

## 考虑流固耦合作用的管涌发展数学模型研究

梁 越<sup>1,2,3,4</sup>, 陈 亮<sup>1,3,4</sup>, 陈建生<sup>3,4</sup>

(1. 重庆交通大学省部共建水利水运工程教育部重点实验室, 重庆 400074; 2. 重庆交通大学国家内河航道整治工程技术研究中心, 重庆 400074;  
3. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 4. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 根据质量守恒定律, 针对单元体中移动颗粒的质量守恒, 得到了管涌过程中移动颗粒的连续性方程; 颗粒的运动与流体的流动相互关联, 结合渗流的连续性方程, 得到了管涌发展过程中的流固耦合模型; 根据颗粒流失与渗流场变化的相互关系, 对渗透系数、单位流失量、孔隙率等参数的联系进行量化, 结合初始条件与边界条件, 即可实现耦合模型的求解。最后, 针对一维管涌情况, 利用分时步法对模型进行解耦, 以有限差分法对模型进行离散并成功求解, 分析了管涌过程中颗粒流失、流速、孔隙率以及剩余颗粒量等参数的变化规律; 在不同水力梯度下进行重复试验, 分析了水力梯度在管涌发展中对各参数变化规律的影响。

**关键词:** 流固耦合; 管涌; 质量守恒定律; 起动流速; 有限差分法

中图分类号: TV139.14 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2011)08-1265-06

作者简介: 梁 越(1985-), 男, 山东临沂人, 博士研究生, 主要从事渗流理论与渗透破坏机理方面的研究。E-mail:  
liangyue2560@hhu.edu.cn。

### Mathematical model for piping development considering fluid-solid interaction

LIANG Yue<sup>1,2,3,4</sup>, CHEN Liang<sup>1,3,4</sup>, CHEN Jian-sheng<sup>3,4</sup>

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 2. National Inland Waterway Regulation Engineering Research Center, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 3. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 4. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** Based on the law of conservation of mass, the conservation of mass of transporting particles in the cell body is determined, from which a continuity equation of the transporting particles is derived. Particle transporting is associated with the fluid flow. So the calculation should combine the continuity equation of flow in the seepage field. Then a fluid-solid interaction model is proposed. Based on the relations between the particle loss and the change of the seepage field, the relationship among the permeability coefficient, losses quantity, porosity and other parameters is quantified. The coupled model can be solved combined with the initial conditions and boundary conditions. Finally, a one-dimensional piping problem is simulated by means of the proposed model. Decoupled by a time-step method, the model is solved successfully by use of the finite difference method. From the calculated results, the variations of the particle loss, seepage velocity, porosity and the remaining particle volume in the piping proceeding are analyzed. The impact of the hydraulic gradient is discussed as well with repeated calculation under different hydraulic gradients.

**Key words:** fluid-solid interaction; piping; law of conservation of mass; starting velocity; finite difference method

### 0 引言

渗透破坏是堤防、基坑等工程失稳、破坏的主要因素之一。渗透破坏发生后, 土体内部颗粒大量流失, 渗透流量急剧增加, 从而形成集中渗透通道<sup>[1]</sup>, 使土体内部渗流场及应力场发生变化, 可能使堤防在很短的时间内发生破坏, 并可能造成的边坡失稳或洪水灾害等会对人民的生命财产安全造成极大的损失。对于

渗透破坏机理以及防治方法的研究, 一直是学者研究的重要课题<sup>[2-4]</sup>。管涌是渗透破坏的主要形式, 在工程中, 也常将其它的渗透破坏形式统称为管涌。管涌是

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973计划)项目(2007CB714102); 教育部博士点基金项目(2009009410007); 重庆交通大学省部共建水利水运工程教育部重点实验室开放基金项目(SLK2008A02)  
收稿日期: 2010-04-13

在渗流作用下, 土体内部细小颗粒沿大颗粒通道移动并被带出土体的过程。由于土体构成具有很强的随机性与复杂性, 管涌发生后, 由于颗粒的流失, 土体的渗透性一直在发生变化, 渗透性的变化会影响渗流场的分布, 渗流场分布的变化又会对颗粒的流失产生影响, 使得颗粒的流失与渗流场的变化相互影响, 是一个耦合过程<sup>[5]</sup>, 从而很难利用数学语言对管涌的发生发展过程进行描述。因此, 在以前的研究中, 一般采用室内试验的方法对管涌的过程进行模拟研究。众多学者在管涌的室内试验与工程应用方面取得了丰硕的成果<sup>[6-10]</sup>。近年来, 随着研究手段的发展以及研究思想的创新, 新的研究方法及研究手段被利用到管涌机理研究中来, 如有限元法、离散元方法、神经网络方法、随机方法等<sup>[11-15]</sup>, 极大的推动了管涌机理的研究与应用。但如何建立并求解管涌发展的数学模型依然是困扰研究人员的主要问题。本文从运动颗粒的守恒定律以及运动流体的守恒定律出发, 建立起颗粒流失与渗透性变化的相互联系, 建立了管涌发展过程的数学模型, 并以一维情况为例, 利用有限差分法对模型进行了求解, 得到管涌发展过程中颗粒流失、渗流性变化、以及流速变化等的规律。

## 1 模型的建立

鉴于管涌的定义, 管涌的发生与发展要满足以下基本条件: ①土体为管涌型土体, 即土体中的颗粒可以分为骨架颗粒与可以移动的颗粒, 且骨架颗粒的孔隙可以提供可动颗粒被带出的通道; ②可动颗粒的静力平衡达到被破坏的条件。在渗流场中, 颗粒受到流体流动的拖曳力的作用, 当拖曳力的大小达到破坏颗粒静力平衡的临界值时, 颗粒开始发生移动。颗粒受到的拖曳力与颗粒的大小以及渗流的孔隙流速有关, 对于粒径一定的颗粒, 使其发生移动的孔隙流速称为颗粒的起动流速。在本模型的推导过程中, 假定符合以上基本条件, 并假设: ①可动颗粒流失后土体体积不发生变化, 即流失颗粒的体积变为孔隙体积; ②只要孔隙流速大于可动颗粒的起动流速, 则可动颗粒可以完全流失, 即颗粒的淤堵作用。并令可动颗粒的密度为  $\rho_m$ , 其物理意义为单位体积土体内可动颗粒的质量; 骨架颗粒的密度为  $\rho_s$ , 物理意义为单位体积土体内骨架颗粒的质量。

对于颗粒运动的质量守恒定律, Sterpi<sup>[16]</sup>与 Cividini 等<sup>[17]</sup>曾分别利用室内试验法与有限单元法进行过分析。

在图 1 所示的微元体中, 利用与文献[17]类似的方法, 根据质量守恒定律, 建立移动颗粒的质量守恒方程, 图 1 中,  $q$  为移动颗粒通量。

根据质量守恒, 可得到在  $\Delta t$  时间内单元体内移动颗粒的质量守恒定律:

$$-\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - I \right) = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (1)$$

式中  $\rho_m$  为移动颗粒的密度, 其物理意义为单位时间内流经单位土体的颗粒质量与流体体积的比值;  $I$  为移动颗粒的源汇项, 其物理意义为管涌过程中的单位时间内, 单位体积土体内可动颗粒转化为移动颗粒的质量, 此时源汇项为正; 如移动颗粒转化为静态的可动颗粒, 则为颗粒的沉积过程, 此时源汇项为负。

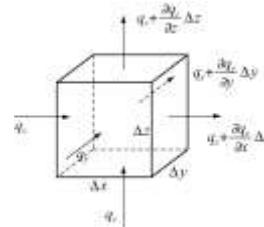


图 1 微元体内的移动颗粒质量守恒

Fig. 1 Mass conservation of the transporting particles in cell body

根据  $q$  的定义得

$$\begin{cases} q_x = v_x \rho_m, \\ q_y = v_y \rho_m, \\ q_z = v_z \rho_m, \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  为渗透流速矢量  $\vec{v}$  在 3 个方向上的分量。

将式(2)代入式(1)整理得

$$I - \text{div}(\vec{v} \rho_m) = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad (3)$$

式(3)即为管涌过程中移动颗粒的连续性方程, 方程中共有  $\rho_m$ ,  $\vec{v}$  两个未知数, 需联立渗流的连续性方程才可以求解。

假定流体不可压缩, 得到流体的连续性方程为

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

假定管涌过程中渗流仍符合达西定律, 则式(4)可以表述为

$$\frac{\partial (k_x \frac{\partial H}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (k_y \frac{\partial H}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (k_z \frac{\partial H}{\partial z})}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

式中,  $H$  为水头,  $k$  为渗透系数。

联立式(3)~(5), 结合边界条件与初始条件, 即为管涌发展的数学模型。在模型求解前, 需要考虑两式的耦合: ①当孔隙流速大于起动流速时, 颗粒起动并被带走, 孔隙流速小于起动流速时移动的颗粒发生沉积, 因此颗粒的源汇项与流体的流速是相关的;

②无论颗粒的流失或沉积, 都会引起土体中孔隙率的变化, 而土体的渗透系数与孔隙率有关, 孔隙率越大渗透性越强, 反之越弱。

下面利用各参数的相互联系, 建立耦合过程的数学关系。对于移动颗粒连续性方程中的源汇项  $I$ , 其实质是可动颗粒的流失量, 当孔隙流速大于起动流速时, 土体内的可动颗粒起动, 转化为移动颗粒, 源汇项为正, 即颗粒流失过程; 反之, 孔隙流速减小, 流体的拖曳力不足以维持移动颗粒的运动, 则移动颗粒会发生沉积, 此时源汇项为负, 为颗粒沉积过程。当孔隙流速大于起动流速时,  $I$  随孔隙流速的增加而增加, 当孔隙流速与起动流速相等时颗粒处于临界状态; 同时与单元体内剩余可动颗粒的量有关, 剩余量越多,  $I$  越大, 剩余量为 0 则  $I$  也为零。考虑这两种因素, 构建流失过程的线性模型为

$$I = \alpha \rho_f (v_r - v^*) \quad (6)$$

式中  $\alpha$  为系数, 且  $\alpha > 0$ ;  $v_r$  为孔隙流速的大小;  $v^*$  为颗粒的起动流速。根据  $I$  的物理概念,  $I$  为单位时间内, 单位体积土体内可动颗粒转化为移动颗粒的质量, 因此  $I$  的量纲为  $M/(T L^3)$ 。式(6)中  $\rho_f$  的量纲为  $M/L^3$ ,  $(v_r - v^*)$  的量纲为  $L/T$ , 因此  $\alpha$  也是有量纲的参数, 其量纲为  $1/L$ 。

当实际流速小于等于临界流速时, 颗粒发生沉积,  $I$  为负, 且绝对值随流速的减少而增加; 同时与单元内移动颗粒的量有关, 移动颗粒越多,  $|I|$  绝对值越大, 浓度为 0, 则  $I$  也为 0, 考虑这两个影响因素, 构建颗粒沉积的线性模型为

$$I = -\beta \rho_m [v_r - v^*] \quad (7)$$

式中,  $\beta$  为系数, 且  $\beta > 0$ 。

综合式(6)、(7)得流失量为

$$I = \begin{cases} \alpha \rho_f [v_r - v^*] & (v_r > v^*) \\ -\beta \rho_m [v_r - v^*] & (0 \leq v_r \leq v^*) \end{cases} \quad (8)$$

剩余可动颗粒浓度与总的流失量有关, 即

$$\rho_f(x, y, z, t) = \rho_{f0}(x, y, z) - \int_0^t I(x, y, z, t) dt \quad (9)$$

式中,  $\rho_{f0}(x, y, z)$  为初始可动颗粒浓度。

孔隙流速  $v_r(x, y, z, t)$  与达西流速和孔隙率有关, 即

$$v_r(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) / n(x, y, z, t) \quad (10)$$

由于流失的颗粒转变为孔隙体积, 那么孔隙率  $n(x, y, z, t)$  也与流失量有关, 即

$$n(x, y, z, t) = n_0(x, y, z) + \frac{\int_0^t I(x, y, z, t) dt}{\gamma_{fs}} \quad (11)$$

式中,  $n_0$  为初始孔隙率,  $\gamma_{fs}$  为可动颗粒的颗粒密度。

在耦合模型中, 渗透系数也是一个随管涌发展过程变化的量, 根据 Kozeny-Carman 方程得

$$k(x, y, z, t) = \frac{1}{C_s S_s^2 T^2} \frac{n^3}{(1-n)^2} \quad (12)$$

式中  $S_s$  为单位体积土体的颗粒表面积总量;  $C_s$  为形状系数;  $T$  为扭曲系数。如果忽略颗粒流失或沉积对颗粒表面积总量的影响, 则  $C_s S_s^2 T^2$  为常数, 即认为渗透系数与  $n^3/(1-n)^2$  呈正比例关系。

## 2 模型的求解

在确定上述参数后, 结合边界条件与初始条件, 即可对模型进行求解。由于模型的复杂性, 难以解得解析解, 因此利用数值方法对模型进行求解。在模型求解前, 利用分时步法对模型进行解耦: 即将时间过程按一个很小的时间间隔进行离散, 在一个时步下, 根据渗流场的边界条件及初始条件, 先对渗流场(式(5))进行求解, 将求得的渗流场参数代入式(8)中得到源汇项, 然后代入式(3)中对颗粒的运动过程进行求解, 求解的结果代入式(9)~(12)中, 对渗流场参数进行更新, 然后将更新后的参数再代回式(5)中进行下一时步的求解, 如此循环, 得到随着时间的发展, 管涌过程中可动颗粒的侵蚀过程。

以一维管涌情况为例, 利用有限差分法介绍模型的求解过程, 模型高度 1 m, 底部水头  $H_1$ , 上部水头  $H_2$ ,  $H_1 > H_2$ , 在稳定水头差作用下发生由下向上的二维渗流。模型初始状态为均质, 初始孔隙率 0.3, 初始渗透系数  $1 \times 10^{-5}$  m/s。土体初始干密度 1800 kg/m<sup>3</sup>, 其中可动颗粒质量占总固相的 20%, 其余为骨架颗粒, 即初始可动颗粒密度为  $\rho_{f0} = 360$  kg/m<sup>3</sup>。在初始条件下, 流速、移动颗粒密度都为 0(图 2)。

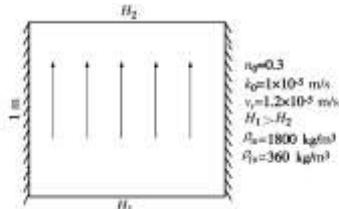


图 2 一维管涌模型及相关参数

Fig. 2 1-D piping model and parameters

在一维情况下, 耦合模型退化为

$$\left. \begin{aligned} I - \frac{\partial(\vec{v}\rho_m)}{\partial z} &= \frac{\partial\rho_m}{\partial t}, \\ \frac{\partial(k \frac{\partial H}{\partial z})}{\partial z} &= 0, \\ H(0,t) &= H_1, \\ H(1,t) &= H_2, \\ I(z,0) &= 0, \\ \rho_m(0,0) &= 0, \\ \rho_m(z,0) &= 0, \\ I(z,t) &= \begin{cases} \alpha\rho_r[v_r - v^*] & (v_r > v^*) \\ -\beta\rho_m[v_r - v^*] & (0 \leq v_r \leq v^*) \end{cases}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

根据有限差分原理, 将模型离散为间距为  $\Delta z$  的差分格点, 同样将时间离散为  $\Delta t$  的间隔, 以差商代替微分, 得颗粒运动方程的隐式差分格式为

$$v_i \frac{\rho_{m(i+1)}^{j+1} - \rho_{m(i)}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\rho_{m(i)}^{j+1}}{\Delta t} = I_i + \frac{\rho_{m(i)}^j}{\Delta t}. \quad (14)$$

流体流动的隐式差分格式为

$$k_r \frac{H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}}{(\Delta z)^2} = 0. \quad (15)$$

将边界条件和初始条件都离散到各差分格点上, 对每个格点列式 (15) 的方程, 如果有  $N$  个格点, 就可以得到  $N$  个方程组成的线性方程组, 利用简单迭代法对方程组进行求解得到各格点的水头值, 然后利用达西定律计算各格点上的流速, 再根据式 (10) 计算各格点的孔隙流速, 代入式 (8) 中计算流失量, 同时对渗透系数等参数进行更新, 将得到的参数代入式 (14) 中, 结合边界条件与初如条件, 同样得到  $N$  维方程组, 求解后即得的颗粒运动状态, 从而完成一个时步的计算; 计算完成后将相关参数进行更新, 再代入式 (15), 从而进行下一时步的计算, 如此循环从而实现对管涌过程的模拟。各参数在计算过程中第  $j$  时步的流失量值为

$$I_i^j = \begin{cases} \alpha(\rho_{r0} - \sum_0^{j-1} I_i^{j-1}) \left[ \frac{v_i^{j-1}}{n_i^{j-1}} - v^* \right] & (v_{r(i)} > v^*) \\ -\beta\rho_i^{j-1} \left[ \frac{v_i^{j-1}}{n_i^{j-1}} - v^* \right] & (0 \leq v_{r(i)} \leq v^*) \end{cases}. \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (14) 中解得移动颗粒密度, 并按下列两式对孔隙率及渗透系数进行更新:

$$n_i^j = n_i^{j-1} + \frac{I_i^{j-1} \Delta z \Delta t}{\gamma_{fs}}, \quad (17)$$

$$k_i^j = \frac{1}{C_s S_s^2 T^2} \frac{(n_i^j)^3}{(1 - n_i^j)^2}. \quad (18)$$

在本算例中, 取  $\Delta z = 0.01$  m, 则共有 101 个差分格点; 取  $\Delta t = 0.5$  s, 取总的模拟时间长度为 65 s, 即

共有 130 个时间差分时步。取  $\alpha=\beta=1000/m$ , 并假定颗粒起动流速为  $v^* = 1.25 \times 10^{-5}$  m/s。取水头差  $\Delta H = H_1 - H_2 = 0.8$  m, 则总体水力梯度  $i = \Delta H/L = 0.8$ 。将以上各参数代入模型中, 对于线性方程组的求解, 利用 SOR 超松弛迭代法进行求解。求解的结果见图 3~5。

图 3 为模型中移动颗粒通量  $q$  随时间的变化规律, 通量方向与渗透流速方向相同, 即从模型底部指向顶部, 在同一时刻, 移动颗粒通量随  $z$  的增加而呈线性增长; 随着管涌的发展, 在同一层位,  $q$  随时间的增加而呈现先增加后减小的趋势。

图 4, 5 为在  $z=0.5$  m 层位可动颗粒流失量、孔隙流速、孔隙率以及剩余可动颗粒密度随时间的变化曲线。随着时间的发展, 颗粒流失量也呈现出先增加后减小的趋势, 伴随着颗粒的流失, 孔隙率是单调减小、孔隙流速是单调增加的, 当管涌发展到 65 s 时, 剩余颗粒密度接近 0, 即说明土体内的可动颗粒大部分已被带出土体, 这也是造成流失量先增加而后减小的原因。当颗粒接近流失时, 各曲线都呈现出向恒定值的渐近性, 即在流失后期, 各参数的变化速度都在减小, 而越来越接近稳定状态。

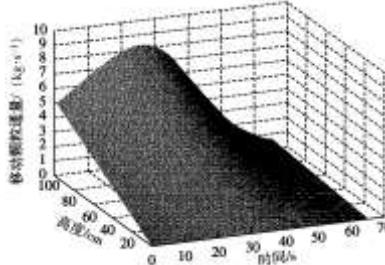


图 3  $i=0.8$  时模型内移动颗粒通量随时间变化

Fig. 3 Variation of flux of transporting particle with time ( $i=0.8$ )

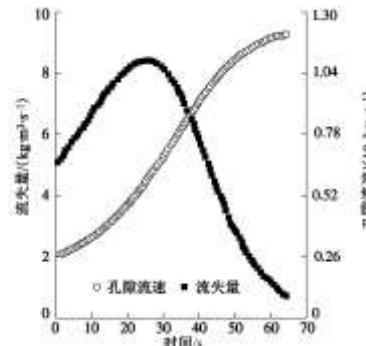


图 4 孔隙流速和流失量随时间的变化曲线 ( $i=0.8, z=0.5$ )

Fig. 4 Variation of pore velocity and unit loss quantity with time ( $i=0.8, z=0.5$ )

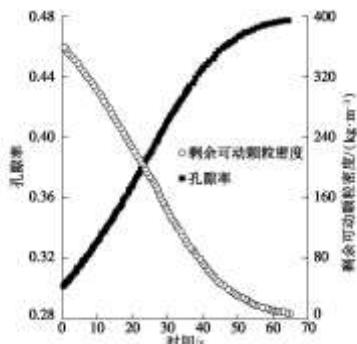


图 5 剩余可动颗粒密度和孔隙率随时间的变化曲线  
( $i=0.8, z=0.5$ )

Fig. 5 Variation of remaining movable particle density and unit loss quantity with time ( $i=0.8, z=0.5$ )

### 3 讨 论

为了分析不同水力梯度条件下的颗粒流失规律的异同, 又分别采用  $i=0.4$ 、 $i=0.6$ 、 $i=1.0$  对模型进行求解。求解的结果见图 6~9。图 6 为在  $z=0.5$  层位不同水力梯度条件下流失量的变化规律, 从图中可以看出, 水力梯度对流失量的峰值具有明显的影响,  $i=1.0$  条件下的流失量峰值接近  $i=0.6$  条件下的两倍; 水力梯度同样影响流失量到达的时间,  $i=1.0$  时 15 s 左右即达到流失量峰值, 而此时  $i=0.4$  时的流失量还不到  $i=1.0$  的 1%。流失量曲线具有“拖长尾”的现象, 即当管涌后期, 土体内可动颗粒已大部分被带出土体, 剩余可动颗粒已很少, 导致流失量下降。

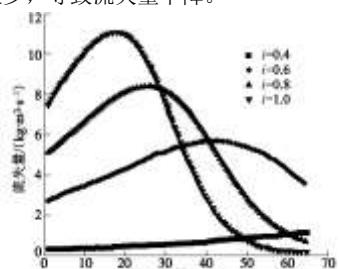


图 6 不同水力梯度下土体流失量变化曲线 ( $z=0.5$ )  
Fig. 6 Variation of unit loss quantity with time under different hydraulic gradients ( $z=0.5$ )

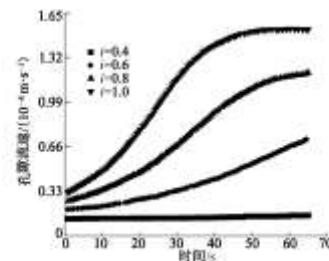


图 7 不同水力梯度下孔隙流速随时间的变化曲线 ( $z=0.5$ )  
Fig. 7 Variation of pore velocity with time under different hydraulic gradients ( $z=0.5$ )

孔隙率

剩余可动颗粒密度

孔隙流速

时间/s

剩余可动颗粒密度

孔隙率

孔隙流速

近于 0。从图 9 中同样可以看出, 水力梯度值越高, 颗粒流失总量越多, 管涌发展越快。

## 4 结语

本文根据管涌发生发展的基本规律, 利用质量守恒定律推得了移动颗粒的连续性方程, 并得到了颗粒运动与渗流场中流体流动的耦合模型。根据影响颗粒流失的相关因素, 提出了颗粒流失量及沉积量的计算模型, 并针对一维管涌的算例, 利用有限差分法对模型进行了求解, 得到了管涌发生后管涌呈加速发展的过程。单位体积内的颗粒流失量呈先增加后减小的趋势, 孔隙率与渗透流速不断增加。通过对不同水力梯度下管涌发展的模拟, 总结了不同水力梯度条件下管涌发展过程的对比, 水力梯度越高, 管涌发展越迅速。这与管涌发展的基本规律相符合。

需要指出的是, 本文的模型考虑的可动颗粒流失后骨架不破坏的管涌情况; 同时, 在实际土体中, 由于可动颗粒粒径是连续分布的, 因此不同粒径的起动流速会有所差别, 在以后的研究中对起动流速的确定方法的研究是非常有必要的; 同样, 本文所利用的流失量公式仅是根据其影响因素做出的简化线性模型, 需要从颗粒运动的物理本质出发对颗粒的流失与孔隙流速的关系做进一步的分析与研究。这些都是下一步研究中所要涉及的问题。

## 参考文献:

- [1] 陈建生, 李兴文, 赵维炳. 堤防管涌产生集中渗漏通道机理与探测方法研究[J]. 水利学报. 2000(9): 48 - 54. (CHEN Jian-sheng, LI Xin-wen, ZHAO Wei-bin. Study on piping leakage mechanism[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000(9): 48 - 54. (in Chinese))
- [2] TERZAGHI K. Effect of minor geologic details on the safety of dams[J]. Technical Publication No. 215, Class I , Mining Geology, No. 26, American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, New York, 1929: 31 - 46.
- [3] 沙金煊. 多孔介质中的管涌研究[J]. 水利水运科学研究, 1981(3): 89 - 93. (SHA Jin-xuan. Piping research on porousmedium[J]. Hydro-Science and Engineering, 1981(3): 89 - 93. (in Chinese))
- [4] 刘杰. 土的渗透稳定与渗流控制[M]. 北京: 水力电力出版社, 1992. (LIU Jie. Seepage stability and seepage controlon soil[M]. Beijing: China Water Resources and Electric Power Press, 1992. (in Chinese))
- [5] 周晓杰, 介玉新, 李广信. 基于渗流和管流耦合的管涌数值模拟[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 3154 - 3158. (ZHOU Xiao-jie, JIE Yu-xin, LI Guang-xin. Numerical simulation of piping based on coupling seepage and pipe flow[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 3154 - 3158. (in Chinese))
- [6] WAN Chi-fa. Laboratory tests on the rate of piping erosion of soils in embankment dams[J]. Geotechnical Testing Journal, 2004, 27(3): 295 - 303.
- [7] 毛昶熙, 段祥宝, 蔡金榜, 等. 堤基渗流无害管涌试验研究[J]. 水利学报, 2004(11): 46 - 53. (MAO Chang-xi, DUAN Xiang-bao, CAI Jin-bang, et al. Experimental study on harmless seepage piping in levee foundation[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004(11): 46 - 53. (in Chinese))
- [8] 刘忠玉, 乐金朝, 苗天德. 无粘性土中管涌的毛管模型及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(22): 3871 - 3876. (LIU Zhong-yu, YUE Jin-chao, MIAO Tian-de. Capillary-tube model for piping in noncohesive soils and its application[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(22): 3871 - 3876. (in Chinese))
- [9] 李广信, 周晓杰. 堤基管涌发生发展过程的试验模拟[J]. 水利水电科技进展, 2005(12): 21 - 24. (LI Guang-xin, ZHOU Xiao-jie. Laboratory simulation on generation and evolution of piping in embankment foundation[J]. Advances In Science and Technology of Water Resources, 2005(12): 21 - 24. (in Chinese))
- [10] 姚秋玲, 丁留谦, 等. 单层和双层堤基管涌砂槽模型试验研究[J]. 水利水电技术, 2007, 38(2): 13 - 18. (YAO Qiu-ling, DING Liu-qian, et al. Experimental studies on piping in single- and two-stratum dike foundations[J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2007, 38(2): 13 - 18. (in Chinese))
- [11] 殷建华. 土堤管涌区渗流的有限元模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 679 - 686. (YIN Jian-hua. Finite element simulation on seepage of clay bank's piping region [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(6): 679 - 686. (in Chinese))
- [12] 张我华, 余功栓, 等. 堤与坝管涌发生的机理及人工智能预测与评定[J]. 浙江大学学报(工学版), 2004(7): 902 - 908. (ZHANG Wo-hua, YU Gong-suan, et al. Mechanism model and artificial intelligence method for prediction and judgment of piping occurring in embankment [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2004(7): 902 - 908. (in Chinese))
- [13] 赵正信, 陈建生, 陈亮. 无黏性管涌型土的 BP 神经网络判别法研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(4): 536 - 540. (ZHAO Zheng-xin, CHEN Jian-sheng, CHEN Liang. Application of BP neural network to assessment of noncohesive piping-typed soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(4): 536 - 540. (in Chinese))

- [14] 周 健, 姚志雄, 张 刚. 管涌发生发展过程的细观试验研究[J]. 地下空间与工程学报, 2007(5): 842 - 848. (ZHOU Jian, YAO Zhi-xiong, ZHANG Gang. Meso-laboratory study on initiation and evolution of piping[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2007(5): 842 - 848. (in Chinese))
- [15] 陈生水, 钟启明, 任 强. 土石坝管涌破坏溃口发展数值模型研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(5): 653 - 657. (CHEN Sheng-shui, ZHONG Qi-ming, REN Qiang. Numerical study on break development due to piping failure
- [16] DONATELLA Sterpi. Effects of the erosion and transport of fine particles due to seepage flow[J]. International Journal of Geomechanics, 2003(3): 111 - 122.
- [17] ANNAMARIA Cividini, GIANCARLO Gioda. Finite-element approach to the erosion and transport of fine particles in granular soils[J]. International Journal of Geomechanics, 2004(4): 191 - 198.

带格式的：项目符号和编号