

基于损伤多重分形特征的岩石强度 Weibull 参数研究

刘树新^{1,2}, 刘长武¹, 韩小刚¹, 曹磊¹

(1. 四川大学水力学与山区河流开发保护国家重点实验室, 四川 成都 610065; 2. 内蒙古科技大学矿业学院, 内蒙古 包头 014010)

摘要: 利用多重分形计算并绘制出表征岩石三维损伤微裂纹分布复杂性的多重分形谱, 引入一个表征岩石材料不均匀性、各向异性的相对分形维数, 结合多重分形谱的奇异性值, 对岩石实际受损状态的量化表达方法进行了探讨, 并基于岩石微元强度的 Mohr-Coulomb 准则表示方法及其服从 Weibull 随机分布的特点, 在本构模型中引入初始损伤分形参数, 结合岩石单轴应力应变试验曲线, 对不同多重分形参数下岩石强度 Weibull 参数取值规律进行了研究。结果表明: 同一种岩石在不同损伤状态下, 表征其强度特征的 Weibull 参数值以一定规律发生变化, 且微裂纹的分布对受损岩石峰后强度造成不同程度地影响, 进一步完善了岩石损伤统计本构模型。

关键词: 微裂纹; 损伤模型; 多重分形; Weibull 分布; 峰后强度

中图分类号: TU452 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2011)11-1786-06

作者简介: 刘树新(1971-), 男, 博士研究生, 从事岩石力学与工程方面的研究工作。E-mail: btlsx@126.com。

Weibull distribution parameters of rock strength based on multi-fractal characteristics of rock damage

LIU Shu-Xin^{1,2}, LIU Chang-wu¹, HAN Xiao-Gang¹, CAO Lei¹

(1. State Key Laboratory of Hydraulics and Mountain River Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. Mining Academy of Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou 014010, China)

Abstract: According to the standpoint of multi-fractal, three-dimensional multi-fractal spectra which can indicate the complexity of the micro-crack distribution in damaged rock are calculated and plotted. By introducing a relative fractal dimension value which can reveal inhomogeneity and anisotropy of damaged rock material and considering the singularity values of multi-fractal spectra, a quantitative method for actual damage state of the rock is derived. In addition, based on the representation of Mohr-Coulomb criterion and the characteristics of Weibull random distribution of rock strength, the change laws of Weibull parameters on different multi-fractal parameters are studied by introducing a fractal parameter into the constitutive model and considering the uniaxial stress-strain test curve of rock. The results show that for the same rock in different damage states, the Weibull parameters change according to certain rules, and the distribution of micro-cracks in damaged rock has different influences on the post-peak strength of rock. The test results may further improve the statistical damage constitutive model of rock.

Key words: micro-crack; damage model; multi-fractal; Weibull distribution; post-peak strength

0 引言

岩石在损伤演化过程中, 发生再变形和破坏, 其微裂纹分布对岩石强度有着重要的影响, 因此研究微裂隙分布几何特征和岩石强度之间的关系对指导工程有着重要的理论意义。

目前, 从唯象学角度出发并根据损伤统计分布理论, 假设损伤参量服从 Weibull 分布, 导出岩石损伤方程的研究工作已取得了很大进展。Kachanov 等^[1]基于几何损伤理论, 认为脆性材料的损伤也像金属材料的损伤那样, 是由材料的微缺陷所造成的, 但损伤的大小和损伤的演化与材料中微缺陷的尺寸、形状、密

度及其分布有关; 刘红岩等^[2]、徐卫亚等^[3]、唐春安等^[4]、曹文贵等^[5]从岩石材料内部所含缺陷分布的随机性出发, 将连续损伤理论和概率理论有机地结合起来, 从岩石微元强度服从某种随机分布的角度出发, 对岩石变形破坏损伤概率进行了研究。但由于多数岩石材料并非各向同性, 损伤岩石内微裂隙纵横交错, 形态各异, 非常复杂, 几何分布状况具有随机性、不规则性, 传统的损伤统计分布理论没能综合地反映出

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)基金项目(2010CB226802); 国家自然科学基金项目(50879049; 50574064)
收稿日期: 2010-09-02

微裂纹面对岩石强度的影响程度, 且对 Weibull 参数的取值有很大的离散性。研究表明岩石微裂纹具有统计自相似性^[6-8], 因此, 本文从描述自然界中复杂的不规则形状和事物规律性的有效工具——分形几何出发, 利用多重分形谱对损伤三维岩石微裂纹几何模型进行综合分析, 并基于岩石微元强度的 Mohr-Coulomb 准则表示方法及其服从 Weibull 随机分布的特点, 在本构模型中引入初始损伤分形参数, 结合岩石单轴应力应变试验曲线, 重点对不同多重分形参数下 Weibull 参数取值规律进行研究, 一定程度上克服了以往岩石损伤统计本构模型的不足, 更加客观地反映岩石在损伤演化过程中的强度衰减规律。

1 岩石三维损伤几何模型的建立

采用 C++ 语言编写程序, 根据蒙特卡洛模拟方法的基本原理, 先运用乘余法产生 $(0, 1)$ 均匀分布的随机数, 然后用概率积分变换运算法产生各种连续随机变量, 即均匀分布随机变量、负指数分布随机变量、正态分布随机变量和对数正态分布随机变量。假定岩石中微裂纹面是一个厚度忽略不计的圆盘, 圆盘的中心在岩石中呈随机或准随机分布。在模拟中采用二维等概率随机确定微裂纹面中点的方法, 并且引用了如下假设: 同一组微裂纹面, 其倾向、倾角、间距、迹长可以服从 4 种分布, 分别为均匀、正态、对数正态、负指数分布; 同一组微裂纹面中, 每条微裂纹面的中点在该组微裂纹面上的平均产状平面上各点出现机会是均等的, 即两个方向上等概率分布。

以某煤岩为例, 基于微裂纹产状的分布形式的基础上, 对岩石微裂纹面间距为 $0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ cm 时进行了计算机模拟, 微裂纹模拟结果如图 1 所示。微裂纹产状分布形式如表 1 所示。

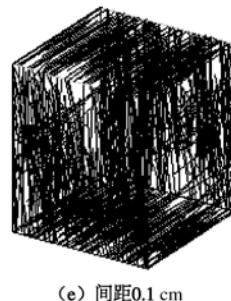
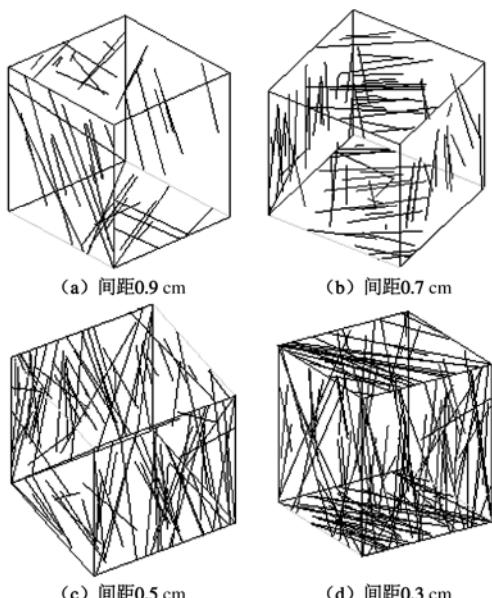


图 1 不同间距时的岩石微裂纹网络模拟图

Fig. 1 Images for network simulation of micro-cracks with different spacings

表 1 损伤岩石微裂纹分类数据表

Table 1 Classified data for micro-cracks of damaged rock

项目	均值	方差	分布	项目	均值	方差	分布
倾向 /(°)	2.7	145.9	正态	间距 /cm	0.1~0.9	0.14	负指数
	340.7	419.3	正态		0.1~0.9	1.4	负指数
倾角 /(°)	75.7	359.9	正态	迹长 /cm	4.0	37.0	负指数
	34.0	106.8	正态		6.29	8.75	负指数

2 多重分形计算及多重分形谱的绘制

本文采用 Chhabra 等^[9]提出的直接计算 $f(\alpha(q))$ 的一种新方法, 建立在覆盖的基础上, 设用长为 r 的盒子网络去覆盖节理网络, 设节理落入第 i 个盒子的概率为 $p_i(r)$, 可以定义一个概率测度族:

$$\mu_i(q, r) = \frac{[p_i(r)]^q}{\sum_i [p_i(r)]^q} \quad (1)$$

其支集的 Hausdorff 维数为

$$f(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, r) \lg [\mu_i(q, r)]}{\lg r} \quad (2)$$

由标度关系 $\alpha_i = \lg p_i(\delta)/\lg(\delta)$ 又可求得 α_i 的“平均值”为

$$\alpha(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, r) \lg [p_i(r)]}{\lg r} \quad (3)$$

对于每个给定的 q 值, 改变 r 的值, 求出其对应的值 $\sum \mu_i \lg \mu_i$ 和 $\sum \mu_i \lg p_i$, 然后分别在 $\sum \mu_i \lg \mu_i - \lg r$ 图和 $\sum \mu_i \lg p_i - \lg r$ 图上求出无标度区。

无标度区的常用判断方法是先作出 $\sum \mu_i \lg \mu_i - \lg r$ 图和 $\sum \mu_i \lg p_i - \lg r$ 图, 找出线性关系好的一段作相关系数检验, 若相关系数大于 0.95,

则检验通过，就将该段选作无标度区，并用最小二乘法作一元线性回归，拟合出直线的斜率作为 $f(q)$ 和 $\alpha(q)$ 的值，对应不同 q 值求出不同的 $f(q)$ 和 $\alpha(q)$ 的值。最后作出 $f(q) - \alpha(q)$ 曲线。表 2 给出了多重分形谱计算结果，图 2 给出了多重分形谱。

表 2 多重分形谱计算结果表

Table 2 Calculated results of multi-fractal spectra

间距/cm	容量维	奇异性范围(谱宽)
0.9	2.7880	0.6578
0.7	2.8091	0.5130
0.5	2.8598	0.5662
0.3	2.9717	0.8165
0.1	2.9974	0.9113

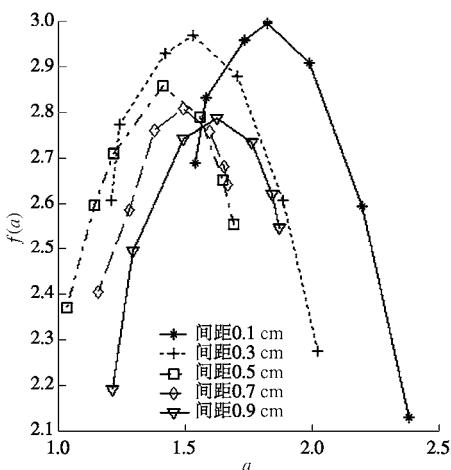


图 2 多重分形谱

Fig. 2 Multi-fractal spectra

3 岩石损伤本构关系

根据 Lemaître 应变等价性假说^[10]，受损材料 ($D \neq 0$) 的本构关系可以从无损材料 ($D=0$) 的本构方程导出，用损伤后的有效应力来取代无损材料本构关系中的 Cauchy 应力，得损伤本构关系为

$$[\sigma'] = \frac{[\sigma]}{1-D} = \frac{[C][\varepsilon]}{1-D} \quad (4)$$

式中 $D = \frac{A'}{A}$ A 为微元产生损伤后的瞬时表观面积， A' 为横截面上出现损伤的总面积。

将发生破坏的微元占微元总体的比例定义为损伤变量 D ，其前提是岩石微元的均匀分布与各向同性。因多数岩石类材料并非各向同性，二维岩石表观面积不能准确反映出岩石的实际受损状态，故本文引入一个表征岩石材料的不均匀性、各向异性的相对分形维数 λ ，一定意义上反映了岩石的非均匀性、非线性特征。 λ 为多重分形谱容量维数与 3 的比值，其范围为

$0 < \lambda < 1$ 。当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，表征无微裂纹产生；当 $\lambda \rightarrow 1$ 表示有无穷微裂纹产生；另外，本文也尝试探讨了当 λ 值表征多重分形谱奇异性值时的意义，当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，表示多重分形谱的奇异性值域很小（微裂纹分布非常不均匀），当 $\lambda \rightarrow 1$ 表示多重分形谱的奇异性值域很大（微裂纹趋近于均匀分布）。

在压力作用下岩石微元破坏的概率与其应力 – 应变的状态密切相关。如果将一个与岩石的应力 – 应变相关的量作为岩石微元强度随机变化分布变量，则所得的损伤变量能充分反映其随应力状态而变化的特点。文献[11]建议以岩石的破坏准则作为岩石微元强度随机变化分布变量，提出了一种反映岩石微元强度的表示方法。本文在其基础上，引入分形参数 λ ，将式 (4) 修正为如下岩石损伤的本构关系：

$$[\sigma'] = \frac{[\sigma]}{1-\lambda D} = \frac{[C][\varepsilon]}{1-\lambda D} \quad (5)$$

设岩石微元强度服从 Weibull 分布^[5]，则其概率密度函数为

$$p(F) = \frac{m}{F_0} \left(\frac{F}{F_0} \right)^{m-1} \exp \left(-\left(\frac{F}{F_0} \right)^m \right) \quad (6)$$

式中 F 为微元强度 Weibull 分布的随机分布变量； m 与 F_0 为 Weibull 分布参数。

由于微元破坏的随机性，将岩石中发生破坏的微元占微元总体的比例定义为岩石损伤变量 D ，其表达式为

$$D = \int_0^F p(x) dx = 1 - \exp \left(-\left(\frac{F}{F_0} \right)^m \right) \quad (7)$$

由 Mohr-Coulomb 准则，在等围压下，岩石微元强度可表示为^[11]

$$F = \frac{E\varepsilon_1[(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi]}{\sigma_1 - 2\nu\sigma_3} \quad (8)$$

由式 (5)、(7)、(8) 可得

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \left\{ \lambda \exp \left(-\left(\frac{F}{F_0} \right)^m \right) + 1 - \lambda \right\} + 2\nu\sigma_3 \quad (9)$$

式中 σ_1 为轴向名义应力； σ_3 为侧向（等围压名义应力）； ν 为泊松比； ε_1 为轴向应变； E 为弹性模量。

4 Weibull 分布参数 m 和 F_0 的确定

引入岩石应力应变曲线的几何极值条件，建立损伤统计本构模型的基本方程。图 3 给出了岩石在单轴压缩下的应力应变曲线。

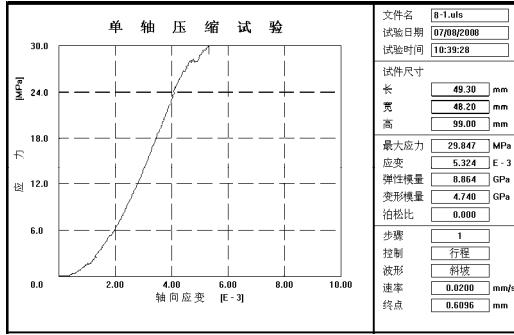


图 3 岩石单轴应力应变实验曲线

Fig. 3 Uniaxial stress-strain curve of rock

对式(9)求偏微分得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = & E \left(\lambda \cdot \exp \left(-\left(\frac{F}{F_0} \right)^m \right) + 1 - \lambda \right) + \\ & E \varepsilon_1 \lambda \cdot \exp \left(-\left(\frac{F}{F_0} \right)^m \right) \cdot \left(-\frac{m F^{m-1}}{F_0^m} \right) \cdot \\ & \left\{ \frac{E [(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi]}{\sigma_1 - 2\nu\sigma_3} + \right. \\ & \left. \frac{E \varepsilon_1 [(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi]}{(\sigma_1 - 2\nu\sigma_3)^2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

因为当 $\sigma_1 = \sigma_{lc}$ 时, $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{lc}$, $F = F_c$, 所以

由式(10)得

$$\begin{aligned} 0 = & E \left(\lambda \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) + 1 - \lambda \right) + \\ & E \varepsilon_{lc} \lambda \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) \cdot \left(-\frac{m F_c^{m-1}}{F_0^m} \right) \cdot \\ & \left\{ \frac{E [(\sigma_{lc} - \sigma_3) - (\sigma_{lc} + \sigma_3) \sin \varphi]}{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

由式(8)得

$$F_c = \frac{E \varepsilon_{lc} [(\sigma_{lc} - \sigma_3) - (\sigma_{lc} + \sigma_3) \sin \varphi]}{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3}. \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)得

$$\begin{aligned} & \lambda \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) + 1 - \lambda + \\ & \lambda \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) \cdot \left(-\frac{m F_c^m}{F_0^m} \right) = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

又由式(9)可得

$$\sigma_{lc} = E \varepsilon_{lc} \left(\lambda \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) + 1 - \lambda \right) + 2\nu\sigma_3. \quad (14)$$

故可得

$$\lambda \cdot \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) + 1 - \lambda = (\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3) / E \varepsilon_{lc}, \quad (15)$$

$$\lambda \exp \left(-\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m \right) = (\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3) / E \varepsilon_{lc} + \lambda - 1. \quad (16)$$

将式(15)、(16)代入式(13)得

$$\frac{m F_c^m}{F_0^m} = \frac{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3}{(\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3 + (\lambda - 1) E \varepsilon_{lc})}. \quad (17)$$

又由式(16)得

$$\left(\frac{F_c}{F_0} \right)^m = -\ln \frac{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3 + (\lambda - 1) E \varepsilon_{lc}}{E \varepsilon_{lc} \lambda}. \quad (18)$$

由式(17)、(18)得

$$m = \frac{-(\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3)}{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3 + (\lambda - 1) E \varepsilon_{lc}} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3 + (\lambda - 1) E \varepsilon_{lc}}{E \varepsilon_{lc} \lambda} \right)}, \quad (19)$$

$$F_0 = \left(\frac{F_c^m}{-\ln \frac{\sigma_{lc} - 2\nu\sigma_3 + (\lambda - 1) E \varepsilon_{lc}}{E \varepsilon_{lc} \lambda}} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (20)$$

根据上述推导过程及结果, 为下一步探讨岩石强度 Weibull 分布参数 m 与 F_0 的取值奠定了基础。

5 微裂纹间距、 λ 值与 Weibull 分布参数 m 和 F_0 之间关系的探讨

对上述公式编程进行计算, 结果如表 3、4 所示, 其关系如图 4~8 所示。

表 3 不同相对维数时的 Weibull 分布参数

Table 3 Weibull distribution parameters under different relative dimensions

间距/cm	λ (相对维数)	m	F_0 /MPa
0.9	0.9293	2.2366	32.0727
0.7	0.9364	2.2307	32.2401
0.5	0.9533	2.2170	32.6409
0.3	0.9906	2.1893	33.5194
0.1	0.9991	2.1833	33.7199

表 4 不同奇异性值时的 Weibull 分布参数

Table 4 Weibull distribution parameters under different singularity values

间距/cm	λ (奇异性值)	m	F_0 /MPa
0.9	0.6578	2.6634	25.4432
0.7	0.5130	3.4497	22.0651
0.5	0.5662	3.0397	23.2395
0.3	0.8165	2.3544	29.3504
0.1	0.9113	2.2525	31.6424

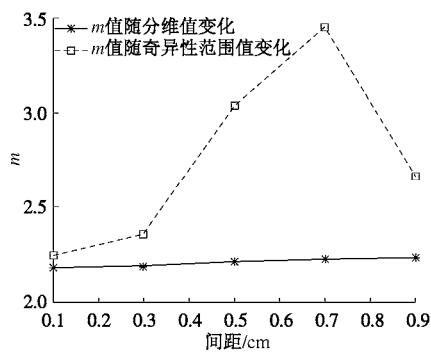
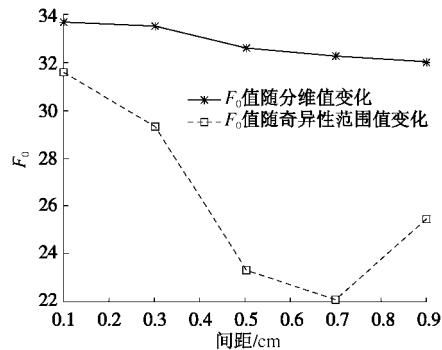
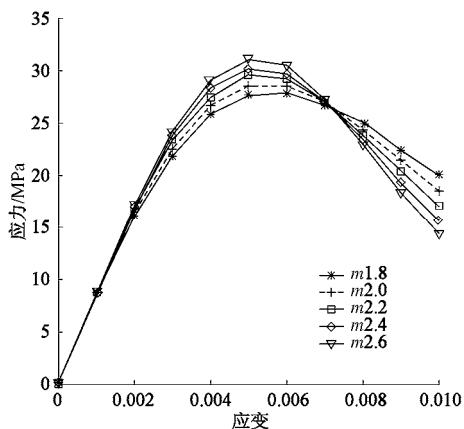
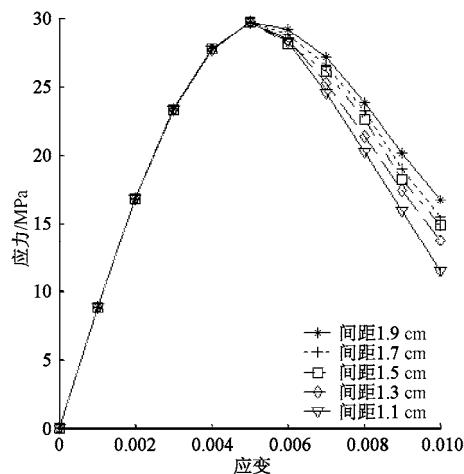
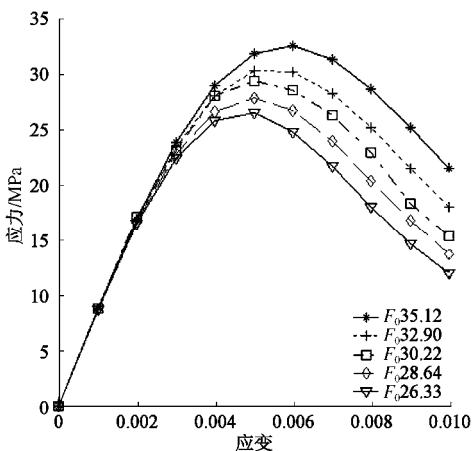
图 4 m 值随间距变化图Fig. 4 Relation between spacing and value of m 图 5 F_0 值随间距变化图Fig. 5 Relation between spacing and value of F_0 图 6 不同 m 值时单轴应力 – 应变曲线Fig. 6 Uniaxial stress-strain curves under different values of m 图 7 不同 F_0 时单轴应力 – 应变曲线Fig. 7 Uniaxial stress-strain curves under different values of F_0 

图 8 不同间距时单轴应力 – 应变曲线

Fig. 8 Uniaxial stress-strain curves under different spacings

6 结 论

(1) 随着岩石中微裂纹面间距的减小，分形谱容量维增加， m 值减小， F_0 值增大；同时奇异性值域加宽，分形谱变宽， m 值有减小的趋势， F_0 值有增大的趋势，如图 4、5 所示。反映出同一种岩石在不同损伤状态下，表征其强度的 Weibull 参数值在发生变化，因此，若用 Weibull 分布来表征岩石强度时，应考虑岩石的实际损伤状态。

(2) 当固定 E 和 F_0 不变时，变化情况如图 6 所示，随 m 的增大，峰后曲线变陡；当固定 E 和 m 不变时，变化情况如图 7 所示，随 F_0 增大岩石峰值强度增大，但是 F_0 与 m 的变化并不改变峰值前线性部分变形曲线，因此，岩石损伤统计本构模型中参数 F_0 与 m 主要反映了岩石峰后变形的力学性质。

(3) 在利用连续损伤理论和统计强度理论的基础上，引入一个表征了岩石材料的不均匀性、各向异

性的相对分形维数或奇异性值—— λ , 进一步完善了岩石损伤统计本构模型, 随维数的增大, 岩石峰后强度降低, 如图 8 所示。由于在一定时刻材料的损伤状态是一定的, 所以, 用分维数可以做一个衡量受损岩石峰后强度的参数。

(4) 受损岩石峰后的应力—应变关系与表征微裂纹分布的多重分形谱奇异性范围有关, 此处引入 λ 系数所表示奇异性值的物理意义需在实验基础上进一步研究。

参考文献:

- [1] 李兆霞. 损伤力学及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 5—20. (LI Zhao-xia. Damage mechanics and application[M]. Beijing: Science Press 2002: 5—20. (in Chinese))
- [2] 刘红岩, 王根旺, 刘国振. 以损伤变量为特征的岩石损伤理论研究进展[J]. 爆破器材, 2004, 33(6): 25—29. (LIU Hong-yan, WANG Gen-wang, LIU Guo-zhen. Research development of rock damage theory characterized by damage variable[J]. Explosive Materials, 2004, 33(6): 25—29. (in Chinese))
- [3] 徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787—791. (XU Wei-ya, WEI Li-de. Study on statistical damage constitutive model of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(6): 787—791. (in Chinese))
- [4] 唐春安, 朱万成. 混凝土损伤与断裂—数值试验[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 45—60. (TANG Chun-an, ZHU Wan-cheng. Concrete damage and fracture-numerical experiments[M]. Beijing: Science Press, 2003: 45—60. (in Chinese))
- [5] 曹文贵, 赵明华, 刘成学. 岩石损伤统计强度理论研究[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(6): 820—823. (CAO Wen-gui, ZHAO Ming-hua, LIU Cheng-xue. A study on damage statistical strength theory for rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(6): 820—823. (in Chinese))
- [6] 李元辉, 刘建坡, 赵兴东, 等. 岩石破裂过程中的声发射 b 值及分形特征研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(9): 2560—2574. (LI Yuan-hui, LIU Jian-po, ZHAO Xing-dong, et al. Study on b-value and fractal dimension of acoustic emission during rock failure process[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(9): 2560—2574. (in Chinese))
- [7] 谢和平, 高 峰. 岩石类材料损伤演化的分形特征[J]. 岩石力学与工程学报, 1991, 10(1): 74—81. (XIE He-ping, GAO Feng. The fractal characteristics during rock damage process[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1991, 10(1): 74—81. (in Chinese))
- [8] 梁正召, 唐春安, 唐世斌, 等. 岩石损伤破坏过程中分形与逾渗演化特征[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(9): 1386—1390. (LIANG Zheng-zhao, TANG Chun-an, TANG Shi-bin, et al. Characteristics of fractal and percolation of rocks subjected to uniaxial compression during their failure process[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(9): 1386—1390. (in Chinese))
- [9] 李后强, 汪富泉. 分形理论及其在分子科学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 89—121. (LI Hou-qiang, WANG Fu-quan. Fractal theory and its application in molecular science[M]. Beijing: Science Press, 1997: 89—121. (in Chinese))
- [10] LEMAITRE J A. 延性断裂中的连续损伤力学[J]. 材料与技术, 1985: 83—107. (LEMAITRE J A. Continuous damage mechanics model for ductile fracture[J]. Material & Technology, 1985: 83—107. (in French))
- [11] 曹文贵, 张 升. 基于 Mohr-Coulomb 准则的岩石损伤统计分析方法研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2005, 32(1): 43—47. (CAO Wen-gui, ZHANG Sheng. Study on the statistical analysis of rock damage based on Mohr-Coulomb criterion[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2005, 32(1): 43—47. (in Chinese))