

加速对称刚度矩阵技术及其在岩土有限元分析中的应用

陈曦¹, 程勇刚²

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072)

摘要: 非关联塑性岩土工程问题的有限元离散会产生非对称刚度矩阵, 对于大规模岩土工程问题, 大量非对称线性方程组的求解会显著增加内存需求和计算耗时。基于加速初始刚度法思想, 提出了加速对称刚度矩阵技术来求解具有非关联塑性模型的岩土工程问题。进一步评价和比较了两个基于最小二乘法的加速技术以及两个近似对称刚度矩阵, 即弹性刚度矩阵 K_e 和投影到塑性势面的具有关联塑性流的等效材料的刚度矩阵 K_G 。通过一个二维孔洞扩张算例和一个二维边坡算例, 评价和比较了这些加速刚度矩阵技术和 Newton-Raphson 迭代法。数值结果表明加速 K_G 具有较好的计算性能, 例如, 加速 K_G 技术只需要对称线性求解器, 收敛速度较快, 计算耗时有时会少于 Newton-Raphson 迭代法。

关键词: 非关联塑性流; 非对称刚度矩阵; 加速对称刚度; 初始刚度; 最小二乘法; 剪切强度折减法

中图分类号: TD853.34

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2011)08-1216-06

作者简介: 陈曦(1977-), 男, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程数值计算方法等方面的研究。E-mail: chenxi@bjtu.edu.cn。

Accelerated symmetric stiffness matrix technique and its applications in geotechnical finite element analysis

CHEN Xi¹, CHENG Yong-gang²

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Finite element discretization of non-associated plastic geotechnical problems may result in non-symmetric stiffness matrices, and solving the nonsymmetric linear systems of equations arising from large-scale geotechnical problems may significantly increase the computer memory storage requirement and the computer runtime. Based on the accelerated initial stiffness matrix technique, the accelerated symmetric stiffness matrix techniques are proposed to solve the non-associated plastic geotechnical problems. Furthermore, two acceleration techniques based on the least-square minimization and two approximate symmetric stiffness matrices (i.e. the elastic stiffness matrix K_e and the stiffness matrix K_G obtained from an equivalent material with associated plastic flow by mapping the yield surface to the plastic potential surface) are assessed and compared. By using a 2-D cavity expansion example and a 2-D slope example, the accelerated symmetric stiffness matrix techniques and the Newton-Raphson iteration are evaluated and compared, and numerical results show that the accelerated K_G techniques possess better computational performances. For example, they only resort to symmetric linear solvers, and have faster convergence rates, and the consumed computer runtime may be less than that of the Newton-Raphson iteration.

Key words: non-associated plastic flow; nonsymmetric stiffness matrix; accelerated symmetric stiffness; initial stiffness; least square method; shear strength reduction method

0 引言

岩土工程问题的有限元模拟和分析过程中, 经常需要采用非关联塑性流的本构关系^[1]。(如非关联塑性流 Mohr-Coulomb 模型和 Drucker-Prager 模型^[2])来模拟颗粒状岩土材料所具有的剪胀性。数值模拟和试验结果也表明简单地采用关联塑性流模型可能会高估岩

土材料的承载能力或稳定性分析中的安全系数, 从而导致非保守的结论^[1,3]。因此, 采用适当的非关联塑性

基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2010]1561号); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2011JB-M070)

收稿日期: 2010-06-09

流模型进行岩土工程数值模拟和分析具有重要的实际意义。对于非关联塑性流的数值模拟, 熊文林^[4]较早地提出了使用对称刚度的方法。

弹塑性岩土工程问题的有限元计算需要采用高效的非线性迭代方法, 如 Newton-Raphson (NR) 或称为 Newton 方法, 来进行内外力的平衡迭代。然而, NR 迭代方法中需要求解一系列的非对称线性方程组, 尽管 NR 迭代收斂较快, 但有时未必节省计算时间和内存。Zienkiewicz 等^[5]很早就提出了一个简单有效的初始刚度法来求解弹塑性工程问题, 而且至今仍被广泛使用。初始刚度法的主要优点在于: ①弹性刚度矩阵只需要组装一次, 若采用直接法来求解离散的线性方程组, 则也只需要一次 Cholesky 分解; ②因为采用了弹性刚度矩阵进行迭代, 初始刚度法具有较高的稳定性, 这主要是因为弹性刚度矩阵是不变的正定矩阵^[6]。由于采用了弹性刚度矩阵, 对于具有较强非线性的问题, 初始刚度法通常收斂较慢。为了改善初始刚度法的收斂性, 一些学者提出了加速策略。Chen^[7]通过对下一迭代步的估计残余力矢量使用最小二乘法来加速初始刚度法。Thomas^[8]则将最小二乘法应用于下一步迭代获得的“弹性”位移来提出加速方案。Sloan 等^[9]研究和比较了 NR 迭代和加速初始刚度法的计算性能, 并提出了一些改善策略。

本文基于加速初始刚度法的思想, 提出了加速对称刚度法来求解具有非关联塑性流模型的岩土工程问题。与熊文林^[4]、Sloan 等^[9]的研究相比, 本文将加速初始刚度法的计算方法泛化为加速对称刚度矩阵方法, 在所提出的对称刚度法的计算框架中寻求适于高效计算的稳定的对称刚度矩阵, 并比较了这些方法的计算性能。

1 弹塑性本构矩阵

经典弹塑性理论的本构关系为

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon = (D_e - D_p) d\varepsilon, \quad (1)$$

$$D_p = \frac{D_e b a^T D_e}{a^T D_e b - c^T h}。 \quad (2)$$

式中 $d\sigma$, $d\varepsilon$ 分别为应力和应变增量; D_e , D_p 和 D_{ep} 分别为弹性、塑性和弹塑性本构矩阵; a , b 分别为屈服面 F 和塑性势面 G 的法向矢量,

$$a = \partial F / \partial \sigma, \quad (3)$$

$$b = \partial G / \partial \sigma。 \quad (4)$$

很明显, 对于关联塑性流模型, $a=b$ 使得 D_{ep} 为对称矩阵; 而对于非关联塑性流模型, $a \neq b$ 使得 D_{ep} 为非对称矩阵。

式(2)中, c 为屈服面函数 F 对内部状态变量矢

量 q 的导数,

$$c = \partial F / \partial q, \quad (5)$$

对于状态变量为单硬化参数的土工材料, q 退化为硬化参数 κ , 其增量定义如下,

$$d\kappa = d\lambda h, \quad (6)$$

式中, $d\lambda$ 为塑性乘子增量,

$$d\lambda = \frac{a^T D_e d\varepsilon}{a^T D_e b - c^T h}, \quad (7)$$

根据材料硬化类型不同, h 定义不同。通常, 为了进行稳定的弹塑性计算, 可以采用如下近似的弹塑性本构矩阵,

$$\hat{D}_{ep} = D_e - \beta \hat{D}_p \approx D_{ep}, \quad (8)$$

式中, β 是一个标量, 可称为稳定因子, \hat{D}_p 则是对 D_p 的近似。

2 非线性迭代与近似对称刚度矩阵

在非线性有限元计算过程中, 残余力矢量或不平衡力矢量 $R(u)$ 可以通过总势能 $\Psi(u)$ 得出,

$$\partial \Psi(u) / \partial u = R(u), \quad (9)$$

式中, u 为位移矢量。而实际计算中, 残余力矢量则通过外力 F_{ext} 和内力 F_{int} 计算,

$$R(u) = F_{ext} - F_{int}(u) = 0。 \quad (10)$$

内力则通过积分点的应力按下式评价,

$$F_{int}(\sigma) = \int_V B^T \sigma dV, \quad (11)$$

式中, B 为应变 - 位移关系矩阵。

将残余力矢量函数 $R(u)$ 按一阶泰勒级数展开, 得

$$R(u^{(k-1)}) + \frac{\partial R}{\partial u}(u^{(k-1)}) \Delta u^{(k)} = 0, \quad (12)$$

式中,

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\frac{\partial F_{int}(u)}{\partial u} = -K_T, \quad (13)$$

$$K_T = \sum_{elements} k_{ep} = \sum_{elements} \int_{V^e} B^T D_{ep} B dV, \quad (14)$$

因此, NR 迭代可表示为

$$K_T^{(k-1)} \Delta u_T^{(k)} = R^{(k-1)} = F_{ext} - F_{int}^{(k-1)}, \quad (15)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + \omega^{(k)} d^{(k)}, \quad (16)$$

式中, $d^{(k)} = \Delta u_T^{(k)}$ 为搜索方向矢量, $\omega^{(k)}$ 为线搜索的步长参数。

对于 Newton 和拟 Newton 迭代法, 其收斂性可按下式进行评价:

$$\left\| R^{(k-1)} + \frac{\partial R}{\partial u}(u^{(k-1)}) d^{(k)} \right\| \leq \eta_{k-1} \|R^{(k-1)}\|, \quad (17)$$

为了保证迭代收斂, 式(17)中强制项需要满足 $\eta_{k-1} \in [0, 1)$ 。在式(17)中, 近似计算刚度矩阵 $\partial R / \partial u$ 或搜索方向 $d^{(k)}$ 都会使完全 Newton 迭代退化成拟

Newton 这一类迭代方法。下面主要介绍两个对称的近似刚度矩阵 K_{sym} , 使得

$$K_T = K_{\text{sym}} + K_{\text{ns}}, \quad (18)$$

式中, K_{sym} 也可理解为所选取的度量张量。

2.1 弹性本构矩阵

最简单且比较实用的对称的近似刚度矩阵是弹性本构矩阵, 即式 (9) 中 $\beta=0$, 则有

$$K_e = \sum_{\text{elements}} B^T D_e B \, dV, \quad (19)$$

这便是 Zienkiewicz 等^[5]提出的初始刚度法。

2.2 等效的关联塑性流材料的本构矩阵

另一种获得对称刚度矩阵的方法就是将原始非关联塑性流材料等价为相关塑性流材料, 这种方法具体又可以分为 2 种方案^[10]: ①第一种方案是将塑性势面投影到屈服面而获得关联塑性流, 即

$$\partial F^* / \partial \sigma = \partial G^* / \partial \sigma = \partial F / \partial \sigma, \quad (20)$$

式中, F^* 和 G^* 分别为新的等效关联塑性流材料的屈服面函数和塑性势面函数; ②第二种方案是将屈服面投影到塑性势面而获得关联塑性流, 即

$$\partial F^* / \partial \sigma = \partial G^* / \partial \sigma = \partial G / \partial \sigma, \quad (21)$$

对应于第一种方案所获得的本构矩阵为

$$D_{\text{ep}}^F = D_e - D_p^F = D_e - \frac{D_e a a^T D_e}{a^T D_e a - c_F^T h_F}, \quad (22)$$

式中,

$$c_F^T h_F = a^T D_e (a - b) + c^T h. \quad (23)$$

由 D_{ep}^F 按式 (14) 组装的整体刚度矩阵这里表示为 K_F 。而对应于第二种方案所获得的本构矩阵为

$$D_{\text{ep}}^G = D_e - D_p^G = D_e - \frac{D_e b b^T D_e}{b^T D_e b - c_G^T h_G}, \quad (24)$$

式中,

$$c_G^T h_G = b^T D_e b - (a^T D_e b - c^T h) \frac{b^T D_e d\varepsilon}{a^T D_e d\varepsilon}, \quad (25)$$

由 D_{ep}^G 按式 (14) 组装的整体刚度矩阵这里则表示为 K_G 。上面的方法相当于在式 (8) 中取 $\beta=1$, $\hat{D}_p = D_p^F$ 或 $\hat{D}_p = D_p^G$ 。

3 加速方案

使用对称刚度矩阵进行非线性迭代, 位移按下式更新,

$$u_T^{(k)} \approx u_\omega^{(k)} = u^{(k-1)} + \omega^{(k)} \Delta u_{\text{sym}}^{(k)}, \quad (26)$$

式中, 采用了较简单的加速技术, 即使用单步长参数 $\omega^{(k)}$ 使得 $\omega^{(k)} \Delta u_{\text{sym}}^{(k)} \approx \Delta u_T^{(k)}$, 其中 $\Delta u_{\text{sym}}^{(k)}$ 为通过对称刚度矩阵进行迭代而获得的位移增量。Chen 加速方法^[7, 9]假设残余力矢量的更新与式 (26) 中位移更新具有线

性比例关系, 则有

$$R_T^{(k)} \approx R_\omega^{(k)} = R^{(k-1)} + \omega^{(k)} (R_{\text{sym}}^{(k)} - R^{(k-1)}), \quad (27)$$

将最小二乘法应用于下一迭代步所产生的残余力矢量 $R_\omega^{(k)}$, 可得单步长参数 $\omega^{(k)}$, 即

$$\partial \left[(R_\omega^{(k)})^T R_\omega^{(k)} \right] / \partial \omega^{(k)} = 0, \quad (28)$$

$$\omega^{(k)} = - \frac{(R^{(k-1)})^T (R_{\text{sym}}^{(k)} - R^{(k-1)})}{(R_{\text{sym}}^{(k)} - R^{(k-1)})^T (R_{\text{sym}}^{(k)} - R^{(k-1)})}, \quad (29)$$

Thomas 加速方法^[8-9]则是通过将最小二乘法应用于下一步迭代获得的“对称”位移来计算步长参数。

4 数值评价

4.1 二维孔洞扩张模拟

首先模拟一个二维平面应变的带有孔洞的圆柱体, 其内半径为 $a_0=3$ m, 外半径为 $b_0=20$ m。初始时, 孔壁内侧作用的均布压力 $p_0=0$ kPa。为了减少计算量可根据对称性只模拟其 1/4 部分, 整个有限元网格含有 495 个 8 节点四边形单元。模型采用 Mohr-Coulomb 本构关系, 具体参数: 有效杨氏模量为 $E'=20000$ kPa, 泊松比 $\nu=0.499$, $c=20$ kPa, 内摩擦角 $\phi=32^\circ$, 膨胀角为 $\varphi=4^\circ$ 。

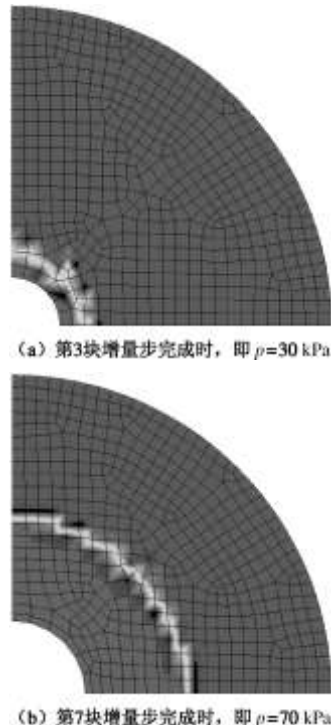


图 1 塑性区

Fig. 1 Yield zone

孔洞内壁作用的压力从初始状态的 $p_0=0$ kPa 逐渐增加, 每个块增量步压力增量为 10 kPa, 最后一块增量步为 4 kPa, 直至最后总压力达到 84 kPa, 每个块

增量步具体又分成 5 个均匀子步。应力点算法采用均匀成时和第 7 个块增量步完成时塑性区扩展情况。表 1 匀 1000 步的欧拉算法。图 1 给出了第 3 个块增量步完

表 1 非线性迭代法的非线性迭代次数, 每个块增量步含 5 个均匀子增量步

Table 1 Nonlinear iteration counts of nonlinear iterative schemes for each block increment with 5 uniform sub-increments

块增量步	Δp	非线性迭代次数									
		NR K_T	初始刚度 (K_e)			等效塑性流材料刚度 (K_F)			等效塑性流材料刚度 (K_G)		
			无	Chen	Thomas	无	Chen	Thomas	无	Chen	Thomas
1	10	9	84	22	20	10	10	15	19	16	9
2	10	28	194	43	50	34	34	32	46	35	27
3	10	46	467(3)	105	87	63	70	241(2)	93	56	43
4	10	55	500(5)	179	118	75	86	500(5)	113	69	43
5	10	60	500(5)	221	141	104	99	500(5)	120	76	44
6	10	67	500(5)	271	181	122	104	500(5)	131	87	49
7	10	76	500(5)	330	227	188	135	500(5)	141	83	55
8	10	86	500(5)	480(3)	352	139	190	500(5)	160	99	61
9	4	88	500(5)	500(5)	450(1)	218	137	500(5)	138	102	54
标准化的累计 迭代数	—	1.0	7.27	4.17	3.16	2.52	1.68	6.38	1.87	1.21	0.75
标准化的耗时	—	1.0	5.38	4.75	3.36	1.12	1.77	4.97	1.56	1.59	0.82

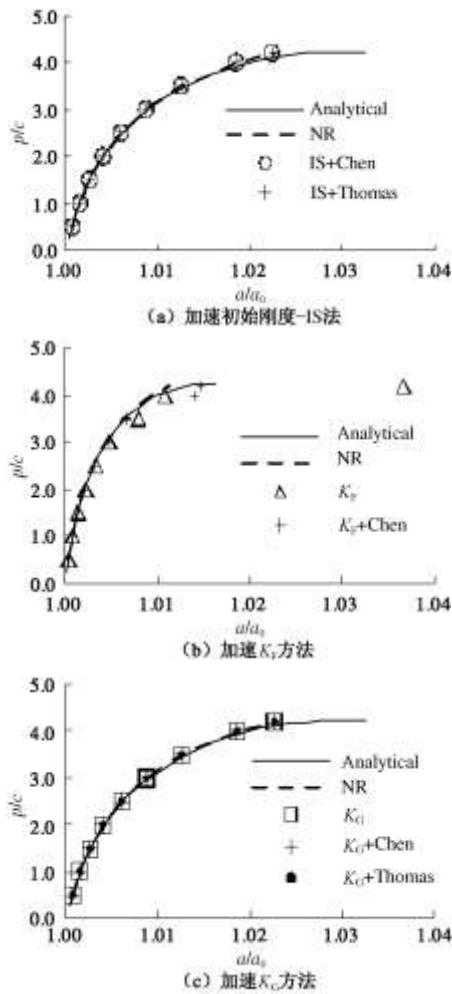
表 2 非线性迭代法的数值计算性能

Table 2 Numerical computational performance of nonlinear iterative methods

非线性迭代方法	NR K_T	初始刚度(K_e)			等效塑性流材料刚度(K_G)		
		未加速	Chen	Thomas	未加速	Chen	Thomas
SRF 总测试次数	19 (3)	19 (3)	16 (4)	29 (2)	22 (3)	22 (3)	19 (3)
FOS	2.1302	2.1030	2.1248	2.1239	2.1323	2.1323	2.1302
累计非线性迭代次数	4293	5382	4316	7789	5267	5243	4327
标准化的耗时	1.00	1.15	1.06	1.52	1.21	1.26	1.00

图 2 荷载 - 变形曲线

Fig. 2 Load-deformation curves



则给出各种迭代方法在每个块增量步的迭代次数以及标准化的累计迭代次数, 其中括号中的数字表示为未收敛的子增量步的数量。由于设置的最大允许非线性迭代次数为 $\text{maxit_nl}=100$ (使用的位移收敛准则的误差容忍度为 $\text{tol_nl}=0.001$), 没有加速的初始刚度法在第三个块子增量步就有 3 次没有收敛。通过 Chen 加速法和 Thomas 加速法, 非线性收敛得到明显的改善, 而 Thomas 加速法的加速效果更好。对于等效塑性流材料刚度 K_F , Chen 加速法可以改善其收敛性, 但 Thomas 加速法却使原本的收敛性恶化。对于等效塑性流材料刚度 K_G , 其收敛和加速特征与初始刚度相似, 但是加速效果更加明显。当使用 Thomas 方法进行加速时, 累计非线性迭代步数甚至低于 NR 方法达 25%。图 2 则为标准化的荷载 - 变形曲线图, 其中实线为解析解曲线^[11], 虚线是通过 NR 计算的曲线。可见, 加速的初始刚度法和加速的等效塑性流材料刚度 K_G 方法都可以得到较精确荷载 - 变形曲线, 而等效塑性流材料刚度 K_F 方法得到的曲线明显偏了解析解。

4.2 边坡稳定分析

有限元强度折减法已经成为常用的边坡稳定分析方法。对于复杂材料模型、荷载类型、几何形状和边

界条件, 有限元强度折减法的优势尤为明显^[12-13]。为了加快有限元强度折减法中安全系数的搜索效率, 可采用 α 搜索^[14] (此例采用 $\alpha=0.15$), 设 $maxit_nl=500$ 和基于位移收敛准则的误差容忍度为 $tol_nl=0.001$ 。应力点算法仍采用均匀 1000 步的欧拉算法。

图 3 中为一个 2-D 边坡算例。其中图 3 (a) 为边坡的几何尺寸。整个边坡有限元模型包含 395 个 8 节点四边形单元。边坡黏土采用排水参数: $E'=10000$ kPa, $\nu=0.3$, $\phi=25^\circ$, $\varphi=0^\circ$, $c=20$ kPa, $\gamma=19$ kN/m³。若在此例中采用关联塑性流 (即 $\phi=\varphi=25^\circ$), NR 迭代, 未加速、Chen 加速和 Thomas 加速的初始刚度法计算所得的边坡安全系数都约为 2.147, 而采用 PLAXIS 计算的结果为 2.082。根据实际土的性质, 采用更切合实际的非关联塑性流法则是因为非关联塑性的确会对边坡稳定分析结果产生影响, 例如, 与关联塑性相比, 非关联塑性通常得出较小的破坏荷载的结论^[15-16]。表 2 给出了给出不同方法的计算性能, SRF 总测试次数中括号内的数字为未收敛的次数; 可以看出 NR 迭代和 Thomas 加速的 K_G 迭代的计算性能较好, 耗时也较少, 而未加速 K_G 迭代和 Chen 加速的 K_G 迭代耗时略长, 但却得到更精确的 FOS。计算结果也表明: 对于同样的 tol_nl , 若想得到较高精度的 FOS, 需要采用较大的 $maxit_nl$, 并且需要一种可以更加鲜明地区分出收敛或不收敛特征的收敛率较高的非线性迭代方法。为了验证上面非关联塑性边坡的 FOS, 使用了 PLAXIS 进行了计算, 其结果为 2.077。以上计算也印证了已有研究的结论, 即采用非关联塑性流计算的安全系数通常要比关联塑性流的计算结果偏小。图 3 (b) 为边坡滑坡时位移模的等值填充图, 其中深颜色条带表示滑坡的位置。

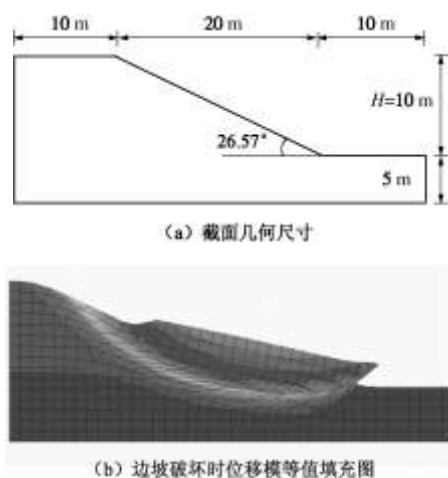


图 3 2D 边坡算例

Fig. 3 Example of a 2D slope

5 结 论

为了模拟岩土材料的实际特性, 通常需要在岩土工程问题的有限元模拟过程中使用非关联塑性流本构模型。本文在加速初始刚度法的基础上, 提出了加速对称刚度法来求解具有非关联塑性的岩土工程问题。通过一个二维孔洞扩张算例和一个边坡算例, 并得出以下结论:

(1) 加速对称刚度法是包括加速初始刚度法在内的一种更加泛化的方法, 然而在加速对称刚度法中, 对称刚度矩阵 (度量张量) 的选择至关重要。

(2) 从孔洞扩张算例可以看出, 尽管加速技术可以有效改善初始刚度法的收敛性, 但对于给定的用户设置的最大非线性迭代次数 (如 $maxit_nl=100$) 可能不收敛, 从而导致不够精确的解。加速 K_G 方法比加速初始刚度法收敛明显更快, 尽管初始刚度只需要一次组装和 Cholesky 分解, 由于加速 K_G 方法收敛速度更快, 通常也会导致更少的计算耗时。

(3) 对于非关联塑性边坡稳定问题, 采用有限元剪切强度折减法进行分析时, 适当地选择合适的非线性收敛方法可以得到较精确的安全系数, 同时又耗费较少的计算时间。

(4) 综合上面两个算例可以看出, 一个较好的对称刚度矩阵需要对原始非对称矩阵具有较好的近似性。由于初始刚度法只使用弹性刚度, 其收敛较慢, 但其主要优点是具有较高的稳定性。NR 和 Thomas 加速的 K_G 方法显示了较好的计算性能。然而, 与 NR 迭代法相比, 加速的 K_G 的优势又在于它不需要非对称的线性求解方法。

参考文献:

- [1] VERMEER P A, DE BORST R. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock[J]. *Heron*, 1984, **29**(3): 1 - 64.
- [2] 杨 强, 陈 新, 周维垣. 基于 D—P 准则的三维弹塑性有限元增量计算的有效算法[J]. *岩土工程学报*, 2002, **24**(1): 16 - 22. (YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Wei-yuan. A practical 3D elasto-plastic incremental method in FEM based on D-P yield criteria[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, **24**(1): 16 - 22. (in Chinese))
- [3] COLLIN I F. Associated and non-associated aspects of the constitutive laws for coupled elastic/plastic materials[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2002, **2**(2): 259 - 267.
- [4] 熊文林. 非关联塑性切线刚度矩阵的对称表示[J]. *应用数学和力学*, 1986, **7**(11): 983 - 992. (XIONG Wen-lin.

- Symmetric formulation of tangential stiffnesses for non-associated plasticity[J]. *Applied mathematics and mechanic*, 1986, **7**(11): 983 – 992. (in Chinese))
- [5] ZIENKIEWICZ O C, VALLIAPPAN S, KING I P. Elasto-plastic solutions of engineering problems ‘initial stress’, finite element approach[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1969, **1**(1): 75 – 100.
- [6] 郑宏, 刘德富. 弹塑性矩阵 D_{ep} 的特性和有限元边坡稳定性分析中的极限状态标准[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, **24**(7): 1099 – 1105. (ZHENG Hong, LIU De-fu. Properties of elasto-plastic matrix D_{ep} and a criterion on limiting state of slope stability by FEM[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, **24**(7): 1099 – 1105. (in Chinese))
- [7] CHEN C. Efficient and reliable accelerated constant stiffness algorithms for the solution of non-linear problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **35**(3): 481 – 490.
- [8] THOMAS J N. An improved accelerated initial stress procedure for elasto-plastic finite element analysis[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, **8**(4): 359 – 379.
- [9] SLOAN S W, SHENG D, ABBO A J. Accelerated initial stiffness schemes for elastoplasticity[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2000, **24**(6): 579 – 599.
- [10] FAMIYESIN O O R. Robust symmetric formulations for nonassociated plasticity problems[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999, **125**(9): 1071 – 1080.
- [11] YU H S. Cavity expansion methods in geomechanics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.
- [12] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. *岩土工程学报*, 2002, **24**(3): 343 – 346. (ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, **24**(3): 343 – 346. (in Chinese))
- [13] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis—theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003. (in Chinese))
- [14] 陈曦, 刘春杰. 有限元强度折减法中安全系数的搜索算法[J]. *岩土工程学报*, 2010, **32**(9): 1443 – 1447. (CHEN Xi, LIU Chun-jie. Search algorithms for safety factor in finite element shear strength reduction method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(9): 1443 – 1447. (in Chinese))
- [15] MANZARI M T, NOUR M A. Significance of soil dilatancy in slope stability analysis[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 2000, **126**(1): 75 – 80.
- [16] WANG Y J, YIN J H, LEE C F. The influence of a non-associated flow rule on the calculation of the factor of safety of soil slopes[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2001, **25**(13): 1351 – 1359.