 砂的模型预测与试验对比

根据本文提出的弹塑性本构模型对 Toyoura 砂在不排水三轴压缩条件下进行预测，共需 10 个参数，见表 1。其中  $e_{c0}$ 、 $\alpha_c$ 、 $m$ 、 $n$ 、 $M$  和  $\xi$  是直接参考文献[18]确定；泊松比  $\nu$  是给定值；参数  $e_{d0}$ 、 $\alpha_d$  是通过对 Toyoura 砂进行等向压缩所得最密实状态的试验数据拟合得到， $\alpha_n$  是所有等向压缩试验结果中过 CSL 与  $p=0$  交点的 ICL 的斜率。

模型中状态参数  $\chi$  可通过式(19)确定。对 Toyoura 砂土， $\alpha_n = 0.0088$ ， $\alpha_c = 0.019$ ，取  $\alpha_e = 0.0033$ ，代入式(19)可得  $\chi \approx 0.46$ 。

表 1 模型所用 Toyoura 砂的 10 个参数

Table 1 10 parameters of Toyoura sand used in model

$e_{c0}$	$e_{d0}$	$\alpha_c$	$\alpha_n$	$\alpha_d$
0.934	0.615	0.019	0.0088	0.0033
$\xi$	$M$	$m$	$n$	$\nu$
0.7	1.25	3.5	1.7	0.3

在不同初始围压下对 Toyoura 砂进行三轴不排水试验，试验分两组，一组的初始孔隙比为 0.735，另一组为 0.833，模型预测与试验结果如图 5、6 所示。另

外, 在初始围压 1 MPa 下, 对 7 种不同初始孔隙比的砂土进行三轴不排水试验, 预测曲线与试验结果对比见图 7。

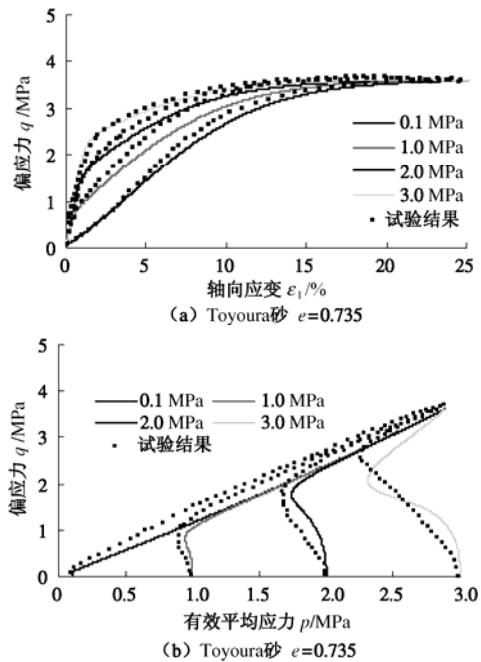


图 5 Toyoura 砂在不排水三轴压缩条件下试验结果与模型预测对比 ( $e=0.735$ )

Fig. 5 Comparison between test results and model predictions on Toyoura sand for  $e=0.735$  under undrained triaxial compression (Verdugo and Ishihara, 1996)

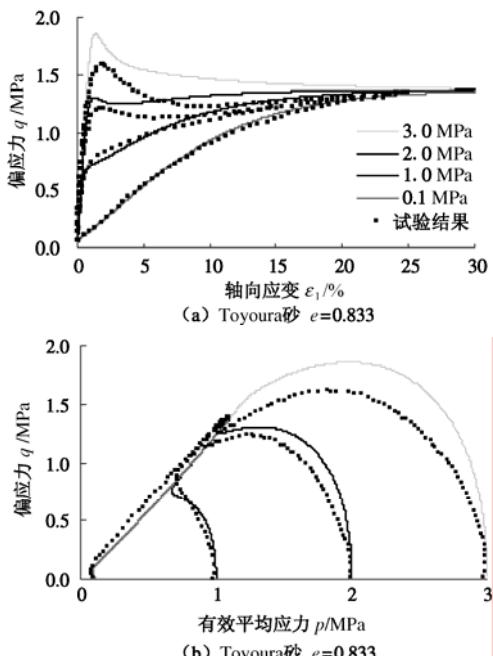


图 6 Toyoura 砂在不排水三轴压缩条件下试验结果与模型预测对比 ( $e=0.833$ )

Fig. 6 Comparison between test results and model predictions on Toyoura sand for  $e=0.833$  under undrained triaxial compression (Verdugo and Ishihara, 1996)

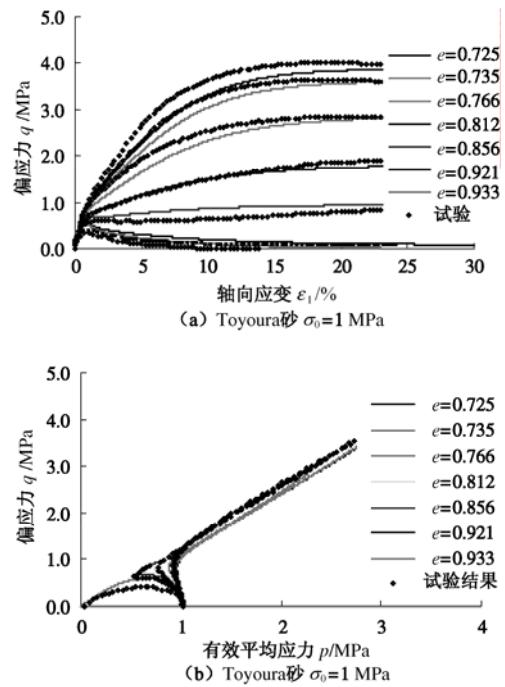


图 7 Toyoura 砂在不排水三轴压缩条件下试验结果与模型预测对比 ( $\sigma_0=1$  MPa)

Fig. 7 Comparison between test results and model predictions on Toyoura sand for  $\sigma_0=1$  MPa under undrained triaxial compression (Verdugo and Ishihara, 1991)

图 5, 6 比较表明: 砂土的初始孔隙比不同, 围压分别从  $p=0.1$  MPa 变到 3.0 MPa 时, 对应于相同的初始围压, 孔隙比越大砂土在不排水剪切时更易剪缩; 同时由图 5, 6 可分别看出, 对应于同样的初始孔隙比, 砂土的初始围压越大, 越容易发生剪缩。图 7 表明在不排水条件下, 砂土初始围压相同, 初始孔隙比从  $e=0.725$  变化到  $e=0.933$  时, 密砂反映出应变硬化和松砂反映出应变软化特性。通过以上的模型预测与试验数据对比可以看出, 本文所建立的弹塑性本构模型能够较好地描述砂土的剪缩、剪胀等应力应变特性, 同时也能充分说明砂土对于密度与有效应力的双重依赖性。

本文建立的砂土本构模型可采用姚仰平等<sup>[20-21]</sup>提出的变换应力三维化方法扩展到三维应力状态。

## 5 结 论

本文在临界状态理论的框架内, 提出了一个考虑大密度、大围压范围下砂土的本构模型。

(1) 模型通过引入状态参数  $\psi$  来调节砂土的特征状态应力比和破坏应力比, 进一步使硬化参量  $H$  和剪胀方程依赖于状态参数而变化, 从而更好地反映密砂的剪胀、软化特性和砂土对于密度和围压的双重依赖性。

(2) 引入状态参数  $\chi$  来修正屈服函数, 可更好地描述砂土在剪切过程中的屈服特性和塑性体变。

(3) 等向固结线和临界状态线在  $e - (p/p_a)^\xi$  平面内采用线性关系, 所有的等向固结线最后都交于一点, 在大范围的有效应力作用下更准确地反映砂土的应力应变特性。

(4) 模型预测和试验结果的对比分析表明, 所提出的模型仅用一套材料参数, 即可较好地描述不同密度不同初始有效应力下砂土的应力应变特性。

#### 参考文献:

- [1] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. Geotechnique, London, 1985, **35**(2): 99–112.
- [2] CAI Z Y, LI X S. Deformation characteristics and critical state of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(5).
- [3] LADE V P. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces[J]. International Journal of Solids and Structures, 1977(13): 1019–1035.
- [4] VERMEER P A. A double hardening model for sand[J]. Geotechnique, 1978, **28**(4): 413–433.
- [5] WANG Z L, DAFALIAS Y F, SHEN C K. Bounding surface hypoplasticity model for sand[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(2): 1–15.
- [6] JEFFERIES M G. Nor-Sand: A simple critical state model for sand [J]. Géotechnique, 1993, **43**(1): 91–103.
- [7] MANZARI M T, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sand[J]. Geotechnique, 1997, **47**(2): 255–272.
- [8] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Geotechnique, 2000, **50**(4): 449–460.
- [9] LI X S, DAFALIAS Y F. A constitutive framework for anisotropic sand including non-proportional loading[J]. Geotechnique, 2004, **54**(1): 41–55.
- [10] LING H I, YUE D, KALIAKIN V, THEMELIS N J. Anisotropic elasto-plastic bounding surface model for cohesive soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, **128**(7): 748–758.
- [11] CONSTANTINE A, Stamatopoulos. An experimental study of the liquefaction strength of silty sands in terms of the state parameter[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010, **30**(8): 662–678.
- [12] YAO Y P, MATSUOKA H, SUN D A. A unified elastoplastic model for clay and sand with the SMP criterion[C]// Proc 8th Australia New Zealand Conf on Geomechanics, Hobart, 1999, : 997–1003.
- [13] YAO Y P, SUN D A, MATSUOKA H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**: 210–222.
- [14] YAO Y P, SUN D A, LUO T. A critical state model for sands dependent on stress and density[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004, **28**: 323–337.
- [15] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. Soils and Foundations, 1996, **36**(2): 81–91.
- [16] RIEMER M F, SEED R B. Factors affecting apparent positions of steady-state line[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, **123**(3): 281–288.
- [17] WANG Y. Characterization of Dilative shear failure in sand[D]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 1997.
- [18] LI X S, WANG Y. Linear representation of steady-state line for sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1998, **124**(12): 1215–1217.
- [19] RICHART F E, HALL J R, WOOD R D. Vibrations of soils and foundations[M]. NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.
- [20] MATSUOKA H, YAO Y P, SUN D A. The Cam-clay models revised by the SMP criterion[J]. Soils and Foundations, 1999, **39**(1): 81–95.
- [21] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451–469.