

初始孔压非均布考虑起始比降的一维固结解

王 坤^{1,2}, 谢康和^{1,2}, 刘兴旺³, 李传勋^{1,2}, 邓岳保^{1,2}

(1. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058;
3. 浙江省建筑设计研究院, 浙江 杭州 310006)

摘要: 研究了考虑起始比降的一维固结问题, 获得了初始孔压非均布条件下考虑起始比降的一维固结解答, 并与已有文献解答进行了对比, 讨论了考虑起始比降后土体的一维固结特性。计算分析表明, 当初始孔压降小于起始比降时, 渗流并不会在整个土层中瞬间发生, 而是逐渐向下发展的, 起始比降越大, 渗流边界移动速度越慢; 固结结束时, 土体中的孔隙水压力并不会完全消散, 且起始比降越大, 残余孔隙水压力越大。与不考虑起始比降不同, 均质地基平均固结度按沉降定义和按孔压定义是不同的, 随着起始比降的增大, 按沉降定义的固结度随之增大, 而按孔压定义的固结度则随之减小。

关键词: 起始比降; 初始孔压非均布; 一维固结; 残余孔隙水压力; 非达西渗流

中图分类号: TU411 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2011)09-1419-06

作者简介: 王 坤(1984-), 男, 湖南南县人, 博士研究生, 从事软黏土力学与地基处理研究。E-mail: wk6848@126.com。

Solution for one-dimensional consolidation with threshold gradient subjected to non-uniformly distributed initial pore water pressure

WANG Kun^{1,2}, XIE Kang-he^{1,2}, LIU Xing-wang³, LI Chuan-xun^{1,2}, DENG Yue-bao^{1,2}

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 3. Zhejiang Province Institute of Architectural Design and Research, Hangzhou 310006, China)

Abstract: An analytical solution is obtained for the one-dimensional consolidation problem considering the threshold gradient. The proposed solution is compared with previous solutions. The results show that the proposed approach is reasonable. Based on the solution, the consolidation behaviors of the ground are discussed. The results show that when the initial pore pressure gradient is less than the threshold gradient, the flow will not occur throughout the whole layer instantaneously but rather gradually from top to bottom. The greater the threshold gradient is, the slower the boundary of seepage moves. The excess pore pressure will not be completely dissipated at the end of consolidation. The greater the threshold gradient is, the larger the residual excess pore pressure is. It is shown that, unlike without the threshold gradient, the average degree of consolidation defined by settlement considering the threshold gradient is different from that defined by pore pressure. The greater the threshold gradient, the larger the average degree of consolidation defined by settlement and the smaller that defined by pore pressure.

Key words: threshold gradient; non-uniformly distributed initial pore water pressure; one-dimensional consolidation; residual pore pressure; non-Darcy flow

0 引言

已有渗透试验研究^[1-2]早已表明: 对某些低渗透性饱和黏土而言, 存在起始比降 i_0 , 只有当土中某点的水力坡降大于 i_0 , 该点才会发生渗流。然而, 传统的固结理论大都假设土中渗流符合达西定律 (即只要土中某点的水力坡降绝对值大于零, 该点就必发生线性渗流), 对于非达西渗流固结问题 (土中渗流不符合达西定律的固结问题的统称) 的研究甚少^[3-8]。Pascal^[3]

和刘忠玉^[5]先后采用差分方法研究了初始孔压均布的条件下起始比降对饱和土一维固结性状的影响; 刘慈群^[4]通过积分关系式法获得了考虑起始比降的一维固结近似解, 但该解答不能反映渗流发展到土层底部后孔压和固结度的变化; 邓英尔等^[6]分别运用平均质量守恒法和差分方法分析了考虑起始比降, 土中渗流活

动边界随时间的运动规律, 但并未分析土体的固结性状; 同时文献[3~5]仅分析了起始比降 i_0 较小, 渗流可以发展到土层底部的情形, 而对 i_0 较大, 渗流不能到达土层底部的情形没有进行讨论, 也没有分析考虑起始比降后, 按沉降定义和按孔压定义的平均固结度之间的差别, 对最简单的一维非达西固结性状也未见有清楚的分析。

有鉴于此, 本文给出了初始孔压非均匀条件下考虑起始比降的一维固结近似解答, 获得了按沉降定义和按孔压定义的平均固结度, 讨论了两者的不同, 分析了起始比降对土体一维固结性状的影响, 当起始比降 $i_0=0$, $q_T=q_B$ (q_T 为土层顶面处初始超静孔压; q_B 为土层底面处初始超静孔压。) 时, 本文解答能够退化到太沙基一维固结解答。本文研究能清楚地揭示考虑起始比降后饱和黏土的一维固结性状, 为更深入地开展非达西渗流固结问题的研究打下基础。

1 计算模型

考虑起始比降, 土中渗流方程如下式:

$$v = \begin{cases} 0 & , |i| \leq i_0 , \\ k(|i|-i_0) & , |i| \geq i_0 , \end{cases} \quad (1)$$

式中, v 为流速, k 为渗透系数, i_0 为起始比降 ($i_0 \geq 0$)。除渗流方程与土中初始孔压非均匀外, 采用与太沙基一维固结理论相同的假定, 根据初始孔压降的大小, 可分为 3 种情况讨论。

(1) 初始孔压降大于起始比降, 即满足 $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{t=0} = \frac{q_B - q_T}{H} \geq i_0 \gamma_w$, 此种情况下, 瞬间在整个土层发生渗流, 此时其固结微分方程为下:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < z < H . \quad (2)$$

求解条件如下:

初始条件

$$t=0: \quad u = q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H} ; \quad (3)$$

边界条件

$$0 < t < \infty, z=0: \quad u=0 , \quad (4)$$

$$0 < t < \infty, z=H: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = i_0 \gamma_w . \quad (5)$$

式中 c_v 为固结系数, 其定义与太沙基一维固结理论相同; H 为土层厚度; γ_w 为水的重度。

(2) 初始孔压降满足关系式: $-i_0 \gamma_w \leq \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{t=0} = \frac{q_B - q_T}{H} < i_0 \gamma_w$, 此时渗流逐渐向土层底部发展, 如图 1 所示。根据 q_B , q_T 的大小, 又可分为 3 种情况:

$$\text{I} \quad \begin{cases} -i_0 \gamma_w \leq \frac{q_B - q_T}{H} < i_0 \gamma_w , \\ q_B < i_0 \gamma_w H , \\ q_T \neq 0 , \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} -i_0 \gamma_w \leq \frac{q_B - q_T}{H} < i_0 \gamma_w , \\ q_B \geq i_0 \gamma_w H , \end{cases}$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} -i_0 \gamma_w \leq \frac{q_B - q_T}{H} < i_0 \gamma_w , \\ q_B < i_0 \gamma_w H , \\ q_T = 0 . \end{cases}$$

第 I 种情况下, 渗流不能够发展到土层底部, 此时渗流的最终边界为 $H_c = q_T H / (i_0 \gamma_w H + q_T - q_B) < H$, 在该边界以下土体不会发生固结; 第 II 种情况下, 渗流随着时间的推移能够发展到土层底部; 而第 III 种情况下, 土层中不会发生渗流(固结)。

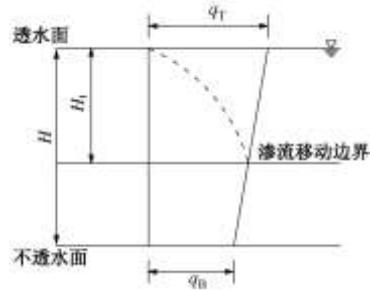


图 1 渗流移动边界

Fig. 1 Moving boundary of seepage

对于第 I 种和第 II 种情况, 其固结微分方程如下:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < z < H_t . \quad (6)$$

相应的求解条件如下:

初始条件

$$t=0: \quad u = q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H} ; \quad (7)$$

边界条件

$$0 < t < \infty, z=0: \quad u=0 , \quad (8)$$

$$0 < t < \infty, z=H_t: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = i_0 \gamma_w , \quad (9)$$

$$0 < t < \infty, z=H_t: \quad u = q_T + (q_B - q_T) \frac{H_t}{H} , \quad (10)$$

式中, H_t 为渗流移动边界深度, 即发生固结土层厚度。对于第 II 种情况, 当渗流发展至土层底部时, 只需令 $H_t = H$ 即可。

(3) $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{t=0} = \frac{q_B - q_T}{H} < -i_0 \gamma_w$, 由于顶面透水而底

面不透水, 同时向下的起始水力梯度大于起始比降, 此时渗流同时向上和向下发展, 如图 2 所示。设任意时刻渗流向上和向下发展的分界线为 $z=H_t$, 根据 q_B , q_T 的大小, 又可分为两种情况:

$$\text{I} \quad \begin{cases} \frac{q_B - q_T}{H} < -i_0 \gamma_w, \\ q_B < i_0 \gamma_w H, \end{cases} \quad \text{II} \quad \begin{cases} \frac{q_B - q_T}{H} < -i_0 \gamma_w, \\ q_B \geq i_0 \gamma_w H. \end{cases}$$

第 I 种情况下, 渗流不能够发展到土层底部, 此时渗流的最终边界为 $H_c = \frac{(q_B + q_T)H + i_0 \gamma_w H^2}{3i_0 \gamma_w H + q_B - q_T} < H$,

在该边界以下土体不会发生固结; 第 II 种情况下, 渗流随着时间的推移能够发展到土层底部, 进而在整个土层发生固结。

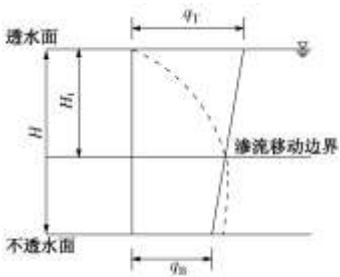


图 2 渗流移动边界

Fig. 2 Moving boundary of seepage

上述两种情况下, 向上发生渗流的控制方程为

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < z \leq H_t. \quad (11)$$

求解条件如下:

初始条件

$$t=0: \quad u = q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H}; \quad (12)$$

边界条件

$$0 < t < \infty, z=0: \quad u = 0, \quad (13)$$

$$0 < t < \infty, z=H_t: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = i_0 \gamma_w. \quad (14)$$

向下发生渗流的控制方程为

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad z > H_t. \quad (15)$$

其初始条件与式(12)相同, 边界条件如下:

$$0 < t < \infty, z=H_t: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -i_0 \gamma_w, \quad (16)$$

$$0 < t < \infty, z=H: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -i_0 \gamma_w. \quad (17)$$

由向下发生渗流的边界条件可知, 由于两端不透水, 该渗流发生过程只是调整土体中孔压的分布, 对向下发生渗流的整个土体而言并不发生固结。同样, 若渗流发展至土层底部, 只需令 $H_t = H$ 即可。

2 问题的求解

2.1 方程解答

I: 当 $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{t=0} = \frac{q_B - q_T}{H} \geq i_0 \gamma_w$, 此时瞬间在整个土

层发生渗流, 采用分离变量法, 可解得

$$u = \gamma_w i_0 z + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2q_T}{M} + \frac{2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H)}{M^2} \right) \sin M \right] \sin \frac{Mz}{H} e^{-M^2 T_v}, \quad (18)$$

式中, $M = \frac{2m-1}{2}\pi$, 时间因子 $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$ 。

II: 当 $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{t=0} = \frac{q_B - q_T}{H} < i_0 \gamma_w$, 难以获得方

程(6)~(10)的精确解答, 本文假定在求解过程中 H_t 为常量, 获得了其近似解答如下:

$$u = \begin{cases} \gamma_w i_0 z + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H)H_t}{HM^2} \sin M \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2q_T}{M} \right) \sin \frac{Mz}{H_t} e^{-\frac{M^2 T_v H^2}{H_t^2}} \right], z \leq H_t, \\ q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H}, \quad z \geq H_t, \end{cases} \quad (19)$$

式(19)须满足边界条件(10), 即

$$q_T + (q_B - q_T) \frac{H_t}{H} = \gamma_w i_0 H_t - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2q_T}{M} (-1)^m - \frac{2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H)H_t}{HM^2} \right) e^{-\frac{M^2 c_v t}{H_t^2}}. \quad (20)$$

由式(20)、(21)可知: ①若已知渗流移动边界所处土层深度 H_t , 便可根据式(20)、(21)求得对应固结时间因子 T_v ; ②若已知固结时间因子 T_v , 同理可求得渗流移动边界所处土层深度 H_t 。

若渗流已经发展至土层底部, 此时 $H_t = H$, 孔压表达式为

$$u = \gamma_w i_0 z + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H)}{M^2} \sin M + \frac{2q_T}{M} \right) \sin \frac{Mz}{H} e^{-M^2 T_v} \right]. \quad (21)$$

III: 当 $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{t=0} = \frac{q_B - q_T}{H} < -i_0 \gamma_w$, 按照与前述类似的方法, 可以获得此种情况下的近似解答:

$$u = \begin{cases} \gamma_w i_0 z + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H) H_t}{H M^2} \right] & z \leq H_t, \\ \frac{q_B + q_T}{2} + \frac{H_t (q_B - q_T)}{2H} + \frac{i_0 \gamma_w (H_t + H)}{2} - \\ i_0 \gamma_w z - \sum_{m=1}^{\infty} \left[(i_0 \gamma_w + \frac{q_B - q_T}{H}) \frac{2(H - H_t)}{M'^2} \right. & \\ \left. (1 - \cos M') \cos \left(\frac{M'(z - H_t)}{H - H_t} \right) e^{-\frac{-M'^2 T_v H^2}{(H - H_t)^2}} \right] & z > H_t, \end{cases} \quad (22)$$

式中, $M' = m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)。

式(22)在 $z = H_t$ 处, 需满足连续性条件, 即

$$\begin{aligned} & \frac{q_B + q_T}{2} + \frac{H_t (q_B - q_T)}{2H} + \frac{i_0 \gamma_w (H - 3H_t)}{2} = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2q_T}{M} + \frac{2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H) H_t}{H M^2} \sin M \right) \cdot \right. \\ & \left. \sin M e^{-\frac{-M'^2 T_v H^2}{H_t^2}} + (i_0 \gamma_w + \frac{q_B - q_T}{H}) \cdot \right. \\ & \left. \frac{2(H - H_t)}{M'^2} (1 - \cos M') e^{-\frac{-M'^2 T_v H^2}{(H - H_t)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

同理可从式(23)获得时间与移动边界之间一一对应关系。当渗流边界发展至土层底部时, 整个土层向上发生渗流。此时 $H_t = H$, 故:

$$u = \gamma_w i_0 z + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2q_T}{M} + \frac{2(q_B - q_T - i_0 \gamma_w H)}{M^2} \sin M \right) \sin M e^{-\frac{-M'^2 T_v H^2}{H^2}} \right]. \quad (24)$$

2.2 固结度计算

地基平均固结度可定义为地基某时刻平均附加有効应力与平均附加总应力之比, 也可定义为地基任一时刻的变形(沉降)量与其最终值之比。前者称为按孔压定义, 用 U_p 表示; 后者称为按沉降或变形定义, 用 U_s 表示。考虑起始比降, 两种定义的平均固结度可按如下计算。

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{\frac{1}{E_s} \int_0^H (q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H} - u) dz}{\frac{1}{E_s} \int_0^H (q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H} - u|_{t=\infty}) dz} \\ &= \frac{q_B + q_T - 2\bar{u}}{q_B + q_T - 2\bar{u}|_{t=\infty}}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{\int_0^H (q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H} - u) dz}{\int_0^H (q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H}) dz} \\ &= \frac{q_B + q_T - 2\bar{u}}{q_B + q_T} = 1 - \frac{2\bar{u}}{q_B + q_T}. \end{aligned} \quad (26)$$

式中, \bar{u} 为土层任意时刻的平均孔压, $\bar{u}|_{t=\infty}$ 为固结结束时土层的平均孔压。

3 计算与分析

3.1 解的合理性验证

本文第(2)类和第(3)类条件下的解答, 由于在求解过程中假定 H_t 为常量, 故不是该条件下的精确解, 为验证本文方法及解答的合理性, 对于第(2)类条件, 令 $q_T = q_B$, 将本文初始孔压均布条件下的解与文献[3]中数值解对比。为表达方便, 定义 $R = i_0 \gamma_w H / q_B$, $\eta = q_T / q_B$ 。图3为 $R=0.4$ 时, 渗流移动边界在不同土层深度 H_t 时的孔压分布; 图4为不同 R 值, 渗流移动边界随时间变化图。对比可知, 文献[3]中数值解与本文解非常接近。对于第(3)类条件, 令 $i_0 = 0$, 本文解答便可退化为不考虑起始比降, 初始孔压非均布条件下的解答(此种情况下已有精确解答^[12])。图5为两种不同情况下, 土体的平均固结度随时间发展曲线, 结果显示, 本文解与精确解非常接近。综上, 本文分析方法是合理的。

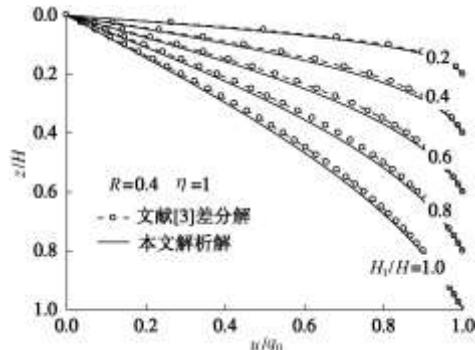


图3 孔隙水压力的分布 $R=0.4$

Fig. 3 Distribution of excess pore pressure for $R=0.4$

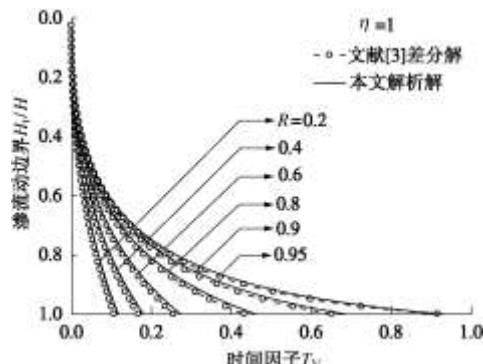


图 4 渗流移动边界的运动

Fig. 4 Motion of moving boundary of seepage

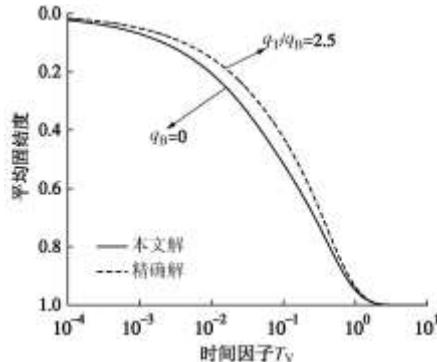


图 5 平均固结度

Fig. 5 Average degree of consolidation

3.2 结果分析

(1) 渗流移动边界

图 6 为 $\eta=0.8$ 时, 不同起始比降下渗流移动边界随时间的运动曲线。与太沙基一维固结理论不同, 由于起始比降的存在, 当初始孔压降小于起始比降时, 并不会在瞬间在整个土层发生渗流, 渗流移动边界随时间推移逐渐向土层底部移动, 起始比降越大, 其移动速度越慢。若土层起始比降大于一定值 ($R>1$), 渗流移动边界运动至某一深度, 便停止向下移动, 在该深度以下土层, 并不会发生固结, 且起始比降的越大, 发生固结土层的厚度越小。

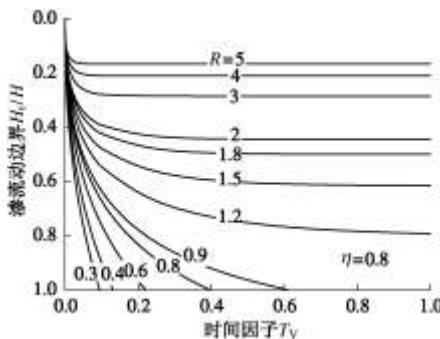


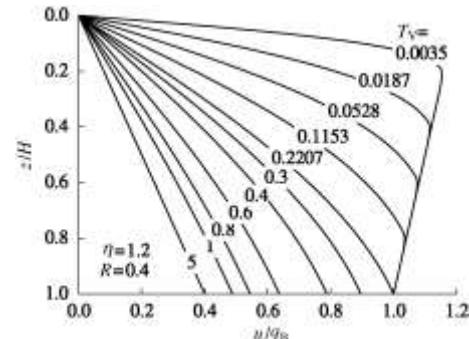
图 6 渗流移动边界的运动

Fig. 6 Motion of moving boundary of seepage

(2) 孔隙水压力分布

图 7, 8 分别为 $R=0.4$, $\eta=1.2$ 和 $R=0.4$, $\eta=0.4$ 时, 无量纲孔隙水压力的分布曲线。随着时间的推移, 土体中孔隙水压力逐渐消散, 消散速率随时间逐渐减慢。随着时间的发展, 由于起始比降的存在, 孔隙水压力并不会完全消散, 土体中仍有残余的孔隙水压力, 残余孔隙水压力的大小即为土体中孔压的长期稳定解。当渗流最终能够发展至土层底部, 残余孔隙水压力随深度线性增大, 与起始比降的大小成正比; 若渗

流最终不能在整个土层发生, 残余孔隙水压力沿深度则呈折线型分布。

图 7 孔隙水压力的分布 ($R=0.4$, $\eta=1.2$)Fig. 7 Distribution of excess pore pressure for $R=0.4$, $\eta=1.2$

(3) 固结度

图 9、图 10 分别为按沉降定义和按孔压定义的固结度随时间发展曲线。随着起始比降的增大, 按沉降定义的固结度随之增大, 而按孔压定义的固结度则随之减小。由于存在起始比降, 按孔压定义的固结度趋向于一个小于 1 的值, 表明地基中的孔隙水压力永远不能完全消散, 有效应力总是小于总应力。

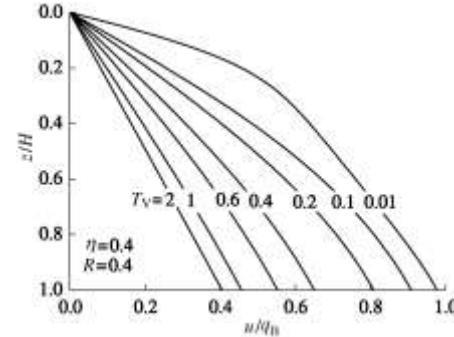
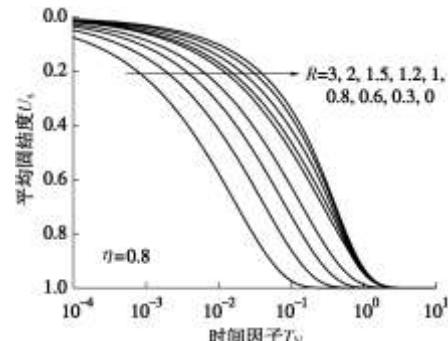
图 8 孔隙水压力的分布 ($R=0.4$, $\eta=0.4$)Fig. 8 Distribution of excess pore pressure for $R=0.4$, $\eta=0.4$ 图 9 按沉降定义平均固结度 (U_s)

Fig. 9 Average degree of consolidation defined by settlement

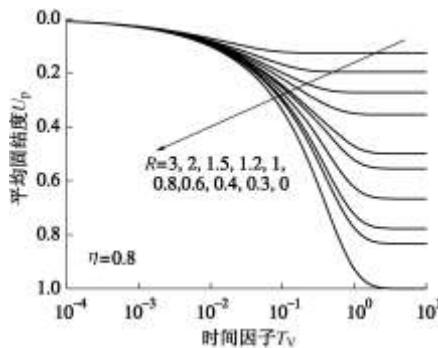
图 10 按孔压定义平均固结度(U_p)

Fig. 10 Average degree of consolidation defined by pore pressure

4 结 论

(1) 本文分析了初始孔压非均匀布下, 考虑起始比降后各种条件下的计算模型, 并获得了相应的一维固结解答, 当起始比降 i_0 等于 0 时, 本文解退化为太沙基一维固结解答; 并将本文近似解与已有解答进行对比, 两者非常接近, 表明本文分析方法是合理的。

(2) 由于存在起始比降, 孔隙水压力并不会完全消散, 土体中仍有残余的孔隙水压力。

(3) 当初始孔压降大于起始比降时, 渗流瞬间在整个土层发生; 当初始孔压降小于起始比降时, 由于起始比降的存在, 土中渗流是逐渐向下发展的, 在初始孔压降一定的条件下, 起始比降越小, 移动速度越快; 当起始比降大于一定值, 渗流并不会发展至土层底部, 且随着起始比降的增大, 发生固结的土层厚度越小。

(4) 考虑起始比降, 由于存在残余孔隙水压力, 总应力与最终有效应力不相等, 地基平均固结度按沉降定义和按孔压定义并不相同。随着起始比降的增大, 按孔压定义的地基平均固结度则随之减小, 而按沉降定义的地基平均固结度则随之增大。

参 考 文 献:

- [1] MILLER R J, LOW P F. Threshold gradient for water flow in clay systems[J]. Soil Science Society of America Proceedings, 1963, **27**(6): 605 - 609.
- [2] MITCHELL J K, YOUNGER J S. Abnormalities in hydraulic flow through fine-grained soils[J]. ASTM Special Publication 417, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1967: 106 - 141.
- [3] PASCAL F, PASCAL H, MURRAY D W. Consolidation with threshold gradients[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1981, **5**: 247 - 261.
- [4] 刘慈群. 有起始比降固结问题的近似解[J]. 岩土工程学报, 1982, **4**(3): 107 - 109. (LIU Ci-qun. Approximate solution for one-dimensional consolidation with threshold gradient[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, **4**(3): 107 - 109. (in Chinese))
- [5] 刘忠玉, 刘忠广, 马崇武. 考虑起始水力梯度时饱和黏土的一维固结[J]. 郑州大学学报, 2006, **27**(3): 21 - 24. (LIU Zhong-yu, LIU Zhong-guang, MA Chong-wu. One dimensional consolidation of saturated clays considering initial hydraulic gradient[J]. Journal of Zhengzhou University, 2006, **27**(3): 21 - 24. (in Chinese))
- [6] 邓英尔, 刘慈群, 王允诚. 一类非线性渗流数学模拟[J]. 云南石油学院学报, 2001, **23**(1): 22 - 24. (DENG Ying-er, LIU Ci-qun, WANG Yun-cheng. Mathematical simulation for a class of nonlinear flow[J]. Journal of Yunnan Petroleum Institute, 2001, **23**(1): 22 - 24. (in Chinese))
- [7] DENG Ying-er, XIE he-ping, HUANG Run-qiu, Liu Ci-qun. Law of nonlinear flow in saturated clays and radial consolidation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, **28**(11): 1427 - 1436.
- [8] ELNAGGAR H A, KRIZEK R J, KARADI G M. Effect of non-darcian Flow on time rate of consolidation[J]. J Franklin Inst, 1973, **296**: 323 - 337.
- [9] 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(5): 24 - 35. (XIE Kang-he. Theory of one dimensional consolidation of doubled-layered ground and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(5): 24 - 35. (in Chinese))
- [10] 邓英尔, 刘慈群, 黄润秋, 等. 高等渗流理论与方法[M]. 科学出版社, 2004. (DENG Ying-er, LIU Ci-qun, HUANG Run-qiu, et al. Theory and methods of higher percolation[M]. Science Press, 2004. (in Chinese))
- [11] 施建勇, 闻延煦, 雷国辉, 等. 固结试验及其相关问题的讨论[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2004, **32**(2): 213 - 215. (SHI Jian-yong, WEN Yan-xu, LEI Guo-hui, et al. Discussion on consolidation test and some relative problems[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2004, **32**(2): 213 - 215. (in Chinese))
- [12] 龚晓南, 刘松玉, 李广信, 等. 土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (GONG Xiao-nan, LIU Song-yu, LI Guang-xin, et al. Soil mechanics[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002. (in Chinese))